

UN MODELO TIMOSHENKO-VLASOV PARA VIGAS CURVAS COMPUESTAS DE SECCIÓN ARBITRARIA: DISEÑO ÓPTIMO

A TIMOSHENKO-VLASOV MODEL FOR COMPOSITE CURVED BEAMS OF ARBITRARY SECTION: OPTIMAL DESIGN

Patricia N. Dominguez^{a,b} y Víctor H. Cortínez^{a,b,c}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, e-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, e-mail: pdoming@uns.edu.ar*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras clave: Vigas curvas de material compuesto, modelo Timoshenko-Vlasov, flexibilidad por corte, alabeo torsional, optimización.

Resumen. En este trabajo se presenta una extensión del modelo generalizado de Timoshenko-Vlasov para vigas de eje curvo, de sección transversal arbitraria, construidas con materiales laminados. La formulación tiene en cuenta efectos de flexibilidad por corte y por alabeo torsional no uniforme además de los clásicos aspectos relacionados a flexión, torsión y esfuerzos axiales. Dicho modelo se utiliza para formular un enfoque óptimo de diseño estructural teniendo como variables a las dimensiones de la sección y la arquitectura de laminación en el caso de paredes delgadas. Se plantean diferentes objetivos de diseño, tales como la maximización de la frecuencia fundamental de vibración y la minimización del área de la sección transversal. Asimismo se consideran restricciones geométricas y otras asociadas a la falla estructural.

Keywords: Composite curved beams, Timoshenko-Vlasov model, shear flexibility, torsional warping, optimization.

Abstract. In this paper an extension of the generalized Timoshenko-Vlasov model for curved beams, of arbitrary cross section, constructed with laminated materials is presented. The formulation takes into account shear flexibility and non-uniform torsional warping effects, in addition to the classical bending, twisting and axial aspects. Such model is used to formulate an optimal design approach where the dimensions of the section and the architecture of lamination, in the case of composites walls, are the variables. Different design objective functions are proposed, such as the maximization of the fundamental frequency of vibration and the minimization of the transversal section. Likewise, geometric constraints and others associated with structural failure are considered.

1 INTRODUCCIÓN

Las vigas de eje curvo son utilizadas en varias aplicaciones de la ingeniería estructural, en particular en la construcción de estructuras de puentes. Si bien los materiales clásicos empleados son el hormigón armado y el acero, en las últimas dos décadas se ha avanzado considerablemente en la utilización de los materiales compuestos laminados que tienen propiedades mejoradas de fatiga, alta relación rigidez-peso y resistencia-peso (Barbero, 1999).

Por la importancia técnica de tales estructuras se ha realizado una ingente labor de investigación propendiendo al desarrollo de modelos de cálculo adecuados (Nam-II et al., 2005; Sapountzakis y Tsipsis, 2015). En particular, es posible utilizar modelos unidimensionales generalizados para la predicción de la mecánica estructural de las vigas curvas con un requerimiento computacional modesto respecto a enfoques tridimensionales (Yang y Kuo, 1986; Kang et al., 1996). La teoría clásica de vigas curvas se basa en la teoría de Vlasov para vigas rectas, que considera efectos de alabeo torsional no uniforme, aspecto de importancia en secciones de pared delgada. Asimismo, tal modelo puede ser enriquecido para considerar el efecto de flexibilidad por corte, de manera similar al modelo de Timoshenko para vigas rectas (Cortínez y Piovan, 2002). Un enfoque Timoshenko-Vlasov para vigas curvas de secciones abiertas de pared delgada o secciones cerradas unicelulares ha sido propuesto en los trabajos de Cortínez et al. (1999, 2001). Recientemente, Dominguez y Cortínez (2018) han desarrollado un modelo generalizado de Timoshenko-Vlasov para vigas de eje curvo construidas con materiales isotrópos o compuestos laminados de secciones arbitrarias (secciones de pared delgada semicerradas, cerradas multicelulares o combinaciones de paredes delgadas con porciones macizas). Tal enfoque permite obtener ecuaciones constitutivas precisas entre resultantes de tensión y deformaciones generalizadas y también fórmulas mejoradas para el cálculo de tensiones de corte y normales (considerando efecto “shear-lag”).

