

INSTRUMENTACION DE REFINAMIENTO ADAPTATIVO DE MALLAS EN MODELOS PARA ANALISIS POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

V. Fares¹, E. Martel² y R. Lorefice¹

¹CMAE – Centro de Mecánica Aplicada y Estructuras
(IMEC-UNSE) - Santiago del Estero, Argentina (vfares@unse.edu.ar)

²CEMNCI – Centro de Métodos Numéricos y Computacionales
en Ingeniería – UNT, Tucumán, Argentina (emartel@herrera.unt.edu.ar)

Palabras Claves: refinamiento de mallas – técnicas adaptativas – estimadores de error a posteriori

Resumen.

A pesar del gran desarrollo que han experimentado los métodos de cálculo por elementos finitos, no existe un uso generalizado de las técnicas de estimación de error para conocer el grado de precisión obtenida en un cálculo. Por ello, en muchos casos, el calculista no conoce si la malla utilizada para un cierto análisis ha sido suficientemente adecuada para proporcionar resultados con la precisión requerida. Esto se consigue mediante técnicas para mejorar una misma malla o mediante remallado, es decir construyendo otra malla totalmente nueva para conseguir resultados con un error de discretización menor al fijado de antemano.

En este trabajo se describen los procedimientos mas usados para refinamiento adaptativo, se desarrollan los pasos para su instrumentación y se destacan las ventajas comparativas y su campo de aplicación.

El proceso comienza con el cálculo del estimador de error por medio de la norma energética asociada a una malla grosera inicial. Esta malla se mejora mediante un progresivo refinamiento tipo “h” guiado por los valores elementales obtenidos para el estimador del error. Debido a que se desconoce la solución exacta del problema, el proceso finaliza una vez que el error resultante alcanza un porcentaje predeterminado de la energía de deformación del campo suavizado. La visualización de este proceso de refinamiento se obtiene mediante una secuencia de mallas generadas para cada ejecución del cálculo. Con el propósito de una comparación de los resultados se instrumentan dos criterios ampliamente usados: el propuesto por Zienkiewicz – Zhu y el desarrollado por Bugeda – Oñate.

1. INTRODUCCION

El análisis de sistemas continuos requiere la formulación de ecuaciones diferenciales que deben satisfacer condiciones de contorno e iniciales en el dominio del problema. Para resolver estas ecuaciones en problemas reales, se debe, en general, aplicar procedimientos numéricos. La flexibilidad del método de elementos finitos (MEF) y la creciente capacidad de calculo de las computadoras hace que en la actualidad sea el mas usado para resolver problemas en todos los campos de la mecánica, tales como estructuras, problemas de fluidos, termodinámica, electromagnetismo, etc.

La solución aproximada de un problema dado contempla la definición de un modelo matemático para representar al problema físico, la discretización del dominio, el empleo de una aproximación a la solución vía MEF, la solución numérica del sistema de ecuaciones resultantes, y finalmente, el análisis e interpretación de los resultados. La calidad de estos resultados depende de la correcta formulación del método mediante algoritmos en permanente optimización y de una adecuada concepción del modelo discreto, tarea en la que juega un papel fundamental la experiencia del analista. Debido a la incertidumbre para establecer el grado de validez de estos resultados, es que ha surgido principalmente durante las tres últimas décadas, un creciente interés en el desarrollo de métodos de estimación a posteriori del error de discretización.

A pesar del gran desarrollo que han experimentado los métodos de cálculo por elementos finitos, no existe un uso generalizado de las técnicas de estimación de error para conocer el grado de precisión obtenida en un cálculo. Por ello, en muchos casos, el calculista no conoce si la malla utilizada para un cierto cálculo ha sido suficientemente adecuada para proporcionar unos resultados con la precisión requerida. Tampoco son de uso generalizado las técnicas de refinamiento o de remallado tendientes a proporcionar resultados con la precisión predeterminada, a base de realizar mejoras sobre las mallas utilizadas. Hasta hace pocos años, la generación de las mallas de elementos finitos utilizadas en los cálculos se basaba en la intuición y en la experiencia previa del ingeniero calculista, pero sin la utilización de criterios objetivos que faciliten dicha labor. En este sentido, cabe destacar que existen diversas técnicas para resolver el problema de la estimación y la corrección del error. De hecho, la mayoría de los avances que se han realizado recientemente dentro del campo de los elementos finitos se pueden entender como formas distintas de minimizar el error existente en las soluciones.

2. ANALISIS DEL ERROR - PROBLEMA ELASTICO LINEAL

Las ecuaciones de equilibrio que se emplean dentro del campo de la mecánica de estructuras son siempre ecuaciones diferenciales de segundo orden. Ejemplos clásicos de ecuaciones de este tipo son las ecuaciones de Laplace, Poisson o Navier. (Crisfield, M. A., *F.E. and Sol. Proc., VI:L.Analysis.* - Pin.Press, Sw. 1986) (Irons B. et al - *T.of F.E.* - E.H. Series in E. S., J.W. & S. -1980)

Las ecuaciones que gobiernan el correspondiente problema de contorno son:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu - q = 0 \quad \text{en } \Omega \\ Mu - t = 0 \quad \text{en } \Gamma_N \\ u = \underline{u} \quad \text{en } \Gamma_D \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación en el Dominio.} \\ \text{Condic. de Contorno de Neuman y Dirichlet} \end{array} \quad (1)$$

Donde L es un operador diferencial elíptico de segundo orden, u es la solución que se trata de aproximar y q el término de fuerzas, el cual no depende de u . Las dos últimas ecuaciones representan las condiciones de contorno. El contorno Γ del dominio Ω se considera dividido en dos partes $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ donde se especifican condiciones de Dirichlet y Neuman respectivamente. Debe ocurrir que $\Gamma_D \neq 0$ para que la solución sea única.

Denotamos con u_h una aproximación a la solución exacta u obtenida mediante el MEF. Si designamos con \underline{u}, N los vectores desplazamientos nodales y funciones de forma

respectivamente, se verifica:
$$u_h = N \cdot \underline{u} \equiv \sum_{i=1}^n N_i \cdot \underline{u}_i \quad (2)$$

El hecho de que u_h sea una aproximación y no una solución exacta a las ecuaciones (1) hace que si se sustituye en las (1) aparezcan unos residuos r_Ω y r_Γ .

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cdot u_h - q = r_\Omega \\ M \cdot u_h - t = r_\Gamma \end{array} \right. \quad (3)$$

Como se verá mas adelante, estos residuos proporcionan estimaciones sobre el error local y global en una solución y sobre la mejor manera de reducirlo.

Consideremos el problema lineal:
$$L \cdot u = S^T \cdot D \cdot S \cdot u = q \quad (4)$$

en el dominio Ω con las condiciones de contorno en desplazamiento: $u = \hat{u}$ sobre el contorno Γ_D y tensión prescrita: $D \cdot S \cdot u \cdot \underline{n} = \underline{t}$ (\underline{n} normal unitaria) en el contorno Γ_N

Así planteado es aplicable al caso de elasticidad en el que u es el vector desplazamientos.

