

ELEMENTO FINITO CUADRANGULAR DE DIECISÉIS GDL PARA ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO TRANSVERSAL DE PLACAS

Raúl E. Rossi^a, Santiago Maiz^{a,b}, Antonio Susca^{a,b}, Daniel H. Felix^a

^a*Departamento de Ingeniería – Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina.
rerossi@criba.edu.ar, dhfelix@criba.uns.edu.ar*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
smaiz@uns.edu.ar, asusca@ceia.uns.edu.ar*

Palabras clave: Elementos finitos, vibración de placas, elemento cuadrangular

Resumen: El elemento finito rectangular se utiliza comúnmente para el análisis del comportamiento transversal de placas delgadas (problemas estáticos y dinámicos). A modo de ejemplo pueden citarse los excelentes trabajos de Bogner, Fox y Schmit, y de V. Mason, quienes desarrollaron un elemento rectangular conforme sumamente eficiente para el análisis de placas delgadas. Sin embargo, el elemento rectangular no es útil en dominios geométricos que no puedan ser descompuestos en subdominios rectangulares. Por esta razón se planea el desarrollo de un elemento cuadrangular, de lados no paralelos, que permita una adaptación a dominios no rectangulares, como ser en placas trapeciales y romboidales. El elemento finito cuadrangular propuesto por los autores tiene cuatro grados de libertad por nodo, y ha sido formulado con funciones de forma similares a las del elemento de Bogner. En el presente estudio se dan resultados obtenidos de frecuencias naturales, de diversos casos de placas no rectangulares, y se comparan con soluciones exactas u otras aproximadas disponibles en la bibliografía especializada, o con los hallados utilizando el software profesional Algor.

1 INTRODUCCIÓN

La intención de los autores de este trabajo no ha sido superar la adaptabilidad y calidad de elementos finitos cuadrangulares reconocidos por su gran eficacia, pero que involucran una formulación bastante compleja, como es el caso del elemento conforme desarrollado por (Clough y Felippa, 1968), o el propuesto por (Fraeijis de Veubeke, 1968). Cabe mencionar que este último ha sido incluido en la biblioteca de elementos finitos, para análisis lineal de placas delgadas, del software profesional (Algor, 2001).

Por otra parte, es bien conocido, por su excelente convergencia, el elemento rectangular conforme desarrollado por (Bogner, Fox y Schmit, 1966), y en forma independiente por (Mason, 1968), que incluyeron la derivada segunda mixta del desplazamiento transversal como cuarto grado de libertad, en cada vértice (nodo) del elemento rectangular.

El objetivo de los autores ha sido desarrollar un algoritmo de relativa facilidad en su implementación computacional, y que al mismo tiempo produzca buenos resultados numéricos desde el punto de vista ingenieril, con mallas de escasa densidad de elementos finitos.

2 FORMULACIÓN DEL ALGORITMO

Bogner y colaboradores, en el desarrollo del elemento rectangular, propusieron un polinomio completo de tercer grado en las variables x e y , dado por la siguiente expresión:

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \alpha_{ij} x^i y^j \quad (1)$$

Los cuatro grados de libertad, en cada vértice del elemento cuadrangular, son: el desplazamiento transversal (w), sus dos primeras derivadas ($\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$), y la derivada segunda mixta, o cruzada ($\partial^2 w/\partial x \partial y$). Los dieciséis grados de libertad del elemento se agrupan en el denominado *vector de los desplazamientos nodales*:

$$\{\delta\}^t = [w_1 \quad (\partial w/\partial x)_1 \quad (\partial w/\partial y)_1 \quad (\partial^2 w/\partial x \partial y)_1 \quad \dots \quad (\partial^2 w/\partial x \partial y)_4] \quad (2)$$

En el trabajo de Bogner se reportan expresiones explícitas de las componentes de las matrices de masa y de rigidez del elemento rectangular, obtenidas mediante integración analítica. Este elemento no sólo cumple con la condición de continuidad del desplazamiento transversal (w) y de las derivadas primeras ($\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$), sino que además se satisface la continuidad de la derivada segunda mixta o cruzada ($\partial^2 w/\partial x \partial y$) en los cuatro lados, y de las derivadas segundas $\partial^2 w/\partial x^2$ y $\partial^2 w/\partial y^2$ sobre los lados paralelos a los ejes coordenados x e y , respectivamente. Este elemento muestra mayor eficacia cuando es cuadrado, disminuyendo levemente la precisión a medida que la relación, de lados contiguos del rectángulo, se aleja de la unidad. También decrece su calidad cuando la malla no es regular (elementos rectangulares de distintos tamaños). La razón de la escasa popularidad que goza el elemento de Bogner, entre los usuarios del método de elementos finitos, radica en que no es posible generalizar su formulación a formas cuadrangulares irregulares, debido a la pérdida de continuidad (Oñate, 1992).

