

ANÁLISIS DE LA INESTABILIDAD ELÁSTICA EN PILAS DE PUENTE PARCIALMENTE EMBEBIDAS EN ARCILLA O ARENA, APLICANDO EL MÉTODO DE GALERKIN

ELASTIC INSTABILITY ANALYSIS IN BRIDGE PILES PARTIALLY EMBEDDED IN CLAY OR SAND, APPLYING THE METHOD OF GALERKIN

Fernando J. Albarracin, Carlos M. Albarracin y Lía E. Orosco Segura

*Instituto de Estudios Interdisciplinarios de Ingeniería, Universidad Católica de Salta, Campo
Castañares S/N, 4400 Salta, Argentina, fjalbarracinb@gmail.com,
<https://ucasal.edu.ar/iesiing-instituto>*

Palabras clave: Pandeo, Pilas de Puente, Suelo, Galerkin.

Resumen. Abordamos en este trabajo la determinación de las cargas críticas que pueden ocasionar inestabilidad elástica en pilas esbeltas utilizadas en puentes modernos de gran altura, análisis que es de vital importancia en el diseño estructural ya que una posible falla por inestabilidad elástica es inadmisibles. Es común que en estas estructuras, exista continuidad constructiva y geométrica entre la pila y el pilote de fundación o la parte de la pila embebida en el suelo. En este trabajo se adopta un modelo simplificado de columna, en la que se incluye variación de la sección y presencia de apoyo elástico lateral para modelar las características elásticas del suelo, siendo posible el estudio para suelo estratificado con características variables en profundidad. La American Association of State Highway and Transportation Officials (conocida por sus siglas del idioma inglés como AASHTO) en sus especificaciones, permite estimar por medio de métodos empíricos la longitud de empotramiento de pilotes embebidos en arcilla o en arena. A partir de la formulación débil del problema, se aplicó el método de Galerkin para determinar las cargas críticas y las respectivas longitudes de pandeo.

Keywords: Buckling, Piles Bridge, Soil, Galerkin.

Abstract. This work is aimed to calculate the critical loads that could cause elastic instability in slender piles used in modern high bridges; this analysis is of primary importance for structural design since a possible failure by elastic instability is unacceptable. Generally these structures show constructive and geometric continuity between the pile and the foundation pile or the part of the pile embedded in the subgrade. A simplified column model is adopted, which includes variation of the section and presence of lateral elastic restriction to model the elastic feature of the soil, being able to analyze stratified soil with variables characteristics in depth. AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials), allows to estimate the fixed length of piles embedded in clay or sand by means of empirical methods. From the weak formulation of the problem, the Galerkin method was applied to determine the critical loads and the respective buckling lengths.

1. INTRODUCCIÓN

La determinación de las cargas críticas de pandeo en elementos estructurales tipo columna, resulta de vital importancia en el diseño estructural. Si bien el modelo matemático más usual en la práctica es aquel que presenta barras con deformación por flexión de acuerdo con el modelo de Euler-Bernoulli, en este trabajo se considera la deformación por esfuerzo de corte, resultando en un modelo más completo. En los problemas clásicos, las columnas pueden presentar diferentes condiciones de apoyo en sus extremos. Para analizar estos casos existe una amplia bibliografía en la cual se detallan los modelos matemáticos y las soluciones exactas (clásicas) correspondientes. En ingeniería Civil por ejemplo, la posibilidad de falla por pandeo en fundaciones profundas (con pilotes) puede en ocasiones estar subestimada, por lo que es preciso tener en cuenta en el modelo matemático la estructura de fundación y su interacción con el suelo. En el caso del diseño de elementos mecánicos esbeltos, la variación de espesor es una práctica muy común, ya que de esa manera se logran componentes mecánicos de poco peso, importante si estos elementos trabajan con movimiento.

El objetivo de este trabajo es determinar valores de cargas críticas de pandeo y sus correspondientes modos de falla en el caso de pilas esbeltas que conforman una unidad estructural pilote de fundación – pila, principalmente empleadas en apoyos intermedios de los tableros de puentes, considerando la restricción lateral elástica del suelo. La obtención de la formulación débil del problema permite la aplicación del método de Galerkin y con él se pueden determinar valores de cargas críticas y modos de pandeo que ocasionan inestabilidad del equilibrio elástico. En esta primera etapa, la hipótesis de trabajo es para pilotes desarrollando capacidad de resistencia de punta sobre un estrato resistente de apoyo, sin considerar la fricción lateral entre el suelo y la superficie del pilote embebido.