El operador diferencial S define la deformación
$$\varepsilon_h = S \cdot u_h \quad (5)$$

La matriz elástica o de Hooke D define el esfuerzo como:
$$\sigma_h = D \cdot S \cdot u_h \quad (6)$$

Si se obtienen las ecuaciones de aproximación mediante el método de Galerkin (Zienkiewicz, Taylor- *El M.de los E.F.* Mc Graw Hill, 1994), el problema (1) se expresa como:

$$K \cdot \underline{u} - f = 0 \quad (7)$$

donde:

$$K = \int_{\Omega} N^T \cdot D \cdot B \cdot d\Omega \quad \text{con} \quad B = S \cdot N; \quad f = \int_{\Omega} N^T \cdot q \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} N^T \cdot \underline{t} \cdot d\Gamma \quad (8)$$

y los esfuerzos se calcularán como: $\sigma_h = D \cdot B \cdot u$

La solución aproximada u_h, σ_h difiere de los valores exactos u, σ , y su diferencia es el error de la solución.

$$\text{Para desplazamientos:} \quad e = u - u_h \quad (9)$$

$$\text{Para deformaciones y esfuerzos:} \quad e_{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_h \quad ; \quad e_{\sigma} = \sigma - \sigma_h \quad (10)$$

5. NORMAS DE MEDICION DEL ERROR

La resolución de un problema de contorno mediante el método de los elementos finitos (MEF) consiste fundamentalmente en una minimización de algún tipo de “energía”, es decir, una solución obtenida por el MEF es óptima en un sentido “energético”. En el caso de problemas de elasticidad esta “energía” coincide con la energía real que constituye el funcional a minimizar. En este trabajo se utiliza la norma energética $\|e\|$ como base del análisis del error ya que es la norma “natural” a considerar. Para definir el error en la energía se debe definir primero el error asociado a la solución aproximada u_h , con la expresión (9)

Las expresiones (9),(10) son de poca aplicación práctica, ya que además de ser difíciles de estimar, ofrecen en ocasiones informaciones confusas y la visualización de los campos de error así generados no es clara. Por ejemplo, bajo cargas puntuales, los errores tanto en desplazamiento como en tensiones pueden ser localmente infinitos, pero las soluciones globales pueden ser muy aceptables. Casos similares pueden darse en puntos como entalles o esquinas donde existen singularidades en las tensiones y fuertes concentraciones y gradientes de las mismas. Por tales motivos lo usual es definir medidas integrales o normas, de las cuales la **norma energética del error** es la más usada como ya se indicó, cuyo cálculo constituye un producto escalar energético de la forma: (Zienkiewicz O.C. et al – *Adap.Ref. Error Estim., Multigrid Sol., and Hier. J.W. & Sons. 1986*). (Zienkiewicz O.C., et al. – *H. F.E. App, E. Est. and Adaptive Refinement.* – Acad. Press 1982).

$$\langle a, b \rangle = \int_{\Omega} a^T L b d\Omega \quad (11)$$

La llamada “energía” del error o norma energética del error vendrá dada por:

$$\|e\|^2 = \langle e, e \rangle = \int_{\Omega} e^T L e d\Omega \quad (12)$$

Si e, D y S son respectivamente: el error en desplazamientos, la matriz elástica y el operador diferencial que define las deformaciones, para el caso de elasticidad lineal es:

$$\|e\|^2 = \langle e, e \rangle = \int_{\Omega} e^T S^T D S e d\Omega \quad (13)$$

Esta norma se puede relacionar con los residuos r_Ω, r_Γ definidos en (3), usando las (9):

$$\begin{aligned} Lu - q &= 0 ; Lu_h - q = r_\Omega \Rightarrow Lu_h = r_\Omega + q \\ e = u - u_h &\Rightarrow Le = Lu - Lu_h = q - r_\Omega - q; \Rightarrow Le = -r_\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

De la misma manera, usando la parte definida en el contorno de las ecuaciones (3), se tiene en Γ_N :

$$\begin{aligned} Me &= Mu - Mu_h \\ &= t - (r_\Gamma + t) \\ &= -r_\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

De las (13) y (14) se puede concluir que:

$$\|e\|^2 = -\int_{\Omega} e^T r_\Omega d\Omega \quad (16)$$

De esta manera se puede identificar la energía del error (cuadrado de la norma) como un producto interno de los residuos no equilibrados, debido al error e existente en la solución.

Además, se puede demostrar que para el caso $\Gamma_N = 0$ esta norma energética del error (**energía del error**) coincide con la diferencia existente entre la energía de las soluciones exacta y aproximada (**diferencia en la energía**). $\|e\|^2 = \|u\|^2 - \|u_h\|^2$

Desde el punto de vista ingenieril la norma energética no es completamente satisfactoria. Un ingeniero preferiría tener una estimación del error en cada punto del dominio, tanto para las variables principales (desplazamientos), como para sus derivadas (tensiones) que en definitiva son las variables sobre las que se basa el diseño de estructuras. No obstante, no hay que olvidar que el método de los elementos finitos es un método global de aproximación y que por lo tanto la convergencia local de sus resultados está supeditada a una convergencia global de los mismos.

Todas las normas del error definidas anteriormente pueden calcularse tanto para todo el dominio como elemento a elemento, por ejemplo la norma del error de las deformaciones de un elemento e :

$$\|e\|^{(e)} = \left(\int_{\Omega^e} e_\varepsilon^T \cdot D \cdot e_\varepsilon \cdot d\Omega \right)^{1/2} \quad (17)$$

y de las tensiones:

$$\|e\|^{(e)} = \left(\int_{\Omega^e} (\sigma^* - \sigma_h) \cdot D^{-1} \cdot (\sigma^* - \sigma_h) \cdot d\Omega \right)^{1/2} \quad (18)$$

y se cumple:

$$\|e\|^2 = \sum_{e=1}^n \left(\|e^{(e)}\|^2 \right) \quad (19)$$

en donde σ^* son las tensiones suavizadas, “ n ” es el número de elementos de la malla y Ω^e el dominio elemental. La (19) es una sumatoria de las energías elementales pues **solo el cuadrado de la norma es aditivo**.

La norma energética del error en deformación y esfuerzos será para el dominio Ω :

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e_{\varepsilon}^T \cdot D \cdot e_{\varepsilon} \cdot d\Omega \right)^{1/2} \quad (20)$$

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e_{\sigma}^T \cdot D^{-1} \cdot e_{\sigma} \cdot d\Omega \right)^{1/2} \quad (21)$$

6. ESTIMADORES E INDICADORES DE ERROR

Al obtener una solución mediante el MEF es conveniente conocer no solo la magnitud del error asociado a la misma sino también la forma más eficaz de mejorarla en caso de que no sea satisfactorio. Por ello existen dos tipos de información: los indicadores y los estimadores del error.

Un **indicador** de error proporciona información sobre **dónde** refinar una cierta malla, mientras que un **estimador** de error **da una aproximación a la medida del error global** existente en un determinado elemento o región.

La utilización de indicadores de error es básica para realizar refinamientos jerárquicos (Zienkiewicz et al – *Hiera. F.E.A. Error Est. and Adap.Ref.* –Ed. Whiteman, Academic Press 1982). a partir de una malla inicial pues su información permite escoger cuales son los grados de libertad que añadidos a la misma permiten mejorar la solución de la forma más económica hasta llegar a un nivel de precisión dado.

La necesidad de estos indicadores viene dada por el hecho de que los estimadores de error proporcionan información acerca del error existente en una solución, pero no sobre la forma de disminuirlo. Es por ello que la utilización de los indicadores de error es necesaria para los procesos de refinamiento jerárquico.

En este trabajo la estrategia utilizada es de remallado, por lo tanto se precisa información acerca del error existente sobre cada elemento. Teniendo en cuenta que se dispone de un estimador de error que proporcione esta información, no es necesaria la utilización de un indicador de error.

7. ESTIMADORES DE ZIENKIEWICZ Y ZHU

Para obtener resultados aceptables en cualquier punto de la malla se suele hacer un promediado o alisado de las tensiones de manera que el campo resultante σ^* se interpola con las mismas funciones de forma que los desplazamientos.

