

## EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICO PARA EL CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL Y DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA EN CELDA GALVÁNICA

### EVALUATION OF ISOGEOMETRIC BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR CALCULATION OF ELECTRICAL POTENTIAL AND CURRENT DENSITY ON GALVANIC COUPLE

H.De Avila<sup>a</sup> y J.Useche<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Estudiante de Maestría, Universidad Tecnológica De Bolívar, Parque Industrial y Tecnológico Carlos Vélez Pombo Km 1 Vía Turbaco, Bolívar, Colombia, [hdeavila1992@gmail.com](mailto:hdeavila1992@gmail.com), <http://www.utb.edu.co/>

<sup>b</sup>Grupo de Materiales y Estructuras, Universidad Tecnológica De Bolívar, Parque Industrial y Tecnológico Carlos Vélez Pombo Km 1 Vía Turbaco, Bolívar, Colombia, [juseche@utb.edu.co](mailto:juseche@utb.edu.co), <http://www.utb.edu.co/>

**Palabras clave:** Electrolito, Isogeométrico, Elementos de contorno.

**Resumen.** En este trabajo se presenta una formulación del método de elementos de contorno isogeométrico. El método es aplicado en cálculo de distribución de potencial y densidad de corriente eléctrica entre dos metales sumergidos dentro de un electrolito con altura variable. El contorno es generado a partir de 5 curvas B-spline y el mallado se realiza con la técnica de refinamiento de nudos. Las integrales singulares son calculadas utilizando la técnica subdivisión de elementos y cuerpo rígido. Finalmente los resultados obtenidos son comparados con las ecuaciones analíticas.

**Keywords:** Electrolyte, Isogeometric, Boundary element

**Abstract.** In this work a formulation of the isogeometric boundary elements method is presented. The method is applied in calculation of potential distribution and electric current density between two submerged metals within an electrolyte with variable height. The boundary is generated from 5 B-spline curves and the meshing is done with the knot refinement technique. Singular integrals are calculated using the subdivision of elements and rigid body technique. Finally, the results obtained are compared with the analytical equations.

## 1. INTRODUCCIÓN

La corrosión puede definirse como la conversión de una aleación metálica en un componente inorgánico de baja energía, como los óxidos, sulfatos y carbonatos, esta transformación también produce transferencia de masa de este componente al medio circundante, esta conversión es activada principalmente por los ácidos del medio y es acelerada por procesos de calentamiento (corrosión en caliente), cargas de tensión (corrosión por esfuerzo) y la presencia de una segunda aleación (corrosión galvánica). En la industria, numerosas estructuras metálicas están expuestas a estas condiciones de activación o aceleración que afecta negativamente su integridad, adelgazando las paredes o disminuyendo sus propiedades mecánicas (Límite de fluencia, rigidez, resiliencia, etc...). Estructuras de pared delgada como los sistemas de tubería o el casco de una embarcación, son afectadas por la corrosión, los impactos económicos, medioambientales y humanos generados por fallas catastróficas en estas estructuras son significativos [Hansson \(2011\)](#). Por lo tanto entender los diferentes mecanismos de activación del proceso de corrosión permite eliminar o mitigar sus efectos, en el caso de la corrosión galvánica, es clave entender cómo se distribuye el potencial eléctrico entre dos metales, ya que esto permitiría tomar medidas correctivas de forma eficiente.