La Figura 1 muestra el elemento cuadrangular en el plano físico x - y , con indicación del par de ejes locales coincidentes con las medianas, con los cuales se introducen adecuadas coordenadas adimensionales ξ y η .

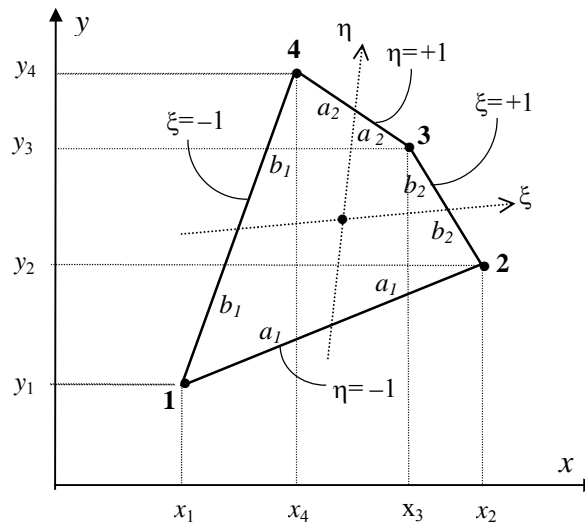


Figura 1: Elemento cuadrangular en el plano x-y

En la misma figura se indica, además, la numeración local de los nodos, como asimismo la notación adoptada para las medidas de los lados. La transformación de coordenadas se define con las siguientes funciones bilineales:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)x_3 + \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)x_4 \\ y &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)y_3 + \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)y_4 \end{aligned} \quad (3)$$

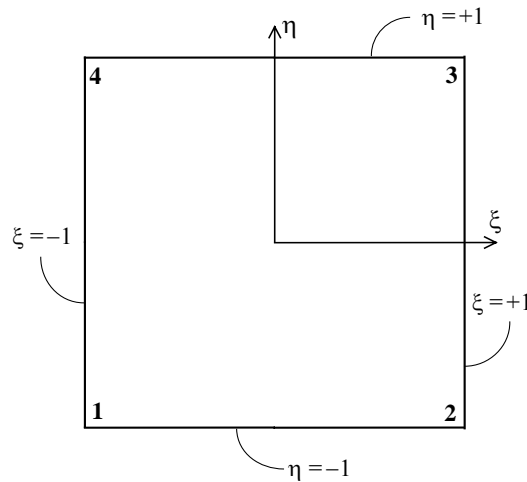


Figura 2: Elemento en el plano xi-eta

El cuadrado de la Figura 2 representa al elemento cuadrangular genérico ubicado en el plano x-y. Con funciones de forma $N(\xi, \eta)$, agrupadas en la matriz-fila $[N]$, el desplazamiento transversal se expresa en función de las variables adimensionales:

$$w(\xi, \eta) = [N] \{\delta\} \quad (4)$$

A partir del polinomio completo de tercer grado en las variables ξ y η , se deducen las siguientes dieciséis funciones de forma para el elemento rectangular de Bogner, de lados $2a$ y $2b$:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= (\xi+2) (\xi-1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2/16 \\
N_2(\xi, \eta) &= a (\xi+1) (\xi-1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2/16 \\
N_3(\xi, \eta) &= b (\xi+2) (\xi-1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2/16 \\
N_4(\xi, \eta) &= a b (\xi+1) (\xi-1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2/16 \\
N_5(\xi, \eta) &= (2-\xi) (\xi+1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2/16 \\
N_6(\xi, \eta) &= a (\xi-1) (\xi+1)^2 (\eta+2) (\eta-1)^2/16 \\
N_7(\xi, \eta) &= b (2-\xi) (\xi+1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2/16 \\
N_8(\xi, \eta) &= a b (\xi-1) (\xi+1)^2 (\eta+1) (\eta-1)^2/16 \\
N_9(\xi, \eta) &= (\xi-2) (\xi+1)^2 (\eta-2) (\eta+1)^2/16 \\
N_{10}(\xi, \eta) &= a (\xi-1) (\xi+1)^2 (2-\eta) (\eta+1)^2/16 \\
N_{11}(\xi, \eta) &= b (\xi-2) (\xi+1)^2 (1-\eta) (\eta+1)^2/16 \\
N_{12}(\xi, \eta) &= a b (\xi-1) (\xi+1)^2 (\eta-1) (\eta+1)^2/16 \\
N_{13}(\xi, \eta) &= (\xi+2) (\xi-1)^2 (2-\eta) (\eta+1)^2/16 \\
N_{14}(\xi, \eta) &= a (\xi+1) (\xi-1)^2 (2-\eta) (\eta+1)^2/16 \\
N_{15}(\xi, \eta) &= b (\xi+2) (\xi-1)^2 (\eta-1) (\eta+1)^2/16 \\
N_{16}(\xi, \eta) &= a b (\xi+1) (\xi-1)^2 (\eta-1) (\eta+1)^2/16
\end{aligned} \tag{5}$$

3 FORMULACIÓN CON FUNCIONES DE FORMA DE TERCER GRADO (ELEMENTO EC16-3)

En el presente trabajo, los autores utilizaron dichas funciones de forma, con la única modificación de los lados del rectángulo, reemplazándolos por los del cuadrilátero. Con este criterio simplista, en las funciones de forma $N_2(\xi, \eta)$, $N_3(\xi, \eta)$ y $N_4(\xi, \eta)$ se sustituyen a y b con a_1 y b_1 , respectivamente; en $N_6(\xi, \eta)$, $N_7(\xi, \eta)$ y $N_8(\xi, \eta)$ con a_1 y b_2 ; en $N_{10}(\xi, \eta)$, $N_{11}(\xi, \eta)$ y $N_{12}(\xi, \eta)$ con a_2 y b_2 ; finalmente, en $N_{14}(\xi, \eta)$, $N_{15}(\xi, \eta)$ y $N_{16}(\xi, \eta)$ con a_2 y b_1 .

La matriz masa consistente se obtiene con la conocida expresión:

$$[m] = \rho h \int_A [N]' [N] dA = \rho h \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]' [N] |J| d\xi d\eta \tag{6}$$

donde ρ es la densidad del material, h el espesor del elemento y $|J|$ el jacobiano de la transformación de coordenadas, definida por las expresiones (3). En la implementación del algoritmo se aplicó el método de cuadratura de Gauss-Legendre, ([Zienkiewicz, 1980](#)). Dado que en este caso el jacobiano es un polinomio de primer grado en las variables ξ y η , el integrando $[N]' [N] |J|$ contiene términos de séptimo grado. En consecuencia, para el cálculo numérico exacto de la matriz $[m]$ se utilizaron 4×4 puntos de integración (cuatro puntos en cada dirección).

Por otra parte, la matriz rigidez del elemento se calcula con la expresión:

$$[k] = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]' [D] [B] |J| d\xi d\eta \tag{7}$$

donde $[D]$ es la matriz constitutiva del material elástico lineal, que en el caso de isotropía se expresa:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

siendo E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson. $[B]$ es la matriz de deformación, con la cual, en el caso de placas, se obtiene el denominado *vector de curvaturas* $\{\chi\}$ en función de los desplazamientos nodales agrupados en el vector $\{\delta\}$:

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \quad (9)$$

Se dedujo la siguiente expresión de la matriz $[B]$:

$$[B] = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} \right] + L \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + M \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [N^*] \quad (10)$$

donde L , M y la matriz $[T]$ se expresan en función de las derivadas de la transformación de coordenadas:

$$L = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right); \quad M = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \quad (11a, b)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Reemplazando (10) en (7), se obtiene:

$$[k] = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N^*]^t [T]^{-t} [D] [T]^{-1} [N^*] |J| d\xi d\eta \quad (13)$$

Los autores de este trabajo no lograron resolver la integral (13) en forma analítica, con lo cual se habrían obtenido expresiones explícitas de las componentes de la matriz rigidez. Dado que el integrando contiene términos polinómicos en las variables ξ y η , tanto en el numerador como en el denominador, no es posible una solución numérica exacta con integración numérica. En la codificación del algoritmo se recurrió al método de Gauss-Legendre, y se utilizaron dos versiones, con grillas de 4×4 y 5×5 puntos de integración, a fin de observar la influencia en los resultados.