En este trabajo se presenta el modelo desarrollado anteriormente por los autores y se aplica al diseño óptimo de estructuras curvas considerando la dinámica fuera del plano. A modo de ejemplo, se adoptan dos funciones objetivo, la maximización de la frecuencia fundamental de vibración y la minimización de la sección transversal bajo cargas estáticas y dinámicas, sujetas a restricciones geométricas, de resistencia y de desplazamientos máximos.

2 MODELO ESTRUCTURAL

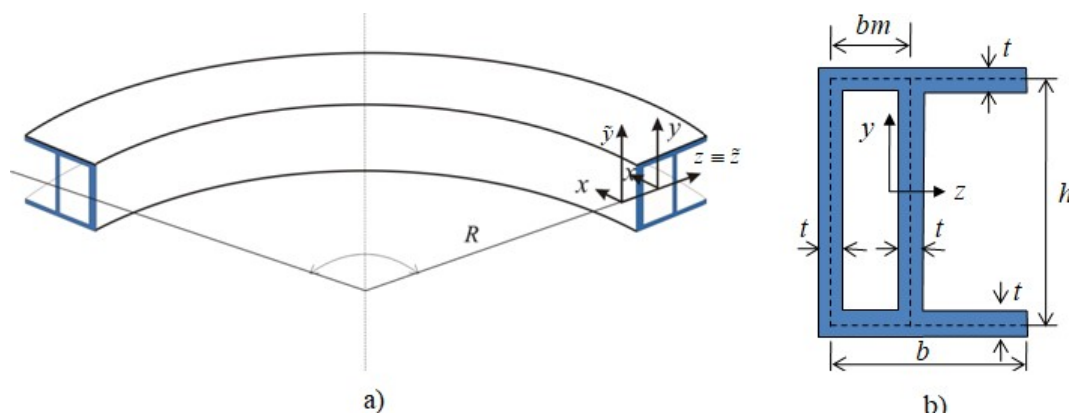


Figura 1: a) Elemento estructural analizado (R : radio al centro de corte de la sección transversal); b) perfil transversal.

Se considera la dinámica del sistema estructural mostrado en la Figura 1a. Se trata de una

viga curva de sección transversal no homogénea de forma arbitraria (pudiendo comprender secciones de pared gruesa o delgada). Para el desarrollo teórico se adopta un sistema doble de referencia: x corresponde al eje longitudinal, y, z son ejes transversales con origen en el centroide elástico de la sección e \tilde{y} y \tilde{z} son ejes transversales con origen en el centro de corte elástico cuyas coordenadas respecto al primer sistema vienen dadas por y_s y z_s . En este trabajo, centroide elástico y centro de corte elástico corresponden a la generalización de los conceptos de centroide y centro de corte para secciones de varios materiales.

La dinámica del sistema estructural analizado puede formularse mediante el principio de Hellinger-Reissner, en el cual las tensiones y los desplazamientos son variacionalmente independientes. Tal formulación puede expresarse de la siguiente manera (Cortínez et al., 1999):

$$\int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w) dV + \int_S (T_x \delta u + T_y \delta v + T_z \delta w) dS = 0 \quad (1)$$

$$\int_V \left(\left(\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E} \right) \delta \sigma_x + \left(\gamma_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{G} \right) \delta \tau_{xy} + \left(\gamma_{xz} - \frac{\tau_{xz}}{G} \right) \delta \tau_{xz} \right) dV = 0 \quad (2)$$

donde $E(x,y)$ y $G(x,y)$ son los coeficientes elásticos, $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ son las componentes nulas de tensiones, ε_x es la deformación longitudinal específica, γ_{xy} y γ_{xz} son las deformaciones cortantes, u, v y w son los desplazamientos en las direcciones x, y, z respectivamente, f_x, f_y, f_z son las componentes de las fuerzas volumétricas (incluidas las fuerzas de inercia) y T_x, T_y, T_z son las componentes del vector de tensión en la superficie. En las expresiones anteriores, se ha utilizado la hipótesis usual de la teoría de vigas: $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. La ecuación (1) constituye el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) mientras que la expresión (2) es una ecuación variacional de compatibilidad para materiales isotropos elásticos. Más adelante se extiende la formulación para materiales compuestos laminados.