Múltiples trabajos de investigación, en esta temática, utilizan soluciones analíticas o numéricas de la ecuación diferencial de Laplace, para modelar la respuesta de diferentes estructuras bajo diferentes tipos de corrosión. [Kapustin et al. \(2015\)](#) modela numéricamente la degradación por corrosión en placas bajo tensión simple, [Gutman et al. \(2016\)](#) estudia los efectos de la corrosión en láminas esféricas sujetas a presión externa. Sin embargo, las soluciones analíticas son difíciles de encontrar para diferentes geometrías, por lo tanto existe una tendencia fuerte a utilizar métodos numéricos. [Zamani et al. \(1986\)](#) discute sobre los esfuerzos realizados en la investigación de métodos numéricos capaces de resolver la ecuación de gobierno de Laplace. En su trabajo concluye que el método de elementos de contorno (BEM) es la técnica más conveniente para realizar cálculos de corrosión. Esta postura es también defendida en los trabajos de [Brebbia y Dominguez \(1994, 1977\)](#), [Amaya y Aoki \(2003\)](#), [Aoki y Kishimoto \(1991\)](#) y [Jia et al. \(2004, 2007\)](#). El método de elementos de contorno se basa en la discretización de la ecuación integral de contorno, este método puede ser aplicado a un amplio espectro de problemas físicos dentro del campo del modelado computacional [Bonnet \(1999\)](#). Su mayor ventaja yace sobre el hecho de que solo es necesario discretizar (mallar) el contorno del problema, esto permite reducir significativamente, el coste computacional relacionado a esta actividad y por lo tanto reducir el tiempo de análisis. Sin embargo, al igual que en el caso de los elementos finitos, requiere del proceso de remallado, para garantizar la convergencia de la solución. Este paso en particular requiere de una constante conexión con los sistemas de dibujo asistido por computadora (CAD), además de intervención humana, esta actividad consume una considerable cantidad de tiempo, que si bien es necesario, no contribuye directamente con la solución de problema. [Hughes et al. \(2005\)](#) propone el análisis isogeométrico (IGA) como alternativa de solución. Este método de análisis permite utilizar la información geométrica exacta desde un sistema CAD a través de las funciones base NURBS (Non-Uniform rotational B-spline). El uso de estas funciones permite llevar a cabo procesos de remallado fácilmente, sin recurrir a una conexión constante con el sistema CAD, ya que técnicas como K-refinamiento, P-incremento e inserción de nudos, generan mallas más finas, manteniendo la exacta geometría en todo los niveles del remallado. En este trabajo se plantea una formulación del método de elementos de contorno isogeométrico (IGABEM) con elementos de variación constante, para calcular la variación de potencial elec-

troquímico presentada en una celda galvánica. Este documento está estructurado de la siguiente forma. La función base utilizada para la generación de las curvas B-spline es descrita. Luego, la formulación de elementos de contorno isogeométrico es propuesta, se dan explicaciones de como calcular las integrales singulares y finalmente se presenta un ejemplo de aplicación. Los resultados obtenidos, muestran que la formulación propuesta es una alternativa confiable para realizar cálculos de distribución de potencial y densidad de corriente.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LA GEOMETRÍA

### 2.1. Función base

El algoritmo utilizado para generar estas funciones, tiene tres entradas principales, el vector de nudos, el cual debe ser no negativo y no decreciente  $U = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m]$ , el parámetro  $u_i$  y el grado del polinomio  $p$ . El  $i$ -ésimo termino de la función base se calcula de la siguiente forma:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (1)$$

Note que para las funciones donde  $p < 0$  el valor de  $N_{i,p}(u)$  es una combinación lineal de dos tipos de funciones base  $N_{i,p-1}$  y  $N_{i+1,p-1}$ . La figura 1 muestra un ejemplo de las función base de grado  $p = 1$  y  $p = 2$  con un vector de nudos  $U = [0, 0, 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1, 1]$  para los valores  $0 \leq u < 1$ .

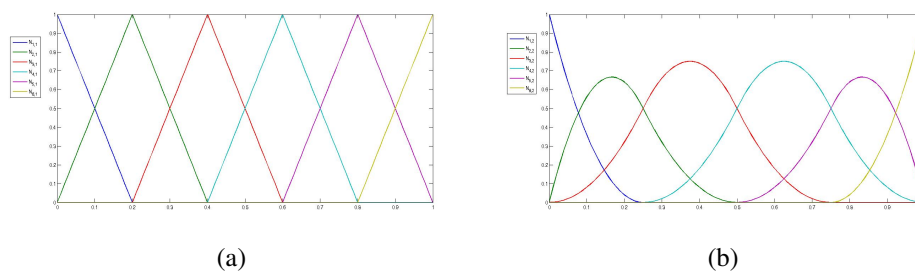


Figura 1: FUNCIÓN BASE LINEAL (A) Y FUNCIÓN BASE CUADRÁTICA (B)

Las funciones base de la figura 1(a) son interpolantes mientras que las funciones en la figura 1(b) no lo son, lo cual debe ser considerado cuando se utilizan estas funciones para realizar interpolación del espacio solución. De hecho es conocido que, estas funciones no satisfacen la propiedad delta de Kronecker, por lo cual el calculo de las integrales singulares se dificulta.