El elemento así formulado cumple con las condiciones de continuidad del desplazamiento y derivadas primeras, sobre lados adyacentes de elementos contiguos, cuando la placa es modelada con una malla generada con dos haces de rectas, con centros en los puntos de intersección de los lados opuestos de la placa cuadrangular. En consecuencia, se asegura la convergencia cuando se modela con una malla regular, como la mostrada en la Figura 3.

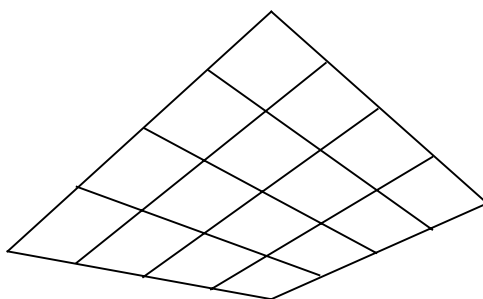


Figura 3: Malla regular en una placa cuadrangular

Cabe destacar que la falta de equidistancia entre las rectas no afecta a la continuidad. Por otro lado, un cambio de dirección en un nodo común a dos o más elementos, provoca la pérdida de continuidad. No obstante, la carencia de la propiedad de elemento conforme en mallas ligeramente irregulares, tiene un efecto que, a juicio de los autores, no llega a invalidar los resultados numéricos desde el punto de vista ingenieril, con convergencia hacia valores que difieren levemente de la solución exacta.

4 FORMULACIÓN CON FUNCIONES DE FORMA DE CUARTO GRADO (ELEMENTO EC16-4)

Una alternativa del algoritmo anterior consiste en reemplazar a y b , en las funciones de forma (5) del rectángulo, por sendas funciones lineales:

$$A = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \eta ; \quad b = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) - \frac{1}{2} (b_1 - b_2) \xi \quad (14a, b)$$

Obviamente, esta sustitución aumenta el grado de las funciones de forma, de modo que $N_2(\xi, \eta)$, $N_6(\xi, \eta)$, $N_{10}(\xi, \eta)$ y $N_{14}(\xi, \eta)$ incluyen términos de cuarto grado en la variable η ; análogamente, las funciones $N_3(\xi, \eta)$, $N_7(\xi, \eta)$, $N_{11}(\xi, \eta)$ y $N_{15}(\xi, \eta)$ tienen términos de cuarto grado en ξ ; y las funciones $N_4(\xi, \eta)$, $N_8(\xi, \eta)$, $N_{12}(\xi, \eta)$ y $N_{16}(\xi, \eta)$ pasan a tener términos de cuarto grado en ambas variables. Es razonable suponer que con esta formulación, el elemento cuadrangular puede resultar más eficiente, cuando $a_1 \neq a_2$ y/o $b_1 \neq b_2$, que el propuesto en este trabajo. Se proyecta avanzar en un futuro inmediato con esta línea de investigación. Todos los resultados numéricos que se reportan en este trabajo, han sido calculados con las funciones de forma de tercer grado (elemento EC16-3).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Las pruebas numéricas del elemento se realizaron mediante la determinación de las frecuencias naturales de placas trapeciales, romboidales y hexagonales, con soluciones disponibles en la bibliografía especializada, o con resultados hallados por los autores con el software profesional Algor utilizando el elemento de Veubeke. En todos los casos se adoptó $\nu = 0,3$ y se calcularon valores del coeficiente de frecuencia $\Omega = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$, donde D es la rigidez flexional de la placa. Los resultados fueron obtenidos con integración numérica de Gauss-Legendre de 4×4 puntos en el cálculo de ambas matrices, ya que las pruebas realizadas con grillas más densas, en el cálculo de la matriz $[k]$, mostraron que la mejora no es significativa. El algoritmo se codificó con Visual Basic aplicando aritmética de doble precisión.