2. FORMULACIÓN

Considérese una estructura tal como se muestra en la Figura (1), sometida a la acción de una carga P que siempre mantiene una dirección paralela al eje \bar{x} . Este elemento está constituida por un material isótropo y homogéneo, de momento de inercia $I(\bar{x})$ cuya expresión es función de la variación de la sección. La incorporación de una restricción elástica lateral $K(\bar{x})$ limita los desplazamientos transversales en la longitud donde se considera. Estos desplazamientos se suponen posibles sólo en el plano $\bar{x} - \bar{y}$.

Sin perder generalidad en la aplicación del método y a los efectos ilustrativos, en la Figura (1.1) se considera un problema con un pilote apoyado de punta sobre estrato resistente ($\bar{x} = 0$) con desarrollo de la capacidad de carga de punta, fricción (horizontal) de punta (que impide su desplazamiento lateral), restricción elástica lateral $0 \leq \bar{x} \leq L_{EMB}$, siendo L_{EMB} la longitud de la parte embebida en el suelo, y desplazamiento lateral restringido en el extremo ($\bar{x} = L$). El problema de contorno en este caso considerando el esfuerzo cortante, es:

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left[EI(\bar{x}) \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right] + P \frac{AG}{(AG - \chi P)} \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + K(\bar{x}) w(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in (0, L); \quad (1)$$

$$w(\bar{x})|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right|_{\bar{x}=0} = 0; \quad y \quad w(\bar{x})|_{\bar{x}=L} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right|_{\bar{x}=L} = 0.$$

Al adoptar un cambio de variable $x = \bar{x}/L$, se tiene el siguiente problema de contorno en forma

adimensional:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{I(x)}{I_0} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + \alpha \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \beta k(x) w(x) = 0, \quad \forall x \in (0, 1); \quad (2)$$

$$w(x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \quad y \quad w(x)|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right|_{x=1} = 0.$$

en donde $I_0 = I(x)_{x=0}$, $\alpha = \frac{AG}{(AG-\chi P)} \frac{PL^2}{EI_0}$ y $\beta = \frac{L^4}{EI_0}$. El espacio apropiado para ubicar el

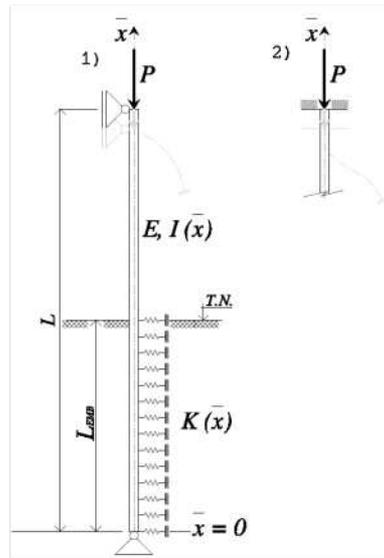


Figura 1: Pilote apoyado de punta en $\bar{x} = 0$. 1): indesplazable en $\bar{x} = L$; 2): giro nulo e indesplazable en $\bar{x} = L$.

problema de contorno (2) asumiendo $k, I \in L^2(\Omega)$, es

$$V(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega), \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0\}. \quad (3)$$

Para derivar la formulación débil se aplica el procedimiento habitual, es decir

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{I(x)}{I_0} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + \alpha \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} v(x) dx + \int_0^{\frac{L_{EMB}}{L}} \beta k(x) w(x) v(x) dx = 0, \quad (4)$$

para toda $v \in V(\Omega)$, con $k(x) = 0$ entre $L_{EMB}/L < x \leq 1$. La aplicación de la fórmula de integración por partes dos veces al primer término de la integral en (4), de una vez al segundo término y considerando las condiciones de contorno del problema, conducen a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{I_0} \int_0^1 I(x) w''(x) v''(x) dx - \alpha \int_0^1 w'(x) v'(x) dx + \beta \int_0^{\frac{L_{EMB}}{L}} k(x) w(x) v(x) dx = 0, \quad (5)$$