### 2.2. Derivada de la función Base

Es necesario realizar la derivada de la función base para calcular la longitud de arco o area de superficies de una curva B-spline. La primera deriva se define como:

$$N'_{i,p} = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

Luego para representar derivadas superiores se indicara  $N_{i,p}^k(u)$  como la derivada k-ésima de  $N_{i,p}(u)$ :

$$N_{i,p}^k = \frac{p}{p-k} \left( \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}^k + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}^k \right) \quad (3)$$

$k = 0..p-1$

La ecuación 2 sera utilizada posteriormente para calcular el Jacobiano del elemento.

### 2.3. Curvas B-spline

Una curva b-spline de grado  $p$  se define de la siguiente forma:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad (4)$$

Donde  $P_i$  son los puntos de control que forman el polígono de control y  $n$  es el total de puntos de control. Una curva B-spline de grado  $p = 2$  es mostrada en la figura 2. La suma anterior puede expresarse como el siguiente producto vectorial:

$$C(u) = [N_{1,p}, N_{2,p}, \dots, N_{n,p}] * [P_1, P_2, \dots, P_n]^T$$

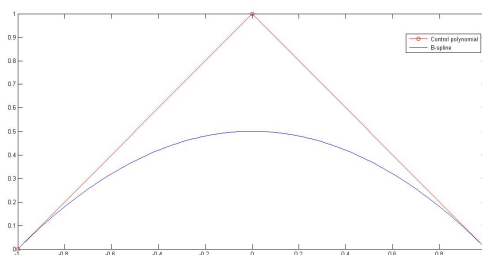


Figura 2: B-SPLINE DE GRADO  $p = 2$  Y VECTOR DE NUDOS  $U = 0, 0, 01, 1, 1$  LOS PUNTOS DE CONTROL SON  $P_x = [-1, 0, 1]$  Y  $P_y = [0, 1, 0]$

Es evidente que, el maximo grado permitido para un b-spline con  $n$  puntos de control es  $p = n - 1$ , mientras que el vector de nudos tenga la forma:

$$U = \left\{ \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{\beta, \dots, \beta}_{p+1} \right\}$$

### 2.4. Refinamiento de nudos

Esta técnica permite enriquecer el vector de nudos, agregando nuevos nudos sin alterar la curva b-spline de forma paramétrica o geométrica, agregando nuevos puntos  $\bar{P}$  en el polígono de control. Para el vector de nudos mostrado:

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{m-1}, u_m] \quad (5)$$

El cual genera las siguientes funciones bases evaluadas en  $u$ .

$$N(u) = [N_{1,p}(u), N_{2,p}(u), \dots, N_{n,p}(u)] \quad (6)$$

Es posible calcular los nuevos puntos de control  $\bar{P}$  que formen el polígono de control de una curva b-spline con similar geometría. El nuevo vector de nudos es:

$$\bar{U} = [u_1, u_2, \dots, \bar{u}_{k-1}, u_k, \bar{u}_{k+1}, u_m] \quad (7)$$

La relación para calcular los nuevos puntos de control es:

$$C(u) = \bar{C}(u) \quad (8)$$

Donde:

$$\bar{C}(u) = [\bar{N}_{1,p}(u), \bar{N}_{2,p}(u), \dots, \bar{N}_{j,p}(u)] * [\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_j]^T \quad (9)$$