Para una malla con n nodos se define

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \underline{\sigma}_i^* = \underline{N}^T \cdot \underline{\sigma}^* \equiv [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n] \bullet \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_1^* \ \dots \ \dots \\ \underline{\sigma}_2^* \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_n^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

donde $\underline{\sigma}_i^*$ son las tensiones alisadas nodales correspondientes al nodo i-esimo, \underline{N} es un vector columna formado por las n funciones de forma correspondientes a cada uno de los nodos utilizados y $\underline{\sigma}^*$ es una matriz en la cual la fila i-esima esta formada por las tensiones alisadas nodales $\underline{\sigma}_i^*$. La cantidad de columnas de esta matriz depende del tipo de estado de tensiones considerado; por ejemplo serán 3 para estado plano de tensiones y 4 para estado plano de deformaciones. (Zienkiewicz, et al - *A Simple error est. and adap. Proc. for prac eng. analysis.* – Int. Journal for N. Method in Eng. V.24 - 1987). Zienkiewicz y Zhu utilizan estas tensiones alisadas para construir con ellas un estimador de error.

Es razonable suponer que las tensiones alisadas σ^* son una mejor aproximación a la solución exacta del problema que las σ_h obtenidas directamente a partir de los desplazamientos. Hay dos razones que avalan esta hipótesis:

- En el proceso de alisado se eliminan las discontinuidades del campo de tensiones que existen en las caras de contacto entre elementos. Dado que la solución exacta se espera que sea continua, es razonable suponer que el campo de tensiones alisado es más cercano a aquella.
- Además, mediante el alisado se consigue una distribución de tensiones mas uniforme dentro del dominio, de forma que la evaluación de dichas tensiones es posible en cualquier punto con buenos resultados. Ello no es posible en el campo de tensiones inicial donde estas solo pueden evaluarse correctamente en los puntos de integración utilizados. Por ello puede decirse que el campo de tensiones alisadas tiene un nivel más alto de precisión.

Los experimentos numéricos confirman, efectivamente, la obtención de mejores resultados en tensiones después de un proceso de alisado.

En virtud del comentario anterior, se puede estimar el error en tensiones como:

$$e_\sigma \approx \sigma^* - \sigma_h \quad (23)$$

y estimar la norma energética del error mediante:

$$\|e\|^2 \approx \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T \cdot D^{-1} \cdot (\sigma^* - \sigma_h) \cdot d\Omega \quad (24)$$

La expresión anterior es la que proponen Zienkiewicz y Zhu (Zienkiewicz, et al - *A Simple error est. and adap. Proc. for prac eng. analysis.* – Int. J. for N. M. in Eng. V.24 - 1987) como estimador del error. Es fácil ver que la integral anterior se puede realizar sobre cada elemento obteniendo así un valor local del error para cada uno de ellos.

La aproximación (23) converge hacia un valor nulo a medida que se va refinando la malla y que ambos campos de tensiones se acercan cada vez más a la solución exacta del problema. Por ello el estimador tenderá también a producir valores más correctos durante dicho proceso.

8. DEFINICION DEL REMALLADO

La estrategia de remallado dependerá del tipo de criterio que se utilice para decidir cuando unos resultados son suficientemente exactos. Básicamente, lo que se pretende es que a partir de los resultados obtenidos con cierta malla, y la estimación de su error, determinar cual debería ser el tamaño de cada elemento para obtener una malla que produjese resultados con un nivel de error acotado a un cierto valor y que además fuese “óptimo” según un determinado criterio.

Una forma muy usual de limitar la norma energética del error consiste en fijar un cierto porcentaje γ de la energía total de deformación. En el programa esta energía se obtiene como el cuadrado de la norma energética del campo de desplazamientos expresada en función de las tensiones suavizadas como:

$$\|U\|^2 = \int_{\Omega} \sigma^{*T} \cdot D^{-1} \cdot \sigma^* \cdot d\Omega \quad (25)$$

Para la explicación del proceso de definición del remallado se tomará directamente la norma, entonces:

$$\|E^r\| \leq \frac{\gamma}{100} \|U\| \quad (26)$$

a partir de esta expresión se define el parámetro de error global:

$$\xi_g = \frac{\|E\|}{\|U\| \cdot \frac{\gamma}{100}} \quad (27)$$

Para que se verifique la (26), debe ocurrir que $\xi_g \leq 1$ y en este caso se satisface el criterio de error global. Mientras que si $\xi_g > 1$ se requieren mas refinamientos.

Además de esta condición, se considera que la distribución de elementos en la malla debe satisfacer una condición local adicional que puede ser expresada como: $\|E\|_e = \|E^r\|_e$ donde $\|E\|_e$ es el error “real” en el elemento “e” y $\|E^r\|_e$ es el error “requerido” en ese elemento.

El parámetro de error local se define de manera similar al parámetro de error global mediante la relación

$$\bar{\xi}_e = \frac{\|E\|_e}{\|E^r\|_e} \quad (28)$$

Las condiciones (27) y (28) se deben satisfacer en forma simultanea, por lo tanto se define el parámetro de error elemental como:

$$\xi_e = \xi_g \cdot \bar{\xi}_e \quad (29)$$

La forma en que se pretende que se distribuya el error sobre todos los elementos de la malla depende del criterio de optimalidad que se utilice para considerar que una malla es óptima. Existen dos criterios diferentes que se describen mas adelante, los que se han instrumentado en el programa, con el propósito de comparar los resultados.

A partir del criterio utilizado y del valor de γ elegido se puede averiguar cual debería ser el valor del error obtenido sobre cada uno de los elementos “e” de la malla. La forma de obtener este valor se explicará al describir los criterios de optimalidad. Este valor se podrá expresar también como un cierto porcentaje γ_e para cada elemento. Si se denota como ya se indicó $\|E^r\|_e$ a la norma del error requerida para cada elemento, entonces se puede expresar:

$$\|E^r\|_e = \frac{\gamma_e}{100} \|U\|_e \quad (30)$$

A partir de la expresión que corresponde al estimador a priori de Babuška (Babuška et al – *Error est. for the comb. h y p vers. of finite element method.* –N. Math., V 25 - 1981), se puede ver que si el orden p de los polinomios usados en las funciones de forma se mantiene constante, la dependencia del error respecto al tamaño de los elementos se puede aproximar por:

$$\|e\| \leq C \cdot h^p \quad (31)$$

Si en la zona ocupada por un cierto elemento de tamaño h_e el error energético calculado vale $\|E\|_e$, a partir de la (31) se puede ver que el tamaño h que en esta zona debería tener la malla de elementos finitos para obtener un error de valor $\gamma_e \|U\|_e / 100$ vendrá dado por la expresión:

$$h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/p}} \text{ donde:} \quad (32)$$

$$\xi_e = \frac{\|E\|_e}{\|E^r\|_e} = \frac{100 \|E\|_e}{\gamma_e \|U\|_e} \quad (33)$$

efectivamente, usando la (31): $\frac{\|E^r\|_e}{\|E\|_e} = \frac{h^p}{h_e^p} \Rightarrow \xi_e = \frac{h_e^p}{h^p} \Rightarrow h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/p}}$

En caso de que se utilice una norma del error distinta de la energética, la ley de evolución del error respecto del tamaño de elemento que se toma es la misma que en la (31). Aunque esta expresión está justificada únicamente para el caso de la norma energética, parece que su utilización con otras normas es satisfactoria.

La expresión (32) es válida para elementos que no estén en contacto con una singularidad. Para mejorar el remallado en zonas donde existen puntos singulares, (Zienkiewicz (Zhu J.Z. et al – *Adap. Tech. in F.E.M.- Comm.in App.Num Meth. V.4 1998*) (Zienkiewicz, Zhu and Gong – *Eff. and Prac. h-p-version adap. Anal. Proc.s for the finite element method.* – Int. Journal for N. M. in E. V.28 - 1989) propone sustituir, para los elementos en contacto con singularidades, la expresión (32) por:

$$h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/\lambda}} \quad (34)$$

donde el valor de λ depende del tipo de singularidad con la que se esté tratando. Por razones de tipo práctico se suele tomar $\lambda = 0.5$ ya que en la mayoría de los casos este valor oscila entre 0.5 y 1.