2.1 Ecuaciones de movimiento fuera del plano

Para describir la dinámica flexo-torsional fuera del plano de curvatura se adopta el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_x = -v'_s y + \omega \left(\phi' + \frac{v'_s}{R} \right) + \varphi_1; \quad u_y = v_s - \tilde{z} \phi; \quad u_z = \tilde{y} \phi \quad (3)$$

donde $\tilde{y} = y - y_s$, $\tilde{z} = z - z_s$. Si se adopta $\varphi_1 = 0$, la expresión anterior corresponde al campo de desplazamientos fuera de plano de la teoría de vigas curvas de Vlasov (Yang y Kuo, 1986). En (3) v_s corresponde al desplazamiento vertical del centro de corte, ϕ corresponde a la rotación torsional y ω es la función de alabeo torsional de Saint Venant para vigas (rectas) no homogéneas. Su expresión se dará más adelante (ecuación 17).

La función φ_1 permite efectuar una corrección del alabeo seccional a efectos de reproducir de mejor manera posible el comportamiento tridimensional. Una manera de estimar esta función es suponerla proporcional a y y a ω , lo que conduce a la siguiente expresión

mejorada del campo de desplazamientos (Cortínez et al., 1999):

$$u_x = -\theta_z y + \omega\left(\theta + \frac{\theta_z}{R}\right), \quad u_y = v_s - \tilde{z}\phi, \quad u_z = \tilde{y}\phi \quad (4)$$

Debe observarse que si $\theta = \phi'$ y $\theta_z = v_s'$ se recupera la forma de Vlasov. Sin embargo, tales igualdades no se utilizan por lo que este último campo de desplazamientos más general permite la consideración de efectos de deformación por corte asociados a flexión y a alabeo torsional no uniforme. Es útil observar que en el caso particular de la viga recta ($R = \infty$) las expresiones previas corresponden a la teoría de vigas de Timoshenko. Por dicho motivo, la teoría contemplando efectos de corte flexionales y flexo-torsionales puede ser denominada modelo de Timoshenko-Vlasov.

Se sustituyen a continuación las expresiones (4) en las componentes lineales de Green-Lagrange de las deformaciones específicas (en coordenadas cilíndricas) dadas por:

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_z}{R}\right)F, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x}F + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{u_x}{R}\right)F + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad \text{con } F = \frac{R}{R + \tilde{z}} \quad (5)$$

lo que conduce a las siguientes expresiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \left(-\theta'_z y + \frac{\tilde{y}\phi}{R} + \omega\left(\theta' + \frac{\theta'_z}{R}\right)\right)F; \quad \gamma_{xz} = \left(\phi' + \frac{v'_s}{R}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y}\right) - \frac{\partial \omega}{\partial z}\left(\phi' - \theta + \frac{v'_s - \theta_z}{R}\right) \\ \gamma_{xy} = v'_s - \theta_z + \left(\phi' + \frac{v'_s}{R}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z}\right) - \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\phi' - \theta + \frac{v'_s - \theta_z}{R}\right) \end{array} \right. \quad (6)$$

Para llegar a estas expresiones se han despreciado algunos términos pequeños asociados con la variación de curvatura en la sección transversal. Debe observarse en (6) que los términos subrayados están asociados al efecto de torsión de Saint Venant mientras que el resto de los términos que aparecen en las distorsiones corresponden a efectos de corte asociados a la flexión y al alabeo torsional no uniforme (Cortínez et al., 1999; Cortínez y Piovan, 2002). Como se ha discutido en las últimas dos referencias citadas, el efecto de flexibilidad de corte es de enorme importancia en la respuesta dinámica de vigas compuestas. Las expresiones anteriores (4) y (6) pueden ser sustituidas en la expresión de los TV (1) lo que conduce, luego de la aplicación del cálculo variacional, a las ecuaciones diferenciales de movimiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{M_z}{R^2} + \overline{\rho A} \dot{v}_s - \overline{\rho A z_s} \left(\frac{\ddot{v}_s}{R} - \ddot{\phi}\right) - \frac{\overline{\rho I_s}}{R} \ddot{\phi} = 0; \quad \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q_y + \overline{\rho I_z} \ddot{\theta}_z = 0 \\ -\frac{\partial B}{\partial x} - T_w + \overline{\rho C_w} \left(\ddot{\theta} + \frac{1}{R} \ddot{\theta}_z\right) = 0; \quad -\frac{\partial (T_{sv} + T_w)}{\partial x} + \frac{M_z}{R} + \overline{\rho A z_s} \ddot{v}_s + \overline{\rho I_s} \ddot{\phi} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