Seleccionando un conjunto de valores paramétricos convenientes, diferentes de los que ya existen dentro del vector  $U$ , se puede generar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{N}(u_{1,2,\dots,j})P = \bar{\mathbf{N}}(u_{1,2,\dots,j})\bar{P} \quad (10)$$

$$\mathbf{N}(u_{i,2,\dots,j})P = \begin{bmatrix} N_{1,p}(u_1) & N_{2,p}(u_1) & N_{3,p}(u_1) & \dots & N_{n,p}(u_1) \\ N_{1,p}(u_2) & N_{2,p}(u_2) & N_{3,p}(u_2) & \dots & N_{n,p}(u_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(u_j) & N_{2,p}(u_j) & N_{3,p}(u_j) & \dots & N_{n,p}(u_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{N}}(u_{i,2,\dots,j})\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,p}(u_1) & \bar{N}_{2,p}(u_1) & \bar{N}_{3,p}(u_1) & \dots & \bar{N}_{j,p}(u_1) \\ \bar{N}_{1,p}(u_2) & \bar{N}_{2,p}(u_2) & \bar{N}_{3,p}(u_2) & \dots & \bar{N}_{j,p}(u_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{N}_{1,p}(u_j) & \bar{N}_{2,p}(u_j) & \bar{N}_{3,p}(u_j) & \dots & \bar{N}_{j,p}(u_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}$$

Finalmente al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene  $\bar{P}$

$$\bar{P} = \bar{\mathbf{N}}(u_{1,2,\dots,j})^{-1}(\mathbf{N}(u_{1,2,\dots,j})P) \quad (11)$$

### 3. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICO

En esta formulación, las curvas B-spline son utilizadas para interpolar la geometría, pero el espacio solución será interpolado con elementos de variación constante, esto se debe a que es más simple trabajar con las integrales fuertemente singulares de esta forma, ya que se puede aplicar cuerpo rígido. La ecuación integral típica de elementos de contorno para la solución de la ecuación de Laplace en un medio isotrópico, uniforme y sin fuente de potencial en el dominio es:

$$\epsilon(P)\phi(P) = \int_{\Gamma} [\phi^*(P, Q)\bar{q} - \bar{\phi}q^*(P, Q)] d\Gamma \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ para } P \text{ dentro de } \Omega \\ 0 \text{ para } P \text{ fuera de } \Omega \end{array} \right\} \epsilon(P)$$

Donde:

$\Gamma = \{\Gamma_a + \Gamma_b\}$  El contorno completo

$\{\bar{\phi}, \bar{q}\}$  Potencial y flujo conocido en el contorno.

$\{\phi^*, q^*\}$  Solución fundamental.

$\{P, Q\}$  Punto fuente y punto de campo

Como el contorno será modelado como uno o varios B-spline, el diferencial  $d\Gamma$  cambia a:

$$d\Gamma = J_e du \quad (13)$$

Donde  $J_e$  es el Jacobiano

$$J_e = \sqrt{(N'_{i,p}P_x)^2 + (N'_{i,p}P_y)^2} \quad (14)$$

Reemplazando 14 y 13 en 12 se tiene:

$$\epsilon(P)\phi(P) = \int_{\Gamma} (u) [\phi^*(P, Q)\bar{q} - \bar{\phi}q^*(P, Q)] J_e du \quad (15)$$

En el método tradicional el contorno está subdividido en elementos rectos, en los cuales se sabe que sus puntos fuentes se encuentran en el centro, en el caso de la formulación isogeométrica, un elemento es el intervalo entre dos nudos  $u_i$  y  $u_{i+1}$  donde  $u_{i+1} - u_i < 0$ , es conocido también como knot-span, el punto fuente es calculado por la ecuación 16

$$p = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \quad (16)$$

La solución de la ecuación integral, aproximando  $\Gamma$  con  $M$  knot-span es:

$$\epsilon(P)\phi(P) + \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_u} \bar{\phi}q^*(P_j, Q)J_e^i du = \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_u} \phi^*(P_j, Q)\bar{q}J_e^i du \quad (17)$$