En consecuencia, la formulación débil resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w \in V(\Omega) \text{ tal que} \\ a(w, v) - \alpha (w', v')_{L^2} = 0, \quad \forall v \in V(\Omega), \end{array} \right. \quad (6)$$

en donde

$$a(w, v) = \frac{1}{I_0} \int_0^1 I(x) w''(x) v''(x) d(x) - \alpha \int_0^1 w'(x) v'(x) d(x) \quad (7)$$

$$\text{y} \quad (w', v')_{L^2} = \beta \int_0^{L_{EMB}/L} k(x) w(x) v(x) d(x) \quad (8)$$

La formulación (6) es un problema de autovalores y la existencia y unicidad de su solución no son tratadas en este trabajo, pero pueden ser probadas.

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN

A partir de la formulación variacional obtenida en la sección anterior, es posible aplicar el método de Galerkin para obtener valores aproximados de los coeficientes adimensionales α de cargas críticas.

Si se considera el espacio de dimensión finita $V^h(0, 1) \subset H^2(0, 1)$, el planteo de la formulación débil (6) en este espacio resulta:

$$\begin{cases} \text{Hallar } w_h \in V^h(\Omega) \text{ tal que} \\ a(w_h, v_h) - \alpha (w'_h, v'_h)_{L^2} = 0, \quad \forall v_h \in V^h(\Omega). \end{cases} \quad (9)$$

Toda función perteneciente a V^h puede ser expresada como combinación lineal de una base, por lo tanto, w_h, v_h resultan:

$$w_h = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \quad v_h = \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i, \quad (10)$$

en donde las $\varphi_i(x)$ son funciones de la base de V^h y N la cantidad de funciones para una aproximación requerida o deseada.

Al reemplazar las expresiones (10) en la (9) y operar de forma algebraica, se obtiene el siguiente problema de autovalores:

$$(K - \alpha M) C = 0, \quad (11)$$

en la cual las matrices K y M son simétricas y C es el vector de los parámetros desconocidos c_j . Los componentes K y M se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= a(\varphi_i, \varphi_j), \\ M_{i,j} &= (\varphi'_i, \varphi'_j)_{L^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Puede consultarse en Albarracin et al. (2016) su aplicación y su comparación satisfactoria con los resultados obtenidos y publicados para problemas clásicos con otros métodos (Wang et al., 2005): <https://www.ucasal.edu.ar/contenido/2017/pdf/cuaderno-ingenieria-9-ultima-version.pdf>, página 7.

4. APLICACIÓN A UN SISTEMA DE FUNDACIÓN PILOTE-PILA DE PUENTES

La inestabilidad del equilibrio elástico es una condición a tener en cuenta en el caso de pilas (columnas), particularmente cuando se trate de pilas muy esbeltas. Es común en puentes altos la construcción de pilas individuales hasta el tablero carretero como continuidad desde el pilote de fundación. Proponemos analizar el comportamiento al equilibrio elástico global como una estructura continua de pilote (parte embebida en el suelo) y pila aislada.

Consideramos al pilote apoyado de punta en suelo resistente, asumiendo de forma simplificada un apoyo fijo y giro libre de la sección en $\bar{x} = 0$ (Figura 1), condición que puede darse en la práctica. La pila es la parte de la estructura que se eleva desde el nivel del terreno natural (o lecho) hasta el nivel del tablero del puente para recibir y transferir la carga.

4.1. Ejemplo de aplicación y comparación con resultados publicados

Siguiendo con el problema de contorno (2) (Figura 1.1), compararemos los resultados obtenidos aplicando el método de Galerkin con otros conseguidos a través del método de transformación diferencial (ó DTM, siglas del idioma inglés para Differential Transform Method) y con la solución analítica de la ecuación diferencial (Çatal et al., 2006).