junto con las siguientes condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_z = -M_{z0} \quad \text{o} \quad \delta\theta_z = 0; \quad Q_y = Q_{y0} \quad \text{o} \quad \delta v = 0 \\ B = B_0 \quad \text{o} \quad \delta\theta = 0; \quad T_{sv} + T_w = T_{sv0} + T_{w0} \quad \text{o} \quad \delta\phi = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

En estas ecuaciones se han utilizado las usuales definiciones de esfuerzos seccionales:

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int_A \sigma_x y dA, & Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA, & B &= \int_A \sigma_x \omega dA, \\
 T_{sv} &= \int_A \left(\tau_{xy} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) \right) dA, & T_w &= - \int_A \left(\tau_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

donde M_z , Q_y , B , T_{sv} y T_w corresponden al momento flector respecto a z , esfuerzo de corte en la dirección y , bimomento, momento torsor de Saint Venant y momento torsor de alabeo respectivamente (el subíndice 0 en estas expresiones aluden a esfuerzos aplicados externamente). Asimismo se han definido las siguientes constantes inerciales:

$$\begin{aligned}
 \overline{\rho A} &= \int_A \frac{\rho}{F} dA, & \overline{\rho A z_s} &= \int_A \frac{\rho z_s}{F} dA, & \overline{\rho C_w} &= \int_A \frac{\rho \omega^2}{F} dA, \\
 \overline{\rho I_s} &= \int_A \frac{\rho (\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2)}{F} dA, & \overline{\rho I_z} &= \int_A \frac{\rho y^2}{F} dA,
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Es de importancia mencionar que el movimiento fuera del plano desacoplado del movimiento en el plano de curvatura, solo puede tener lugar si $y_s=0$. De todas maneras si este valor es pequeño relativo a las dimensiones de la sección, se puede aplicar aproximadamente tal enfoque para considerar los modos predominantemente fuera de plano.

Para completar el sistema de ecuaciones se necesita una relación entre los esfuerzos seccionales (M_z , Q_y , B , T_{sv} y T_w) y los desplazamientos generalizados (v_s , ϕ , θ_z y θ). Una manera de proceder es sustituir las expresiones de deformaciones (6) en la ley de Hooke y el resultado en las expresiones de esfuerzos seccionales (9). Este enfoque directo, sin embargo produciría coeficientes de rigidez muy altos relacionados con el esfuerzo de corte y el momento torsor de alabeo (Cortínez et al., 2016). Esto se comprende de forma adecuada recordando la teoría de vigas rectas de Timoshenko que debe ser corregida mediante la adición de factores de corte para la rigidez del esfuerzo de corte.

Consecuentemente, en la sección que sigue se propone un enfoque mejorado que a la vez permite obtener expresiones precisas del campo tensional.

2.2 Ecuaciones constitutivas para los esfuerzos seccionales

Se considera nuevamente la expresión general de desplazamientos dada por (3). Se pretende obtener una expresión adecuada de la función de alabeo φ_1 que figura en la componente x del vector de desplazamiento. Para ello, se sustituyen las expresiones (3) en las deformaciones específicas dadas por (5) llegando a:

$$\begin{cases}
 \varepsilon_x = \left(-v_s'' y + \frac{\tilde{y}\phi}{R} + \omega \left(\phi'' + \frac{v_s''}{R} \right) \right) F + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} = \left(\phi' + \frac{v_s'}{R} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \gamma_{xz} = \left(\phi' + \frac{v_s'}{R} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}
 \end{cases}
 \tag{11}$$

A partir de estas últimas expresiones pueden determinarse las tensiones empleando la ley de Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (12)$$