Donde  $\Gamma_u$  es el intervalo de integración  $\{u_i, u_{i+1}\}$ . La ecuación puede ser ensamblada en un sistema lineal de ecuaciones como el siguiente:

$$H\phi = GI \quad (18)$$

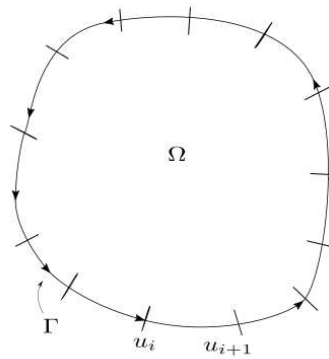


Figura 3: DOMINIO ENCERRADO POR UN B-SPLINE CON 12 KNOT-SPAN

Donde  $H$  y  $G$  son las matrices de influencia,  $\phi$  y  $I$  son el potencial y el flujo conocido en el contorno. Uno de los principales obstáculos en el método BEM tradicional es la solución de dichas integrales cuando el punto de campo y el punto fuerte están en el mismo elemento, si esto sucede entonces existe una singularidad en la región de integración que debe ser resuelta por otros medios. En el método tradicional esta problemática es solucionada utilizando una solución analítica para la integral de tipo  $\ln(r)$  asociada a  $\phi^*$  llamada integral de singularidad débil y utilizando la técnica de cuerpo rígido para las integrales de tipo  $\cos(\theta)/r$  asociada a  $q^*$  llamada integral de singularidad fuerte. La técnica de cuerpo rígido consiste en determinar indirectamente el valor de la integral a través de la suma de los términos por fuera de la diagonal principal como se muestra en la ecuación 19

Esta misma problemática es heredada por el método de elementos de contorno isogeométrico, no obstante, cabe resaltar que el knot-span puede estar asociado a una sección curva del contorno, en consecuencia la solución analítica de las integrales de singularidad débil propuestas en el método BEM tradicional, no se aplican para este. Por lo tanto, se utiliza la técnica de subdivisión del elemento, esta técnica permite dividir el elemento en regiones más pequeñas y resolver las integrales con cuadratura de Gauss-Legendre, de modo que el resultado total, sea el total de la suma de dichas integrales. En este trabajo se realizan en total seis subdivisiones en el elemento. Por otro lado, las integrales fuertemente singulares, solo existen como valor principal de Cauchy, por lo que se resuelve utilizando la misma técnica de cuerpo rígido.

$$H^{ii} = - \sum_{i=1}^M H^i \quad \text{for } i \neq j \quad (19)$$

#### 4. CÁLCULO DE POTENCIAL Y DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA EN CELDA GALVÁNICA

La formulación IGABEM es utilizada para calcular la distribución de flujo y potencial en la superficie de un ánodo y un cátodo, dentro de un medio electrolítico. Aquí un modelo de celda galvánica similar al presentado en Jia et al. (2004) es modelado. Las condiciones de borde para el par galvánico son:

$$I(0, x_2) = I(a, x_2) = I(x_1, w) = 0 \quad (20)$$

$$\phi(x, 0) + R_p I(x, 0) = \phi_a H(x - c) \quad (21)$$

Donde  $H$  es la función escalón de Heaviside y  $R_p$  es el parámetro de polarización y  $\phi_a$  es el diferencial de potencial entre el ánodo y el cátodo. Como existe una relación no lineal entre el contorno del ánodo y el cátodo, la solución numérica es obtenida implementando el esquema de solución iterativa reportado en Aoki y Kishimoto (1991). finalmente la solución obtenida es comparada con la solución analítica reportada en Waber y Fagan (1956)

Para este caso, la constante  $\phi_a = 1,0V$  y el parámetro de polarización  $R_p = 1,0$  para una celda galvánica de  $a = 1cm$ ,  $c/a = 0,5$  y  $w/a$  tiene los valores de 0,5, 0,1, 0,05 y 0,005. Los valores de densidad de corriente y potencial son mostrados en la figura 6(a) y 6(b), mientras que la configuración geométrica y la distribución de nodos son mostradas en la figura 4(a) y 4(b).