Mediante las expresiones (32) y (34) se puede estimar cuales deberían ser los tamaños de cada elemento para que la malla fuese óptima. Utilizando esta información es posible generar una malla completamente nueva que cumpla estos requerimientos y para ello es necesario utilizar un generador de mallas que tenga capacidad de controlar el tamaño de cada elemento generado.

9. CRITERIOS DE OPTIMALIDAD DE LA MALLA

a) Criterio de Igual distribución del error global

El criterio de optimalidad más comúnmente usado se denomina de **igual distribución del error global** y considera que una malla es óptima cuando la norma del error es la misma para todos los elementos. Es decir, en el caso más usual en que se utilice la norma energética del error, una malla será óptima, para un cierto nivel de error, cuando ocurra que $\|E\|_e$ sea igual para todos los elementos. Este criterio es el que proponen Zienkiewicz-Zhu (Zienkiewicz, et al - A Simple error est. and adap. Proc. for prac eng. analysis. – Int. J. for N. M. in Eng. V.24 - 1987). Para una malla formada por n elementos que cumpla el anterior criterio de optimalidad se verificará, en virtud de la propiedad aditiva de las integrales extendidas sobre subdominios, que:

$$\|E\|^2 = \sum_{e=1}^n \|E\|_e^2 = n \|E\|_e^2 \quad (35)$$

Por lo tanto para este criterio de optimalidad el error elemental requerido se calcula con la siguiente expresión:

$$\|E^r\|_e = \frac{\|E\|}{\sqrt{n}} \quad (36)$$

Combinando las expresiones (28) y (36) se obtiene:

$$\xi_e = \frac{\|E\|_e}{\|E\|} \cdot \sqrt{n} \quad (37)$$

El nuevo tamaño de cada elemento “ h ”, calculado a partir de sus tamaños en la malla actual, “ h_e ” se determina en el programa con la expresión propuesta por Bugeda - Oñate (Bugeda G. –Util. de téc. de estim. de error y gen. aut. de mallas. Tesis Doctoral. Univ. Polit. de Cataluña 1990) (Oñate E., Bugeda G. –A study of mesh opt. criteria in adap. f.e.a. Eng.Comp.1993):

$$h = \frac{h_e}{\beta_e} \quad \text{con} \quad \beta_e = \xi_g^p \cdot \xi_e^{\frac{2}{2p+d}} \quad (38)$$

Donde p es el grado de los polinomios de las funciones de forma y d es el número de dimensiones espaciales. La expresión de β_e tiene en cuenta las distintas razones de convergencia de cada elemento y las normas del error globales. En las referencias (Zienkiewicz, Taylor- *El M.de los E.F.* Mc Graw Hill, 1994) (Zienkiewicz, Morgan - *The F.E.M.. Fourth Ed. V.1*, Mc Graw Hill, 1989) otros autores proponen expresiones alternativas para la obtención de la distribución de tamaños elementales en la nueva malla, usando diferentes argumentos. Según la experiencia de Bugada – Oñate, la (38) siempre converge a la malla óptima requerida, mas allá de que alguna de las expresiones propuestas en (Li LY, Bettess P. – *Adap. F.e.m.: A review App. Mech. Rev.* 1997) (Li LY, Bettess et al. – *Theor. Formul. for adaptive f.e. comp.* – Commun. in Num. M. in Eng. 1995) puedan aportar resultados igualmente satisfactorios.

Normalmente se acepta que dado un determinado nivel de error global, como el definido por la (26), de todas las posibles mallas que produzcan resultados con ese nivel de error la que cumpla el criterio de optimalidad comentado *es la que estará formada por un número menor de elementos*. Es decir, esa malla será óptima en el sentido de que producirá un cierto nivel exigido de error a un costo mínimo.

No existe hasta el momento una demostración sólida para la afirmación anterior, pero si hay diversas justificaciones para casos particulares que indican que la misma es razonable. Una justificación interesante de esta idea realizada por Babuška y Rheinboldt puede verse en (Babuška I. et al. – *A Posteriori Error Estimate for the F.E.M.* – Int. Jou. for N.M. in Eng. V.12. 1978) (Babuška I. et al. - *Reliable Error Estim. and Mesh Adaption for the F.E.M.* – Comp. Methods in Nonlinear Mechanics Ed. J.T.Oden 1980).

Por otra parte uno de los problemas relacionados con la utilización de este criterio es que produce mallas en las cuales el error en la energía de deformación es el mismo para todos los elementos. Normalmente el interés del ingeniero se centra principalmente en las zonas donde se producen concentraciones de tensiones e incluso puntos singulares, ya que es ahí donde se producirán las máximas tensiones que son las que debe comprobarse que estén por debajo de un determinado límite. Por otro lado es en esas zonas donde, debido a las variaciones bruscas de tensión (mayores gradientes), serán necesarias mayores densidades de elementos para acotar el error cometido. Dado que en esas zonas se localizarán más elementos que en el resto y que el error que se produce en cada uno de ellos será el mismo entonces se tendrá con este criterio, una acumulación del error en estas zonas con mayor densidad de elementos. En vista de lo anterior resulta que el error se concentra, aunque de una forma controlada, en las zonas de mayor interés para la interpretación de resultados por parte de un ingeniero y por ello, desde su punto de vista, esa malla no será tan óptima como este criterio puede indicar. Visto de otra manera, este criterio de optimalidad tiene en cuenta únicamente el costo necesario para alcanzar un cierto nivel global de precisión y no la calidad de los resultados en cuanto a su interpretación.

Para evitar estos inconvenientes comentados Bugada y Oñate han propuesto un segundo criterio de optimalidad. basado en la igual distribución del error específico.

b) Criterio de Igual distribución del error específico: consiste en considerar que una malla es óptima cuando el error se reparte uniformemente a través de todo el dominio Ω , independientemente de la forma y tamaño de los elementos. Si se acepta de nuevo una limitación del tipo de la (27) lo que este criterio exige a una malla “óptima” es que se cumpla:

$$\frac{\|E\|_e^2}{\Omega_e} = \frac{\|E\|^2}{\Omega} = \alpha \quad (39)$$

donde α es una constante. Mediante este criterio el error requerido en cada uno de los elementos de una malla previa valdrá:

$$\|E^r\|_e = \|E\| \sqrt{\frac{\Omega_e}{\Omega}} \quad (40)$$

Y por lo tanto, utilizando las expresiones (28) y (40) se puede obtener el parámetro de error local para este criterio de optimalidad de malla:

$$\bar{\xi}_e = \frac{\|E\|_e}{\sqrt{\Omega_e}} \left[\frac{\|E\|}{\sqrt{\Omega}} \right]^{-1} = \frac{\|E\|_e}{\|E\|} \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_e}} \quad (41)$$

Que es la expresión usada en el programa. De igual manera que para el anterior criterio, se calcula ahora el parámetro de error elemental, usando las (27), (28) (29) y (41):

$$\xi_e = \xi_g \cdot \bar{\xi}_e \quad (42)$$

El nuevo tamaño de elemento se obtiene mediante las (38) usando ahora el parámetro β_e propuesto en las referencias (Zienkiewicz, et al - *A Simple error est. and adap. Proc. for prac eng. analysis.* – Int. J. for N. M. in Eng. V.24 - 1987) Oñate E., Bugeda G. – *A study of mesh opt. criteria in adap. f.e.a.* Eng.Comp.1993)

$$\beta_e = (\xi_g \cdot \bar{\xi}_e)^{1/p} = \xi_e^{1/p} \quad (43)$$

Con este criterio se define un error por unidad de dominio(área o volumen), que se distribuye de forma uniforme a través de todo el espacio Ω . Por ello los resultados obtenidos presentarán el mismo nivel de error para cualquier zona en observación independientemente del número de elementos que exista en ella. Con ello se obtiene un criterio más ingenieril que permite una mejor interpretación de resultados solucionando el primer problema del criterio clásico anterior.