A su vez, dicho resultado puede ser expresado en función de los esfuerzos seccionales sustituyendo las expresiones resultantes en la definición de esfuerzos seccionales (9). De estas últimas es posible expresar los desplazamientos generalizados que aparecen en (11) en función de los esfuerzos seccionales. Re inyectando tales expresiones en (11) y el resultado en (12) pueden obtenerse las siguientes expresiones para las tensiones:

$$\sigma_x = \left(\frac{E}{EI_z} M_z y + \frac{E\omega}{EC_w} B \right) F; \quad \tau_{xy} = \frac{GT_{sv}}{GJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + G \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \quad \tau_{xz} = \frac{GT_{sv}}{GJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) + G \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad (13)$$

La expresión de la tensión normal dada en (13) ha sido obtenida despreciando la derivada de φ_1 con respecto a x . Esto es exacto en el caso particular de vigas rectas en voladizo (problema de Saint Venant) sometidas a una carga puntual transversal y es sólo una aproximación en el caso aquí considerado. Para obtener la función de alabeo φ_1 de las expresiones tensionales (13) se requiere la verificación de la ecuación de equilibrio axial de acuerdo a la teoría general de la elasticidad:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{2F}{R} \tau_{xz} = 0 \quad (14)$$

Sustituyendo las expresiones (13) en (14) y teniendo en cuenta las ecuaciones (7) para la situación de equilibrio, es posible observar que para la verificación de tal ecuación la función de alabeo puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\varphi_1 = Q_y \varphi_y + T_w \varphi_w + T_{sv} \varphi_{sv} \quad (15)$$

donde φ_y , φ_w y φ_{sv} verifican:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) + \frac{2GF}{R} \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} &= -\frac{EyF}{EI_z}; \quad \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0; \quad \int_A \varphi_y dA = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial \varphi_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} \right) + \frac{2GF}{R} \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} &= \frac{E\omega F}{EC_w}; \quad \frac{\partial \varphi_w}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0; \quad \int_A \varphi_w dA = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial \varphi_{sv}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial \varphi_{sv}}{\partial z} \right) + \frac{2GF}{R} \frac{\partial \varphi_{sv}}{\partial z} &= -\frac{GF}{RGJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right); \quad \frac{\partial \varphi_{sv}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \int_A \varphi_{sv} dA = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas si además se determina la función de alabeo de torsión pura ω a partir de la solución de la ecuación de Saint Venant:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) \right) = 0; \quad G \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = G(\tilde{z}n_y - \tilde{y}n_z) \quad (17)$$

Una simplificación razonable que puede hacerse en el sistema anterior (16) resulta si se resuelven para el caso de viga recta. De ser así, los términos subrayados en las primeras dos ecuaciones diferenciales (16) deben ser omitidos y la función φ_{sv} se hace idénticamente nula.

Reemplazando las expresiones (6) y (13) (teniendo en cuenta (15)) en (2) se llega a un sistema de ecuaciones que relaciona los esfuerzos seccionales con las deformaciones

generalizadas. Resolviéndolo para los esfuerzos se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{cases} M_z = -\overline{EI}_z \left(\theta'_z - \frac{\phi}{R} \right), & B = \overline{EC}_w \left(\theta' + \frac{\theta'_z}{R} \right), & Q_y = \overline{GA} (v'_s - \theta_z), \\ T_{sv} = \overline{GJ} \left(\phi' + \frac{v'_s}{R} \right), & T_w = \overline{GD} \left(\phi' - \theta + \frac{v'_s - \theta_z}{R} \right) \end{cases} \quad (18)$$

donde:

$$\begin{aligned} \overline{EI}_z &= \int_A E y^2 F dA, & \overline{EC}_w &= \int_A E \omega^2 F dA, & \overline{GJ} &= \int_A G \left(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tilde{y} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA \\ \overline{GD} &= \frac{-\int_A G \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial z} \right) dA}{\int_A G \left(\frac{\partial \varphi_\omega^2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_\omega^2}{\partial z} \right) dA}, & \overline{GA} &= \frac{\int_A G \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dA}{\int_A G \left(\frac{\partial \varphi_y^2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y^2}{\partial z} \right) dA} \end{aligned} \quad (19)$$

Aquí se ha empleado la simplificación aludida en el texto debajo de la ecuación (17). Las rigideces (19) así obtenidas (especialmente \overline{GD} y \overline{GA}) son más precisas que las que se hubieran obtenido mediante la aplicación directa del PTV y de la ley de Hooke.