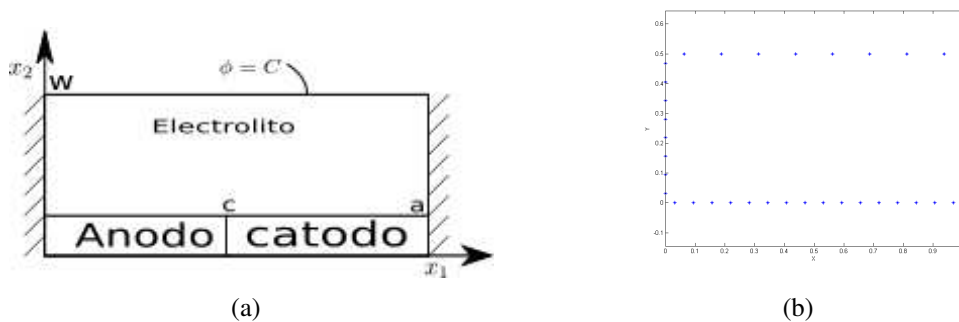
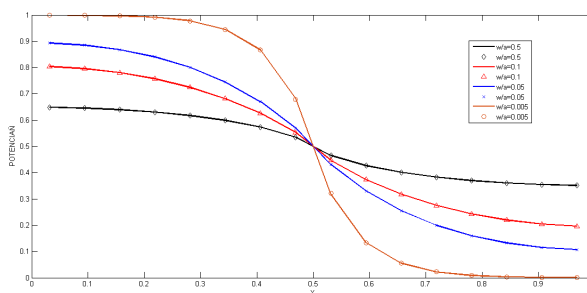


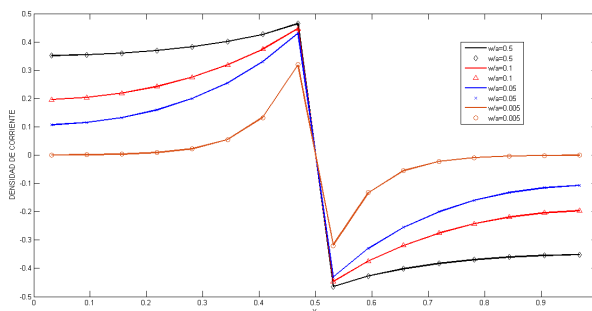
Figura 4: (a) CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA DE LA CELDA ; (B) MALLA IGABEM PARA LA CELDA GALVÁNICA

El contorno de la celda es generado con 5 B-spline lineales, con una conductividad del medio igual a  $1,0\Omega^{-1}cm^{-1}$ , la malla tiene un tamaño de 96 knot-span con 16 de estos, distribuidos uniformemente sobre el cátodo y el ánodo.





(a)



(b)

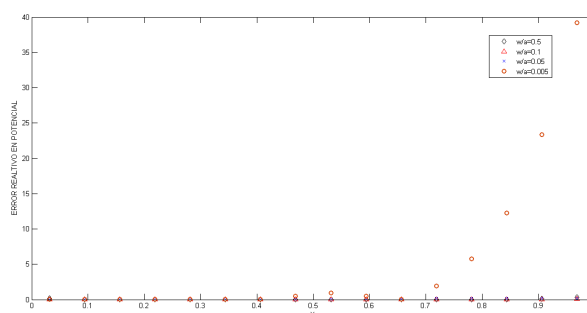
Figura 5: (a) VALORES CALCULADOS DE POTENCIAL UTILIZANDO IGABEM VERSUS LOS VALORES ANALÍTICOS (SÍMBOLOS); (B) VALORES CALCULADOS DE DENSIDAD DE CORRIENTE UTILIZANDO IGABEM VERSUS LOS VALORES ANALÍTICOS