El primer ejemplo es una placa romboidal, con una oblicuidad de 45° , simplemente apoyada (articulada) en su contorno. En el trabajo de ([Durvasula, 1968](#)), se encuentran valores aproximados, obtenidos con el método de Rayleigh-Ritz, de frecuencias naturales de membranas, con los cuales se calculan los coeficientes de frecuencia para el caso de la placa articulada en el contorno. Las mallas regulares de elementos finitos fueron generadas mediante rectas paralelas a los lados de la placa, con n y m divisiones sobre los lados a y b , respectivamente. Se resolvieron tres esquemas, con relaciones de lados $b/a = 3/2, 2$ y 3 . En la Tabla 1 se dan los resultados obtenidos con el elemento propuesto. Debido a las diferencias entre los resultados obtenidos y los que se dan en el trabajo mencionado de Durvasula, se agregaron los valores hallados por los autores con sendos modelos procesados con Algor.

b/a	elemento	Malla $n \times m$	Número de nodos	GDL	Ω_1	Ω_2
3/2	EC16-3	8×12	117	420	26,03	42,46
		12×18	247	920	25,93	42,35
		16×24	425	1612	25,88	42,29
		20×30	651	2496	25,84	42,26
		24×36	925	3572	25,82	42,23
	ALGOR	80 ×120	9801	28995	25,84	42,25
	Durvasula:					25,69
2	EC16-3	8×16	153	556	23,01	32,21
		12×24	325	1220	22,96	32,12
		16×32	561	2140	22,94	32,07
		20×40	861	3316	22,93	32,03
		24×48	1225	4748	22,91	32,01
	ALGOR	80×160	13041	38635	22,92	32,03
	Durvasula:					22,87

Tabla 1: Valores de Ω_1 y Ω_2 de placas romboidales articuladas en el contorno

b/a	elemento	Malla $n \times m$	Número de nodos	GDL	Ω_1	Ω_2
3	EC16-3	8×24	225	828	21,07	24,97
		12×36	481	1820	21,05	24,93
		16×48	833	3196	21,05	24,91
		20×60	1281	4956	21,04	24,89
		24×72	1825	7100	21,04	24,88
	ALGOR	80×240	19521	57915	21,04	24,89
	Durvasula:				21,06	24,95

Tabla 1: Valores de Ω_1 y Ω_2 de placas romboidales articuladas en el contorno (*continuación*)

El siguiente caso también es una placa romboidal con oblicuidad de 45° , con relación de lados $b/a=1$, y con dos condiciones de vínculo: totalmente empotrada en el contorno, y empotrada en un solo lado con los otros tres lados libres (placa cantilever). Se dispone de valores de comparación aproximados de las seis primeras frecuencias de la placa empotrada, y de las dos primeras para la placa cantilever, que proporciona ([Blevins, 1979](#)). En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados hallados por los autores con el elemento EC16-3 y con Algor. Es importante aclarar que Algor, en el análisis lineal de frecuencias, utiliza una matriz de masa *no consistente* (lumped mass matrix). En consecuencia, es razonable esperar una disminución de los valores de las frecuencias en el caso de la placa cantilever, por efecto de la concentración de masas en los nodos de los bordes libres.

Malla $n \times m$	Número de nodos	GDL	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
8 × 8	81	196	65,83	106,93	149,79	158,27	200,22	231,95
12×12	169	484	65,69	106,59	148,64	157,51	197,53	230,03
16×16	289	900	65,66	106,53	148,42	157,34	197,02	229,67
20×20	441	1444	65,65	106,51	148,36	157,28	196,88	229,57
24×24	625	2116	65,65	106,50	148,33	157,26	196,82	229,53
ALGOR 80×80	6561	18723	65,65	106,53	148,37	157,28	196,87	229,62
Blevins:			65,93	106,6	149,0	158,9	199,4	231,9

Tabla 2: Valores de Ω_i ($i = 1 \dots 6$) de una placa rómbica (45° , $b/a=1$) empotrada en el contorno