La base adoptada para el espacio V^h (ver 3) en este problema de contorno, es:

$$\{\varphi_1(x) = (x-1)x, \quad \varphi_i(x) = \varphi_1(x) + (x-1)x^i; \quad i = 2, 3, \dots, N\}. \quad (13)$$

Aplicando el método de Galerkin se obtienen los valores de la última columna de la Tabla 1 a

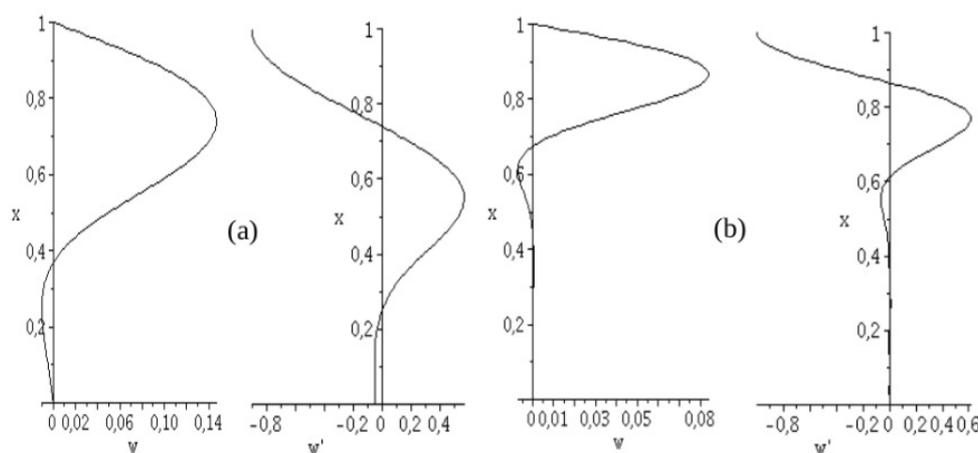


Figura 2: Primer modo de pandeo y función derivada aplicando el método de Galerkin para: (a) $L = 21,0$ m y $L_{EMB}/L = 0,5$; (b): $L = 37,35$ m y $L = 21,0$ m y $L_{EMB}/L = 0,75$.

partir de los datos y parámetros dados en el ejemplo, que Çatal et al. (2006), desarrollan para este problema de contorno (Figura 1.1). Se comparan los resultados para el primer modo y 2 configuraciones de longitud distintas, Conf. (a) y (b). En la Figura 2, se grafican el primer modo y la función derivada para ambas configuraciones (a) y (b), que resultan al aplicar el método de Galerkin. Los datos y parámetros empleados son (Çatal et al., 2006): $I = 1,39 \times 10^{-3} m^4$; $E.I = 291,9 MPa$; $A.G = 2053,791 MN$; $\chi = 1/0,4347$; $k(x).b = 15 MPa$.

4.2. Módulo de Reacción del subsuelo

Para modelar el subsuelo a través de las restricciones laterales aplicamos el concepto de módulo de reacción del suelo (o subsuelo). La correcta estimación de este módulo no es trivial

		DTM (Çatal, S. et al., 2006			Galerkin, $N = 14$
Conf.	L_{EMB}/L	$L[m](1)$	$N_{cr}/N_E(2)$	$N_{cr}[MN](3)$	$P_{critico}[MN]$
(a)	0,5	21,00	4,682876	30,5826	30,5827
(b)	0,75	37,35	17,571108	36,2879	36,2508

Tabla 1: Desde Çatal et al., 2006: (1)Tabla 1; (2)Tabla 2(b); (3)desde (2) y $N_E(Euler)$.

y no está exenta de una serie de hipótesis simplificativas que arrojan una serie de dudas sobre su evaluación; no pocos investigadores han trabajado en la estimación del módulo de reacción para distintas estructuras apoyadas y otras enterradas en el subsuelo; entre otros, Terzaghi (1955); Davisson et al. (1965); Prakash et al. (1990); Bowles, J.E. (1997). La mayor parte de estos análisis se basan en el estudio del módulo elástico de reacción vertical del suelo.

Gran parte de los trabajos que tratan sobre la reacción lateral del subsuelo en estructuras enterradas se derivan de los estudios de Vesic (1961, 1977), el cual fundamentó su análisis inicialmente, en las hipótesis de Winkler (1867) y Biot, M.A. (1937). Vesic concluye que puede conseguirse una muy buena aproximación al estudio de una viga de longitud infinita, sometida a flexión y cortante y apoyada sobre el subsuelo considerado éste como un medio elástico, homogéneo e isótropo y semi-infinito, haciendo uso de la hipótesis de Winkler.