2.3 Expresiones mejoradas para el campo tensional

Las deducciones anteriores han utilizado la hipótesis de que $\varphi_1 = \varphi_1(y, z)$. Relajando tal hipótesis pueden obtenerse desde (9), (11) y (12) las siguientes expresiones para el cálculo de tensiones en condiciones estáticas y dinámicas.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x &= \left(\frac{E}{EI_z} M_z y + \frac{E \omega}{EC_w} B \right) F + \underline{E \left(Q'_y \varphi_y + T'_w \varphi_w + T'_{sv} \varphi_{sv} \right)} \\ \hat{\tau}_{xy} &= \frac{GT_{sv}}{GJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + G \left(Q_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + T_w \frac{\partial \varphi_w}{\partial y} + T_{sv} \frac{\partial \varphi_{sv}}{\partial y} \right) \\ \hat{\tau}_{xz} &= \frac{GT_{sv}}{GJ} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) + G \left(Q_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + T_w \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} + T_{sv} \frac{\partial \varphi_{sv}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Estas expresiones producen una distribución mejorada de las tensiones en cada sección transversal respecto a la teoría de Vlasov. En particular, se observan los términos subrayados en la expresión de las tensiones normales que permiten obtener el efecto “shear lag”.

Para el caso de vigas laminadas compuestas simétricas balanceadas o especialmente ortótropas el modelo anterior resulta válido (Dominguez et al., 2017) si se utilizan los siguientes módulos elásticos efectivos:

$$E^* = \bar{A}_{11} / t, \quad G^* = \bar{A}_{66} / t \quad (21)$$

donde \bar{A}_{11} y \bar{A}_{66} son constantes elásticas del laminado (Barbero, 1999). En este último caso,

para obtener las tensiones en cada lámina que compone la pared de la sección debe seguirse el procedimiento descrito en [Dominguez et al. \(2017\)](#). Finalmente, se puede verificar la posibilidad de falla del material con alguno de los criterios asociados. En particular en este trabajo se utiliza un indicador de falla basado en el criterio de Tsai-Wu definido de la siguiente manera ([Barbero, 1999](#)):

$$R = f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_{11}^2 + f_{22}\sigma_{22}^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{66}\sigma_{66}^2 + f_{44}\sigma_{44}^2 + f_{55}\sigma_{55}^2 \quad (22)$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_{66}, \sigma_{44}$ y σ_{55} corresponden a las componentes del tensor de tensión de acuerdo a los ejes principales del material. Los coeficientes f_{ij} dependen de las resistencias a tracción y a compresión en las direcciones de las fibras, en la dirección transversal a las mismas, de las resistencias al corte en el plano de la lámina e interlaminares y de un coeficiente de interacción biaxial. La expresión (22) indica falla de la lámina cuando $R \geq 1$.

3 DISEÑO ÓPTIMO

Se pretenden determinar las características geométricas de la sección transversal y la arquitectura de laminación (secuencia de láminas reforzadas en diferentes orientaciones) de una viga con dadas condiciones de borde de manera tal de optimizar una función objetivo (FO) y al mismo tiempo verificar restricciones asociadas con la falla del material y la falla debida a desplazamientos excesivos. Se consideran dos situaciones de diseño: a) minimización del área de la sección transversal y b) maximización de la frecuencia fundamental de vibración.

En el primer caso se pretende minimizar la cantidad de material empleado en una estructura sometida a carga estática y/o dinámica verificando la seguridad respecto a falla del material y desplazamientos excesivos. El problema puede formularse de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \min A(\mathbf{x}) \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{x}^I \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^S, R_{\max}(\mathbf{x}) < 1, \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{\max} \quad (23)$$

donde \mathbf{x} es el vector de variables de diseño siendo \mathbf{x}^I y \mathbf{x}^S las cotas inferiores y superiores de las mismas, R es el indicador de falla dado por la expresión (22) y δ_{\max} es el máximo desplazamiento admisible de la estructura.

En el segundo problema de diseño se pretende maximizar la frecuencia fundamental de vibración f . Tal problema puede expresarse como:

$$\mathbf{x} = \max f(\mathbf{x}) \quad (24)$$

sujeto solo a restricciones geométricas (primera restricción de (23)).