Malla $n \times m$	Número de nodos	GDL	Ω_1	Ω_2
8×8	81	288	4,5198	11,306
12×12	169	624	4,5144	11,278
16×16	289	1088	4,5122	11,266
20×20	441	1680	4,5109	11,260
24×24	625	2400	4,5101	11,257
28×28	841	3248	4,5095	11,254
32×32	1089	4224	4,5090	11,253
<u>ALGOR</u> 80×80	6561	19940	4,5069	11,249
<u>Blevins:</u>			4,824	13,75

Tabla 3: Valores de Ω_1 y Ω_2 de una placa rómbica cantilever (45° , $b/a=1$)

El siguiente caso es una placa trapecial isósceles, con bases a y b , y altura d . Se resolvió un esquema con $d/a = 0,5$ y $b/a = 0,4$ del cual se dan valores aproximados de Ω_i ($i = 1 \dots 6$) citados de ([Chopra y Durvasula, 1971](#)) para el caso de placa simplemente apoyada (articulada), con número de dígitos significativos decreciente. El diseño de la red consistió en dividir las bases del trapecio en n segmentos de igual longitud, y los lados no paralelos en m segmentos, también de igual longitud. En la Tabla 4 se dan los correspondientes resultados obtenidos por los autores con el elemento propuesto, y con Algor mediante un modelo con similar diseño de la malla ($n = 140$, $m = 105$), formada por 14.700 elementos.

Malla $n \times m$	Nº de nodos	GDL	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
4×3	20	52	63,603	127,81	178,57	228,38	250,13	366,94
8×6	63	202	63,404	127,93	179,42	228,22	253,68	351,15
12×9	130	448	63,317	127,87	179,27	228,05	253,49	350,46
16×12	221	790	63,271	127,84	179,21	228,00	253,38	350,31
20×15	336	1228	63,243	127,83	179,17	227,98	253,32	350,26
24×18	475	1762	63,224	127,82	179,15	227,97	253,27	350,24
28×21	638	2392	63,210	127,81	179,13	227,96	253,24	350,22
<u>ALGOR</u> 140×105	14946	44062	63,213	127,81	179,14	227,98	253,27	350,27
<u>Chopra et al.</u>			63,177	127,87	179,4	228,4	254	351

Tabla 4: Valores de Ω_i ($i = 1 \dots 6$) de una placa trapecial isósceles articulada en el contorno

En la Tabla 5, se muestran los resultados para la placa empotrada en el contorno, que se comparan con los valores hallados por los autores con [Algor](#). Para cada tipo de elemento, se utilizaron seis modelos, con incremento gradual del número de elementos.

Elemento	$n \times m$	GDL	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
EC16-3	4×3	24	119,04	200,31	275,41	325,28	365,26	510,18
	8×6	140	118,22	197,52	268,61	319,38	351,80	462,92
	12×9	352	118,16	197,31	268,02	318,62	350,72	460,47
	16×12	660	118,15	197,28	267,92	318,48	350,51	460,02
	20×15	1064	118,14	197,27	267,89	318,44	350,45	459,89
	24×18	1564	118,14	197,26	267,88	318,43	350,43	459,85
ALGOR	40×30	3393	118,21	197,51	268,08	319,01	351,04	461,14
	60×45	7788	118,17	197,37	267,96	318,68	350,68	460,39
	80×60	13983	118,16	197,32	267,92	318,56	350,56	460,13
	100×75	21978	118,15	197,30	267,90	318,51	350,51	460,01
	120×90	31773	118,15	197,29	267,89	318,48	350,48	459,95
	140×105	43668	118,15	197,28	267,88	318,46	350,46	459,91

Tabla 5: Valores de Ω_i ($i = 1...6$) de una placa trapecial isósceles empotrada en el contorno

Los valores de las Tabla 4 y 5 muestran una excelente concordancia entre los resultados obtenidos con el elemento propuesto, con modelos de mallas poco densas, y los hallados con el elemento [Veubeke](#) implementado en Algor.