Este segundo criterio conducirá a mallas con mayor número de elementos que el criterio clásico ya que no garantiza que este número sea mínimo para un determinado nivel de error global. Sin embargo su utilización está más de acuerdo con lo que un ingeniero espera de unos resultados.

10. ESQUEMA DE CALCULO – SUBROUTINA ESTIMERR

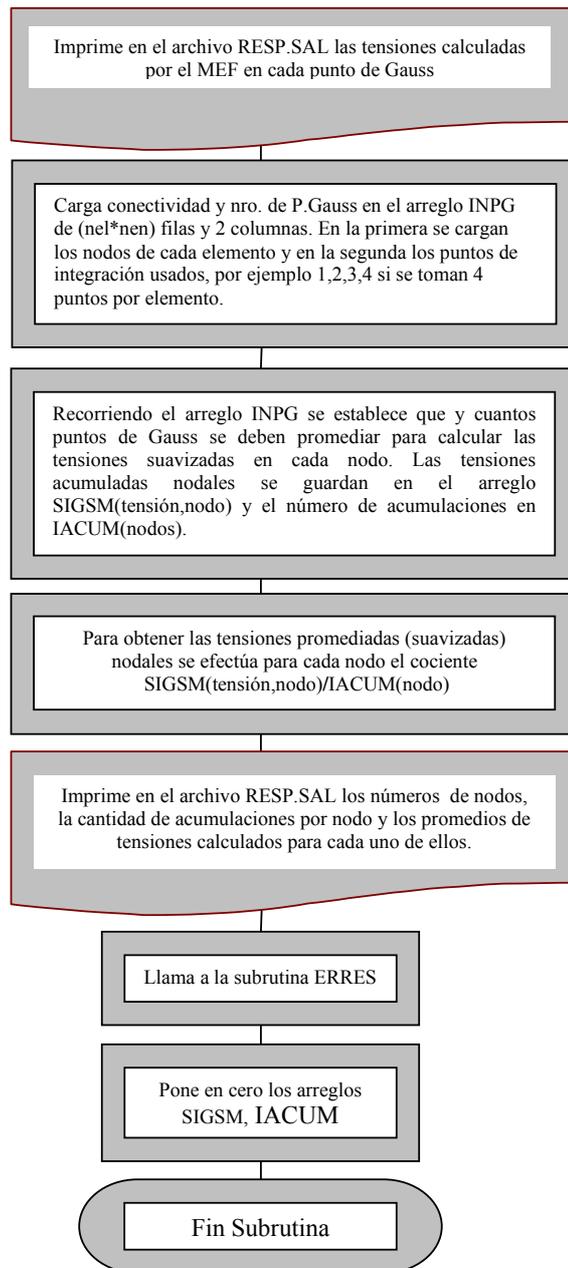
Objetivo: Estimar los errores de discretización elementales y global.

Entrada:

Cantidad total de elementos[NEL]	Cantidad total de nodos[NNP]
Cantidad de nodos del elemento[NEN]	Conectividades[IX(nodo,elto.)]
Cantidad de puntos de Gauss[NGS]	Tensiones calculadas en pto.de Gauss[SIG(tensión,P.Gauss,elto.)]
Tensor Elástico[EE]	Area/Volumen asociada a c/Pto. de Gauss[DAREA(,nel,ngs)]
Funciones de forma evaluadas en c/pto. de Gauss[SHAP(nodo,1,Pto.de Gauss)]	

Salida:

Tensiones Suavizadas Nodales SIGSM(tensión,nodo) (σ^*)



11. EJEMPLO NUMERICO: PRESA HUECA

Este es un ejemplo clásico que consiste en una presa de embalse que a los fines del presente trabajo se considera de un único material, hormigón, y se somete solamente al empuje hidrostático como se indica en las figuras 2 y 4.

Primero fue generada una malla (figura 1) con el programa GiD indicando como dato un tamaño promedio igual a 1. Luego se editó esta malla en el lado del muro de la presa que está en contacto con el agua, con el propósito de aumentar la cantidad de nodos sobre ese lado y así poder representar mejor la variación del empuje hidrostático. La malla inicial resultante es la que muestra la figura 3.

El estado de cargas adoptado se muestra en la figura 4. Los datos materiales se han tomado de la pagina 16 de la referencia (Bugeda G. *-A comparison between new adap. remeshing strategies based on point wise stress error estim. and energy norm error estimation.* Comm. in N.M. in Eng. CIMNE-UPC(2000) donde se desarrolla el mismo ejemplo, y son:

Modulo de Young $E = 3.100.000$.

Relación de Poisson $\gamma = 0,25$

Los resultados fueron los siguientes:

NELEM = 211, NODOS = 250,

$E = .30357515E-02$, $E/U = 26.25$ [%]
 $U = .11563285E-01$, $Des_E/U = 10.00$ [%]

$MEAN(ET^2) = .10000000E+01$, $DEV(ET^2) = .18304911E+02$,
 $MEAN(EE^2) = .99573663E+00$, $DEV(EE^2) = .17623112E+02$

Las distribuciones de tamaños obtenidos en esta corrida se muestran en las figuras 6 y 8 para ambos criterios de optimalidad de malla. Para cada uno de ellos se obtuvieron las mallas de las figuras 7 y 9 respectivamente

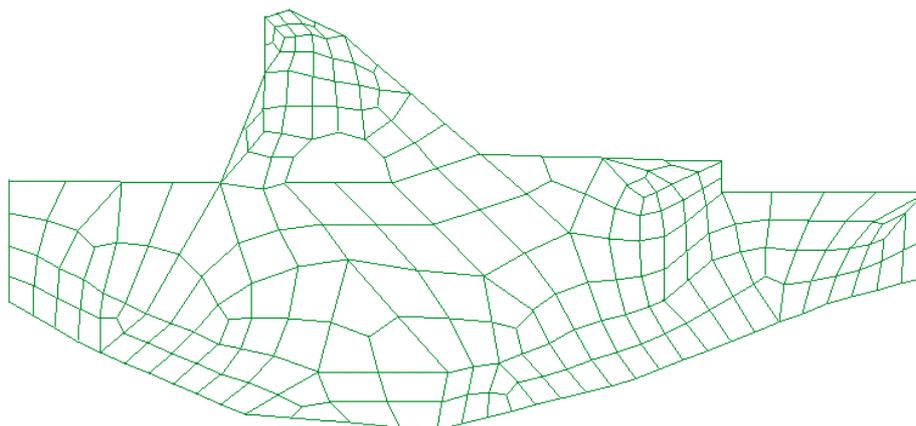


Fig. 1: Presa Hueca. Primera Malla generada, formada por 207 elementos cuadriláteros y 244 nodos.