4 SOLUCIÓN COMPUTACIONAL

En este trabajo, en el proceso de optimización (implementado en Matlab), se utiliza el método heurístico de Recocido Simulado ([Cortínez y Dominguez, 2017](#)), mientras que el problema estructural se resuelve, en cada iteración, como se expone a continuación.

Para cada sección que se analiza se obtiene en primer lugar el centroide elástico, el que se tomará como origen del sistema de coordenadas principal de la sección. Para realizar el análisis seccional, se determina primeramente la rigidez \overline{EI}_z (19) y luego, se obtiene la función de alabeo φ_y mediante la solución de la ecuación (16). Las coordenadas del centro de corte elástico (y_s, z_s) pueden ser entonces determinadas como se explica en [Cortínez y Dominguez \(2017\)](#). Seguidamente, se obtiene la función de alabeo de Saint Venant de la

solución de la ecuación (17), con la cual pueden determinarse $\overline{EC_w}$ y \overline{GJ} mediante (19) y luego la función de alabeo torsional secundario φ_w mediante la resolución de la correspondiente ecuación (16). A continuación se obtienen las rigideces seccionales \overline{GA} y \overline{GD} mediante las expresiones (19). En el análisis estático o de vibración forzada, para obtener los desplazamientos generalizados se deben introducir las expresiones (18) en las (7-8) y resolver las ecuaciones gobernantes unidimensionales así obtenidas. Finalmente, los desplazamientos pueden obtenerse a partir de (3) y las tensiones a partir de (20). Para materiales compuestos las tensiones en cada lámina y la falla estructural pueden determinarse a partir de los desplazamientos generalizados como se explica en Dominguez et al. (2017). Como puede apreciarse, el modelo estructural requiere la resolución de cuatro problemas de contorno bidimensionales (16 y 17) y cuatro ecuaciones de movimiento acopladas unidimensionales (7 y 8). Todos estos problemas se resuelven mediante el método de los Elementos Finitos implementado en el programa FlexPDE® (2016).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se describen los ejemplos referidos a los problemas de diseño previamente enunciados. La sección analizada es la que se muestra en la Figura 1b. En todos los casos se utilizó un laminado $[0_\alpha/90_\beta/\pm 45_\gamma]_s$ de grafito-epoxi (AS4/3501-6) con las siguientes características: $\rho = 1580 N/m^3$, $\nu_{12} = 0,27$, $E_1 = 142 GPa$, $E_2 = 10,2 GPa$, $G_{12} = 7,2 GPa$, $G_{13} = G_{12}$, $G_{23} = 3,45 GPa$, $F_{1t} = 1830 MPa$, $F_{2t} = 57 MPa$, $F_{1c} = 1096 MPa$, $F_{2c} = 228 MPa$, $F_6 = 71 MPa$, $F_4 = 57 MPa$, $F_5 = 57 MPa$. α , β y γ corresponden a la razón del espesor de cada capa con respecto al espesor total de la lámina adoptándose en los ejemplos presentados $\alpha = \beta$. Durante el proceso de optimización se aplicaron las siguientes restricciones: desplazamiento $\delta < L/250$, cotas de las variables de diseño (m): $0,35 \leq h \leq 0,7$; $h/4 \leq b \leq h$; $0,02 \leq t \leq 0,05$; $b/4 \leq bm \leq 3b/4$ y $0,3 \leq \alpha \leq 0,7$. En los dos casos presentados se trabajó con una viga empotrada ($v_s = w_s = \phi = \theta_z = 0$) -articulada ($v_s = B = M_z = T_{sv} + T_w = 0$) y empotrada-empotrada de una longitud $L=6$ m y radio de curvatura $R=L$. En el caso de vibración forzada se consideró el peso propio de la viga y una carga $p_y = -5E3/b + 5E3/b \cos(94,25t)$ distribuida sobre la cara superior a lo largo de toda la longitud. Las dimensiones óptimas obtenidas en los casos 1 y 2 para ambos tipos de vinculación pueden verse en la Tabla 1.