También se resolvió una placa hexagonal regular de lado a , articulada y empotrada en el contorno. Para ambos casos se conocen valores de Ω_i , ([Laura y Rossi, 2002](#)), donde se dan resultados hallados con Algor con una malla de 18000 elementos tipo Veubeke. Los resultados se muestran en las Tablas 6 y 7, en las que n indica el número de divisiones, de igual longitud, sobre cada lado de placa. Las mallas consistieron de dos regiones trapeciales, cada una con una red de $n \times n$ elementos finitos trapeciales. La base mayor, común a ambas regiones, coincide con una diagonal del hexágono regular. Obviamente, en esta diagonal se produce un cambio en la orientación de los elementos trapeciales, lo cual implica discontinuidad de la derivada normal entre los elementos con lados adyacentes ubicados sobre la misma.

n	Nº nodos	GDL	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
4	45	144	7,56	18,23	19,40	32,62	33,82	38,58
8	153	538	7,34	18,18	18,95	32,52	33,42	37,77
12	325	1194	7,24	18,17	18,78	32,50	33,28	37,58
16	561	2106	7,17	18,16	18,67	32,48	33,20	37,49
20	861	3274	7,13	18,15	18,59	32,47	33,14	37,43
24	1225	4698	7,10	18,15	18,53	32,47	33,09	37,38
28	1653	6378	7,07	18,15	18,49	32,47	33,05	37,35
32	2145	8314	7,05	18,14	18,45	32,47	33,02	37,32
36	2701	10506	7,03	18,14	18,42	32,47	33,00	37,29
Laura et al...			7,15	18,13	18,13	32,45	32,45	37,49

Tabla 6: Valores de Ω_i ($i = 1 \dots 6$) de la placa hexagonal regular articulada en el contorno

n	Nº nodos	GDL	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
4	45	84	12,52	26,61	26,79	43,76	44,06	49,32
8	153	420	12,48	26,48	26,53	43,32	43,59	48,95
12	325	1012	12,48	26,45	26,52	43,29	43,53	48,87
16	561	1860	12,48	26,45	26,52	43,29	43,52	48,86
20	861	2964	12,48	26,45	26,52	43,29	43,52	48,86
Laura et al...			12,79	26,52	26,52	43,29	43,29	49,38

Tabla 7: Valores de Ω_i ($i = 1 \dots 6$) de la placa hexagonal regular empotrada en el contorno

Las diferencias observadas en las Tablas 6 y 7, entre los valores hallados en este trabajo y los proporcionados por ([Laura y Rossi, 2002](#)), se atribuyen a la discontinuidad de la derivada normal, localizada en los lados ubicados sobre la diagonal que divide al hexágono en dos trapecios isósceles. Por otra parte, el diseño de la malla utilizada en el presente trabajo posee dos ejes de simetría mientras que el hexágono tiene seis. Por esta razón los modelos utilizados no pueden reproducir las igualdades $\Omega_2 = \Omega_3$ y $\Omega_4 = \Omega_5$, que sí se verifican con el modelo de Algor.

Finalmente, se resolvió una placa cuadrada, mediante mallas no regulares de $n \times n$ elementos generadas con rectas no todas paralelas a los lados de la placa. En la Figura 4a se muestra la primera malla de 16 elementos. La Figura 4b es la segunda malla de 64 elementos, obtenida dividiendo por la mitad cada lado de los elementos en el contorno de la malla anterior. Con el mismo criterio se diseñaron la tercera malla, de 256 elementos, y la cuarta malla con 1024 elementos.

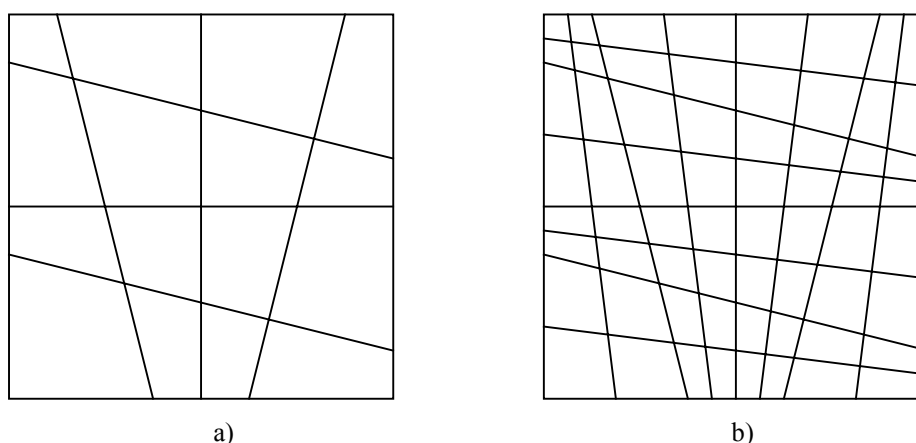


Figura 4: a) Malla irregular de 16 elementos cuadrangulares.
b) Malla irregular de 64 elementos cuadrangulares.