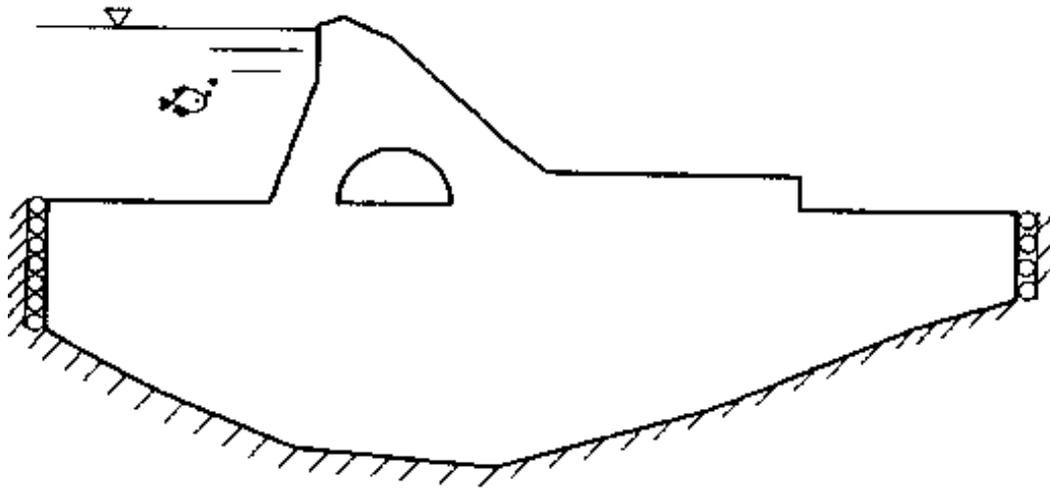


Fig. 2: Presa Hueca. Geometría, condiciones de borde y nivel de agua considerado s/pag. 54 referencia (Beckers,P. et al. – *Mesh Adap. for two dim. anal.*-Adv. in Post and prep. for F. E. Tech.-C.C.Ltd. Edinb.1994)

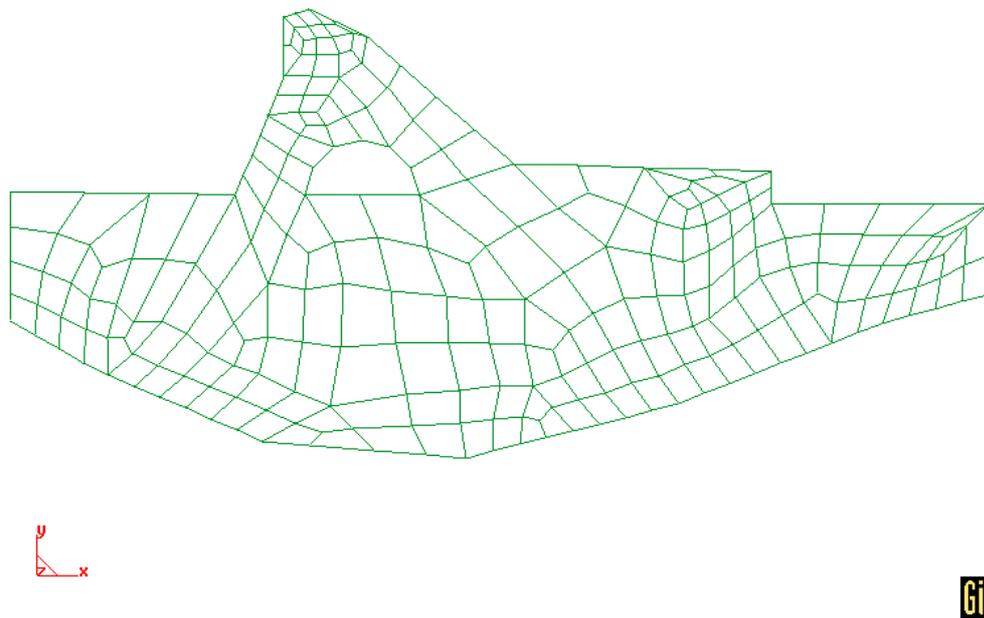


Fig. 3: Presa Hueca. Malla inicial considerada, formada por 211 elementos cuadriláteros y 250 nodos.

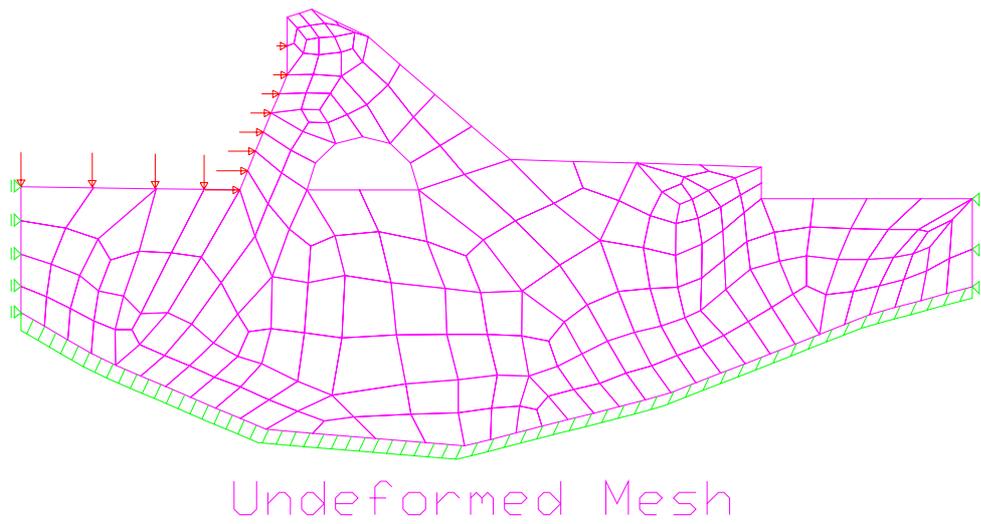


Fig. 4: Presa Hueca. Malla original. Esquema de Cargas v condiciones de borde.

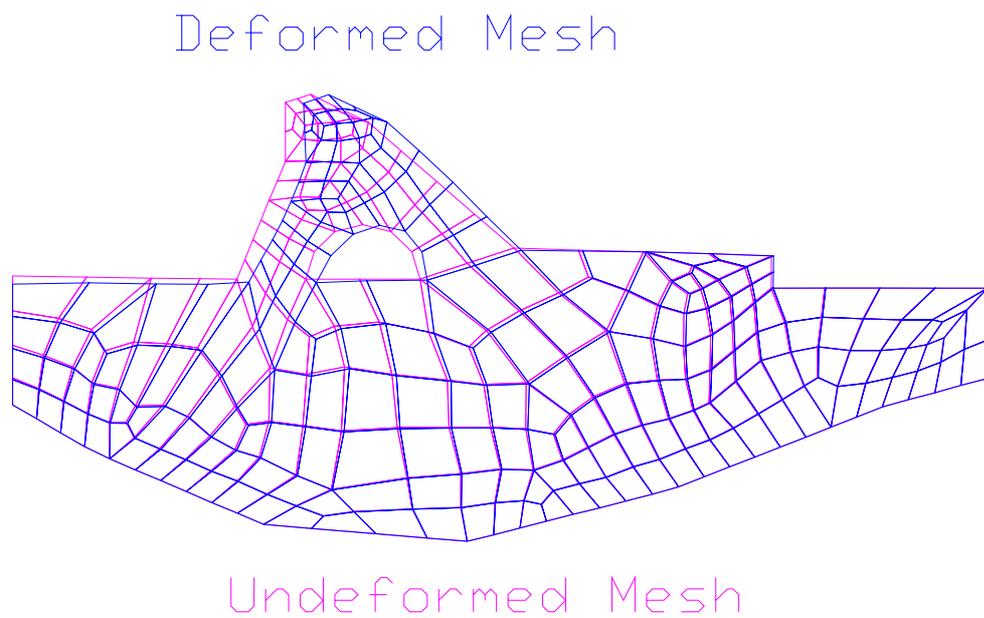


Fig. 5: Presa Hueca. Mallas original y deformada impresas con FEMINA .