Viga		h (m)	b (m)	t (m)	bm (m)	t_{0-90} (m)	$t_{\pm 45}$ (m)	Área (m ²)	v (m)	R	f (Hz)
E-A	Caso 1	0,49	0,24	2,0E-2	0,17	3,0E-3	2,0E-3	2,92E-2	0,22E-2	1,24E-2	60,5
	Caso 2	0,67	0,43	4,7E-2	0,32	7,05E-3	4,7E-3	10,34E-2	---	---	82,6
A-A	Caso 1	0,56	0,45	2,0E-2	0,32	3,0E-3	2,0E-3	4,04E-2	0,34E-2	1,86E-2	42,2
	Caso 2	0,69	0,47	4,0E-2	0,33	6,0E-3	4,0E-3	9,28E-2	---	---	48,7

Tabla 1: valores óptimos para una viga E-A y A-A.

6 CONCLUSIONES

Se ha presentado un enfoque teórico y computacional para el diseño óptimo de las dimensiones seccionales y la arquitectura de laminación de vigas curvas de sección

arbitraria (sólidas, de paredes delgadas multicelda, etc.). El modelo estructural es una versión mejorada de la teoría de Timoshenko-Vlasov que permite obtener apropiadamente la rigidez seccional asociada al efecto de corte. El diseño óptimo se realiza a partir de la combinación del método de Elementos Finitos para resolver el problema estructural en combinación con el método de optimización de Recocido Simulado. Se han dado algunos ejemplos para ilustrar las posibilidades de la metodología presentada.

Cabe acotar que para que el movimiento fuera del plano se desacople del movimiento plano, la sección transversal debe ser simétrica con respecto al plano de curvatura (al menos aproximadamente). En futuros trabajos se extenderá el modelo para contemplar la dinámica acoplada en y fuera del plano para secciones completamente arbitrarias.

Agradecimientos

El presente trabajo es parte del proyecto “Mecánica estructural no lineal: diseño óptimo e identificación de fallas estructurales” (Secyt, Universidad Tecnológica Nacional) y del proyecto “Problemas de optimización en Ingeniería Civil. Parte II” (Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur).

REFERENCIAS

- Barbero, E.J. *Introduction to Composite Material Design*, London: Taylor & Francis Inc, 1999.
- Cortínez, V.H., Piovan, M.T y Rossi, R.E. Out-of-Plane Vibrations of Thin-Walled Curved Beams considering Shear Flexibility. *Struct. Engineering and Mechanics* 8, 257-272, 1999.
- Cortínez, V. H., Piovan, M. T y Machado, S. DQM for Vibration Analysis of Composite Thin-Walled Curved Beams. *Journal of Sound and Vibration* 246, 551- 555, 2001.
- Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701–723, 2002.
- Cortínez, V.H., Dominguez, P.N y Bender, N.G. Una generalización del modelo Timoshenko-Vlasov para el análisis dinámico de vigas no homogéneas. *Mecánica Computacional* Vol. XXXIV, 1327-1346, 2016.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P. N. Optimización y Pandeo de Vigas Compuestas Laminadas de Sección Arbitraria. *Mecánica Computacional* Vol. XXXV, 517-533, 2017.
- Dominguez, P. N., Cortínez, V. H y Bender, N. G. Un modelo Timoshenko-Vlasov para vigas PRF de sección arbitraria, 225-228, *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, MACI 6, 225-228, ISSN 2314-3282, 2017.
- Dominguez, P. N. y Cortínez, V. H. Un modelo estructural Timoshenko-Vlasov para vigas curvas de sección arbitraria construidas con materiales laminados. 25 Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural. Resistencia, Chaco, 2018.
- FlexPDE[®], PDE Solutions Inc. www.pdesolutions.com, 2015.
- Kang, K., Bert, C. W. y Striz, A. G. Vibration of Horizontally Curved Beams with warping using DQM. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 122, 657-662, 1996.
- Nam-II, Kim y Moon-Young, Kim. Thin-Walled Curved Beam Theory Based on Centroid-Shear Center Formulation. *Journal of Mechanical Science and Technology* 19 (2), 589-604, 2005.
- Sapountzakis, E. J. y Tsipsis, I. N. Generalized Warping Analysis of curved Beams by Isogeometric Methods. *Eighth International Conference on Advances in Steel Structures*, Lisboa, Portugal, July 22-24, 2015.
- Yang, Y. B. y Kuo, S. R. Static Stability of Curved Thin-Walled Beams. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 112, 821-841, 1986.