## 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

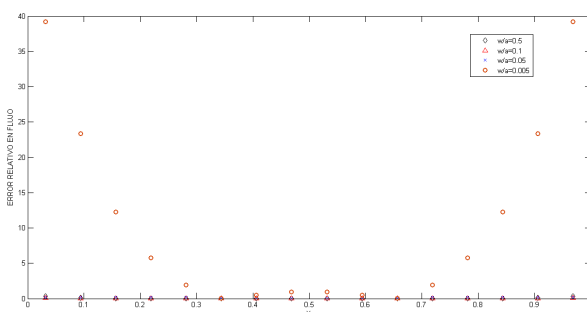
El método IGABEM fue utilizado para realizar cálculos de distribución de potencial y distribución de corriente eléctrica en una celda galvánica para diferentes alturas de electrolito. Los resultados obtenidos fueron comparados con las solución analítica, la graficas de error muestran gran congruencia entre la solución numérica y la analítica, con errores relativos por debajo del 1 % para diferentes alturas de electrolito, excepto para el caso de  $w/a = 0,005$  el error en el potencial incrementa al 30 % en el extremo izquierdo, en la zona catódica donde el valor absoluto de potencial tiende a cero, mientras que el error en el flujo incrementa al 40 % en ambos extremos donde el valor absolutos de flujo tiende a cero. Cabe resaltar que los elementos constantes están uniformemente distribuidos en el contorno, mientras que en estudios anteriores los elementos se concentran en la intersección entre el ánodo y el cátodo. Se pretende entonces, desarrollar en trabajos futuros, una técnica de refinamiento de nudos que permita concentrar los knot-span alrededor de un punto en específico. Por otro lado, subdividir un elemento en seis partes para desarrollar las integrales de singularidad débil, es computacionalmente ineficiente, por lo tanto se debe realizar más investigaciones en este aspecto.

## 6. CONCLUSIONES

El método IGABEM, es un método de fácil implementación que permite realizar cálculos de distribución de potencial y densidad de corriente eléctrica en celdas galvánicas, el método es probado bajo diferentes alturas de electrolito manteniendo igual distribución nodal para cada altura, se encuentra que el error relativo incrementa significativamente cuando la altura del



(a)



(b)

Figura 6: (a) ERROR RELATIVO ENTRE POTENCIAL ANALÍTICO Y POTENCIAL CALCULADO CON IGABEM ; (B) ERROR RELATIVO ENTRE FLUJO ANALÍTICO Y FLUJO CALCULADO CON IGABEM

electrolito tiende a cero, pero se mantiene por debajo del 1% para alturas mayores, esto no significa que exista una falla en el método, significa que el número de elementos constantes que modelan el contorno debe incrementar en la medida en que la altura del electrolito disminuye.

## REFERENCIAS

- Amaya K. y Aoki S. Effective boundary element methods in corrosion analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(5):507–519, 2003.
- Aoki S. y Kishimoto K. Prediction of galvanic corrosion rates by the boundary element method. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(3-5):11–22, 1991.
- Bonnet M. Boundary integral equation methods for solids and fluids. *Meccanica*, 34(4):301–302, 1999.
- Brebbia C. y Dominguez J. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, 1(7):372–378, 1977.
- Brebbia C.A. y Dominguez J. *Boundary elements: an introductory course*. WIT press, 1994.
- Gutman E., Bergman R., y Levitsky S. Influence of internal uniform corrosion on stability loss of a thin-walled spherical shell subjected to external pressure. *Corrosion Science*, 111:212–215, 2016.
- Hansson C. The impact of corrosion on society. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 42(10):2952–2962, 2011.
- Hughes T.J., Cottrell J.A., y Bazilevs Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(39-41):4135–4195, 2005.

- Jia J., Song G., Atrens A., St John D., Baynham J., y Chandler G. Evaluation of the beasy program using linear and piecewise linear approaches for the boundary conditions. *Materials and Corrosion*, 55(11):845–852, 2004.
- Jia J.X., Song G., y Atrens A. Experimental measurement and computer simulation of galvanic corrosion of magnesium coupled to steel. *Advanced Engineering Materials*, 9(1-2):65–74, 2007.
- Kapustin S., Churilov Y.A., y Panov V. Numerical modeling of the process of corrosion cracking in a thin-walled tube sample under conditions of axial tension at various loads. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 44(4):350–356, 2015.
- Waber J.T. y Fagan B. Mathematical studies on galvanic corrosion iv. influence of electrolyte thickness on the potential and current distributions over coplanar electrodes using polarization parameters. *Journal of The Electrochemical Society*, 103(1):64–72, 1956.
- Zamani N., Porter J., y Mufti A. A survey of computational efforts in the field of corrosion engineering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(7):1295–1311, 1986.