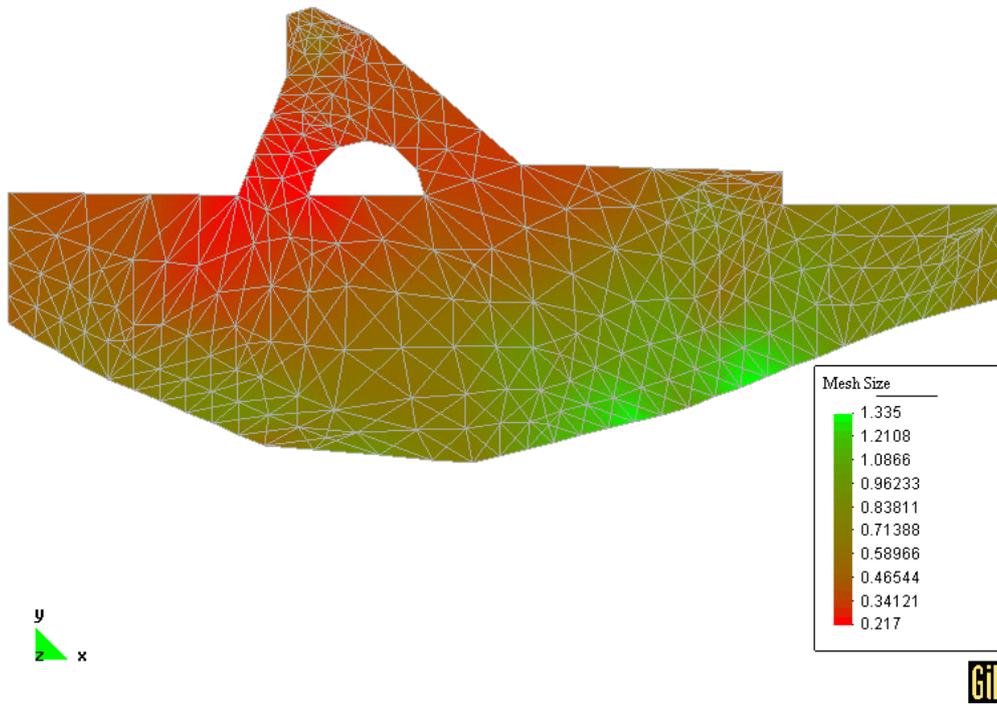


Fig. 6: Presa Hueca. Distribución de tamaños para criterio de optimalidad de malla de Zienkiewicz – Zhu.

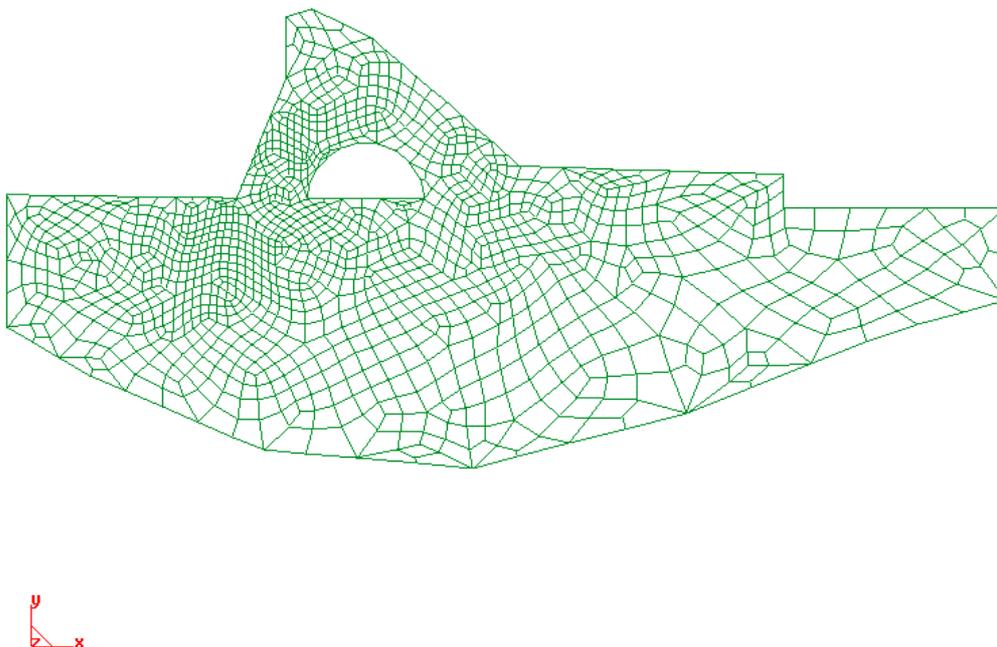


Fig. 7: Presa Hueca. Malla s/criterio de optimalidad de malla de Zienkiewicz – Zhu. 1275 elementos y 1324 nodos.

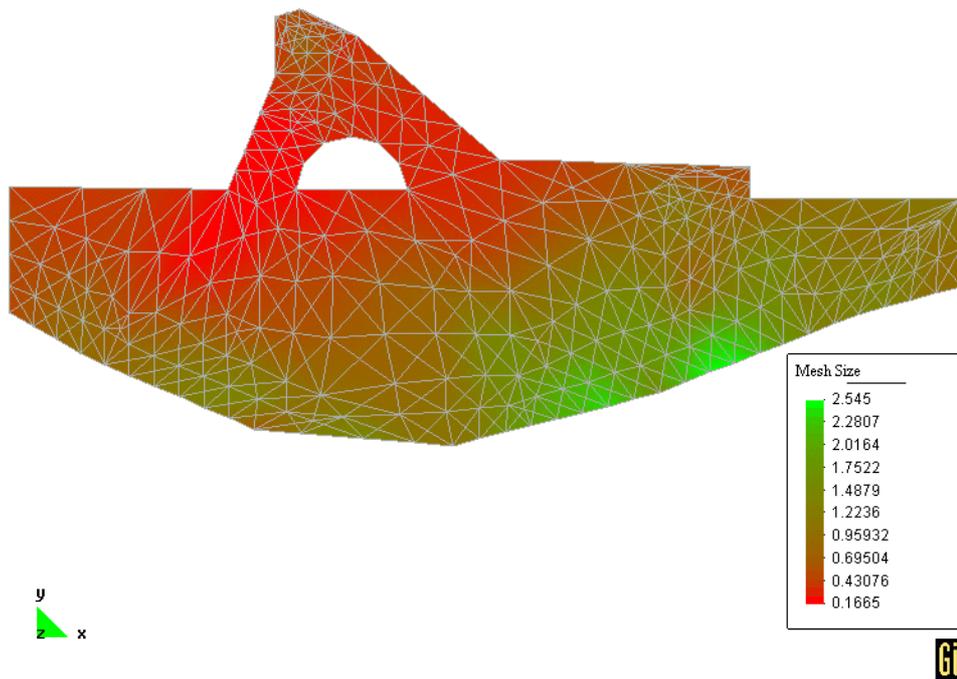


Fig. 8: Presa Hueca. Distribución de tamaños para criterio de optimalidad de malla de Bugada-Oñate.

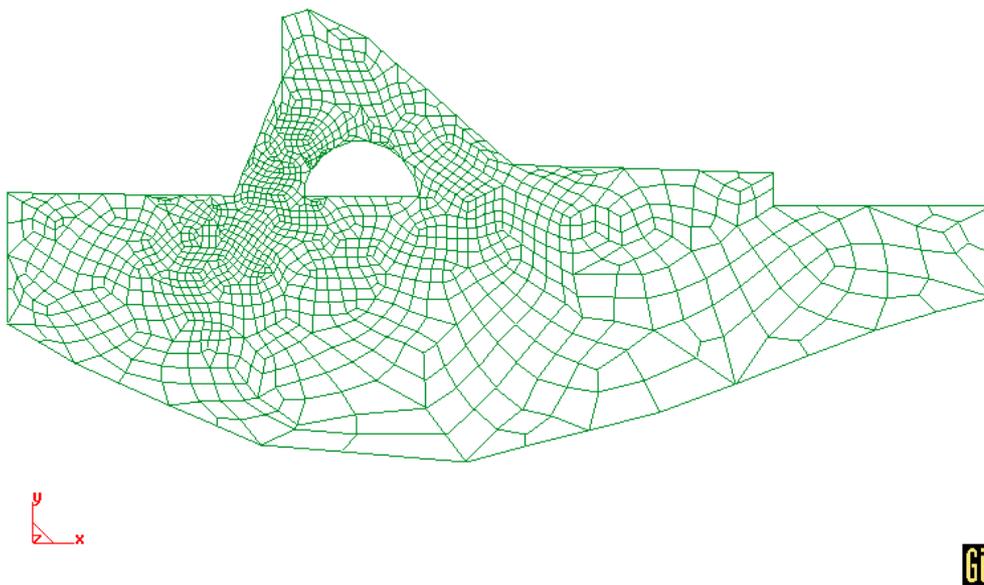


Fig. 9: Presa Hueca. Malla s/criterio de optimalidad de malla de Bugada-Oñate.
1269 elementos, 1314 nodos

12. CONCLUSIONES FINALES

Se ha incorporado la rutina ESTIMERR.F cuyo esquema general de funcionamiento se presenta en el apartado anterior. A partir del cálculo y redistribución de los errores elementales se obtiene la información de tamaños elementales necesaria para la generación de una nueva malla, la cual en este trabajo se efectúa con el programa GiD ingresando esta información a través de archivos de *background mesh* cuya sintaxis se puede consultar en la documentación de ese software.