En la Tabla 8 se dan los valores hallados de las primeras tres frecuencias naturales, para la placa articulada en el contorno, con solución exacta conocida ($\Omega_1 = 2\pi^2$, $\Omega_2 = \Omega_3 = 5\pi^2$).

Malla $n \times m$	Número de nodos	<i>GDL</i>	Ω_1	Ω_2	Ω_3
4×4	25	64	19,768	49,585	50,089
8×8	81	256	19,729	49,202	49,383
16×16	289	1024	19,713	49,119	49,282
32×32	1089	4096	19,706	49,102	49,254
Solución exacta:			19,739	49,348	49,348

Tabla 8: Valores de Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 de la placa cuadrada articulada

En la tabla 9 se muestran los resultados obtenidos para el caso de la placa cuadrada empotrada en el contorno, junto con los valores consignados en el libro de [R. D. Blevins](#).

Malla $n \times m$	Número de nodos	<i>GDL</i>	Ω_1	Ω_2	Ω_3
4×4	25	36	36,238	74,235	75,123
8×8	81	196	36,060	73,193	73,716
16×16	289	900	35,972	73,148	73,366
32×32	1089	3844	35,932	73,093	73,298
Blevins :			35,99	73,41	73,41

Tabla 9: Valores de Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 de la placa cuadrada empotrada

Los valores mostrados en las Tablas 8 y 9 ponen de manifiesto el carácter no conforme del elemento, ya que con mallas no regulares de cuadriláteros, se produce convergencia hacia una solución que difiere de la exacta.

6 CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo ha sido presentar una formulación para un elemento finito cuadrangular destinado al análisis de casos particulares de placas delgadas, demostrando su utilidad con mallados adecuados que aseguran la continuidad entre elementos contiguos. En estos casos los resultados numéricos obtenidos son excelentes, con modelos de bajo costo computacional debido al bajo número de grados de libertad requerido para una aceptable convergencia. Los autores no recomiendan su aplicación con mallas irregulares donde el elemento pierde el carácter de conforme, debido a que las condiciones de continuidad no son totalmente satisfechas.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido financiado en el Departamento de Ingeniería por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, y por el programa de Investigación y Desarrollo del CONICET. Los autores agradecen al Profesor Emérito Dr. Ing. Patricio A. A. Laura por sus valiosas sugerencias durante el desarrollo del trabajo.

REFERENCIAS

- Algor Professional Mech. *Linear Stress and Dynamics Reference Division*, Pittsburgh, PA, USA. VE 12.2, 2001.
- R. D. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape*, Editorial Van Nostrand Reinhold Co. ISBN 0-442-20710-7, 1979.
- F. K. Bogner, R. L. Fox and L. A. Schmit. The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. *Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-66-80, 397-443, 1966.
- I. Chopra, S. Durvasula. Vibration of simply-supported trapezoidal plates, I. Symmetric trapezoids. *Journal of Sound and Vibration*, 19(4), 379-392, 1971.
- R. W. Clough, C. A. Felippa. A refined quadrilateral element for analysis of plate bending. *2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. AFFDL-TR-68-150, 399-440, 1968.
- S. Durvasula. Natural frequencies and modes of skew membranes. *Journal of Acoustical Society of America*, 44, 1636-1646, 1968.
- B. Fraeijis de Veubeke. A conforming finite element for plate bending. *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol.4, 95-108, 1968.
- P. A. A. Laura, R. E. Rossi. Transverse vibrations of a thin, elastic plate of regular hexagonal shape. *Journal of Sound and Vibration*, 256(2), 367-372, 2002.
- V. Mason. Rectangular finite element for analysis of plate vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 7(3), 437-448, 1968.
- E. Oñate. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNI), ISBN 84-87867-00-6, 1ra. Edición, 1992.
- O. C. Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos*, Editorial Reverté S.A., ISBN 84-291-4894-9, 1980.