Se han efectuado numerosas corridas de prueba (ver ejemplo del apartado 12) las que han arrojado resultados coherentes para elementos planos cuadriláteros y triangulares, usando cuatro y un único punto de Gauss respectivamente.

Se ha verificado numéricamente que el error de discretización disminuye cuando se aumenta el número de elementos de la malla o bien cuando se los redistribuye según un criterio de optimalidad de malla para conseguir mallas más eficientes. Lo que equivale a bajar el error de discretización con un costo computacional mínimo.

En el presente trabajo se obtiene el campo de tensiones suavizadas efectuando un promedio para cada nodo. Se observa que la metodología de cálculo de estas tensiones suavizadas nodales incide fuertemente en los resultados. Por lo tanto se considera que la instrumentación de las rutinas para calcular estas tensiones de comparación, mediante el método de recuperación superconvergente que se describe detalladamente en las referencias (Zienkiewicz et al. *The Superconvergent Patch Recov. and a Post. Error Estim.*, Part 1: The Rec. Tech. Int. Jour. for N.M. in Eng. V.33 1992) (Zienkiewicz et al. *The Sup. Patch R. and a Post. Error Estim. Part 2: Error Estim. and Adapt. Int. Jour. for N. M. in Eng, V.33 1992*) (Zhu J.Z. et al. *Sup. Rec.Tech. and a posteriori Error Estim. Int. Jour. for N M. in Eng, V.30 1990*) (Zienkiewicz et al. *The Sup. patch recovery (SPR) and adap. F.elem. C.M. in App. Mech. and Eng.V.101 North-Holland 1992*), significaría una mejora importante a introducir.

En la referencia (Bugada G. *-A comp. between new adap. remeshing strat. based on point wise stress error estim. and energy norm error estim.* Comm. in N.M. in Eng. CIMNE-UPC(2000) se describe otro enfoque para calcular los errores de discretización el cual consiste en reemplazar las normas empleadas hasta ahora, por la determinación de valores puntuales de errores en tensiones. Su instrumentación numérica podría llevarse a cabo como un complemento al presente trabajo. En la referencia (Babuška I. et al *- Pollution Error in the h-version of f.e.m. and the local quality of a post. error estim. - F.E. Anal. 1994*) se indican los fundamentos teóricos para la determinación del llamado error de contaminación, cuya evaluación se recomienda en publicaciones recientes.

13. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. **Babuška I., Dorr M.** – *Error estimates for the combined h y p versions of finite element method.* – Numerical Mathematica, vol 25. pp. 257-277(1981)
2. **Babuška I., Rheinboldt W.C.** - *A -Posteriori Error Estimate for the Finite Element Method.* – International Journal for Numerical Method in Engineering, vol 12. Pp. 1597-1615(1978)
3. **Babuška I., Rheinboldt W.C.** - *Reliable Error Estimation and Mesh Adaption for the Finite Element Method.* - Computational Methods in Nonlinear Mechanics , pp.67-108. Ed. J.T.Oden(1980)
4. **Babuška I., Strouboulis T. Mathur A. and Upadhyay C.S.** – *Pollution Error in the h-version of finite element method and the local quality of a posteriori error estimators* – Finite Elem. Anal. Des., 17, 273-321 (1994)
5. **Beckers, P. and Zong H.G.** – *Mesh Adaption for two dimensional analysis.* -Advances in Post an Preprocessing for Finite Element Technology- Civil Comp. Ltd. Edinburgh pp. 47-59 (1994)

6. **Bugeda G.** –*A comparison between new adaptive remeshing strategies based on point wise stress error estimation and energy norm error estimation.* Communication in Numerical Methods in Engineering CIMNE-UPC(2000)
7. **Bugeda G., Oñate E.** –*Adaptive techniques for elliptics problems In Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology* Pappadarakakis M, Topping BHV (eds.). Civil-Comp Press, 1994; 77-84.
8. **Bugeda, G.** - *Estimación y Corrección del Error en el Análisis Estructural por el MEF.* Monografía N°9 del Centro Internacional de Métodos Numéricos En Ingeniería
9. **Bugeda G.** -*Utilización de técnicas de estimación de error y generación automática de mallas en procesos de optimización estructural.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña(1990)
10. **Crisfield, M. A.,** *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis, Vol. 1: Lienar Analysis.*- T.R.R.L., Crowthorne, U.K. Pineridge Press, Swansea (1986)
11. **Irons B. and Ahmad S.** – *Techniques of Finite Elements* - Ellis Horwood Series in Engineering Science, John Wiley & Sons(1980)
12. **Li LY, Bettess P.** – *Adaptive finite element methods: A review Applied Mechanics Reviews.* (1997) 50 581-591.
13. **Li LY, Bettess P., Bull J.W., Bond T., Applegarth I.** – *Theoretical formulations for adaptive finite element computations.* – Communications in Numerical Methods in Engineering. (1995) 11(12) 857-868.
14. **Oñate E., Bugeda G.** –*A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis.* Engineering Computation 1993 10(4):307-321.
15. **Zhu J.Z. and Zienkiewicz O.C.** -*Adaptive Technique in Finite Element Method.- Communication in Applied Numerical Methods, vol.4 pp.197-204(1998)*
16. **Zienkiewicz O.C. and Craig A.** - *Adaptivity Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarchic Finite Element Method Concepts.* – *Accurary Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations,* Edited by I. Babuška, O.C. Zienkiewicz, J. Gago and E.R. de Oliveira, John Wiley & Sons Ltd. (1986)
17. **Zienkiewicz O.C. Kelly D.W. Gago J.P. and Babuška I.** – *Hierarchical Finite Element Approaches, Error Estimates and Adaptive Refinement.* – The mathematics of finite elements and applications, Ed. J.R. Whiteman, Academic Press (1982).
18. **Zienkiewicz, O.C. and Zhu J.Z.** - *A Simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.* - International Journal for Numerical Method in Engineering, vol 24. pp. 337-357(1987)
19. **Zienkiewicz, O.C., Zhu J.Z. and Gong N.G.** - *Effective and Practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 28. pp. 879-891(1989)
20. **Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z.** -*The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates.*Part 1: The Recovery Technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.33,1331-1364(1992)
21. **Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z.** *The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates.*Part 2: Error Estimates and Adaptivity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.33,1365-1382(1992)
22. **Zhu J.Z. and Zienkiewicz O.C.** *Superconvergence Recovery Technique and a posteriori Error Estimators.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.30,1321-1339(1990)
23. **Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z.** *The Superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol.101,207-224 North-Holland(1992)
24. **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R.L.** - *El Método de los Elementos Finitos,* Mc Graw Hill, 1994
25. **Zienkiewicz, O. C., Morgan** - *The Finite Element Method. Fourth Edition. Vol.1 – Basic Formulation and Linear Problems.- ,* Mc Graw Hill, (1989).