Winkler postula que la relación entre la presión de contacto entre la viga y el suelo y la deflexión de la viga, se mantiene constante en toda su longitud:

$$\frac{p}{w} = ctte = k_o \quad (14)$$

Siguiendo la formulación clásica para una viga apoyada en un medio elástico, asumimos que para un ancho b de la viga, la reacción por unidad de longitud y un descenso unitario es $K = k_o \cdot b$ en MPa. Entonces para un descenso η la reacción distribuida será:

$$r = K\eta \quad (15)$$

Si la viga está sometida a una carga distribuida de intensidad $q(\bar{x})$ la fuerza total distribuida por unidad de longitud de viga es $(q - r = q - K\eta)$ siendo la ecuación diferencial de la línea elástica:

$$E_b I_b \frac{d^4 \eta}{dx^2} = q - K\eta; \quad \text{y para } q(\bar{x}) = 0, \quad \eta^{IV} + 4\lambda^4 \eta = 0. \quad (16)$$

y a partir de la (16) tenemos:

$$\lambda^4 = \frac{K}{4E_b I_b} \quad \text{y} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4E_b I_b}} \quad (17)$$

en la cual λ es la inversa de una longitud.

La solución general de la ecuación (16) (teniendo en cuenta sólo los términos amortiguados por consistencia física), será de la forma:

$$\eta = C_1 e^{-\lambda \bar{x}} \sin(\lambda \bar{x}) + C_2 e^{-\lambda \bar{x}} \cos(\lambda \bar{x}) \quad (18)$$

Por otro lado, Biot, M.A. (1937) obtiene la solución a flexión para una viga de ancho b con una carga puntual P y también para un momento concentrado M bajo las mismas hipótesis. Define un parámetro c , como la longitud fundamental de la viga con apoyo continuo:

$$c = \sqrt[3]{C(1 - \mu_s^2) \frac{E_b I_b}{E_s}} \quad (19)$$

en la cual, E_b : Módulo de elasticidad de la viga; μ_b : Módulo de Poisson de la viga; I_b : Momento de inercia de la viga; E_s : Módulo de elasticidad del subsuelo; C : parámetro adimensional que se define entre 1.0 y 1.13. Depende de la distribución de tensiones en el ancho b , siendo $C = 1,0$ para la distribución uniforme.

Vesic (1961), siguiendo un procedimiento riguroso, evalúa numéricamente las integrales en la solución de Biot y las aproxima en función de la relación b/c llegando en su desarrollo a una solución de onda amortiguada con un factor de amortiguamiento:

$$\lambda = \frac{0,689}{b} \left(\frac{b}{c} \right)^{0,813} \quad (20)$$

Vesic remarca que este factor puede ser equiparado al factor de amortiguamiento λ dado en la (17), que es función del módulo de reacción del suelo (o subsuelo) K y del cual se puede extraer su valor. Propone como expresión para el módulo de reacción del suelo:

$$k_{\infty} B = K_{\infty} = \frac{0,9}{C} \sqrt[12]{\frac{E_s b^4}{E_b I_b} \frac{E_s}{1 - \mu^2}} \quad (21)$$

Introduciendo en (21) $B = 2b$ (Vesic, 1961) y $C = 1,10$ como un valor que Vesic considera correcto para cualquier propósito práctico, queda:

$$K_{\infty} = 0,65 \sqrt[12]{\frac{E_s B^4}{E_b I_b} \frac{E_s}{1 - \mu^2}} \quad (22)$$

A partir de la (22) y observando que el módulo de reacción lateral del suelo puede variar en profundidad en función de su módulo de elasticidad, haciendo $B = D$, diámetro del pilote, es posible el ajuste en profundidad de la expresión de Vesic:

$$K_{Vesic}(\bar{x}) = 0,65 \sqrt[12]{\frac{E_s(\bar{x}) D^4}{E_b I_b(\bar{x})} \frac{E_s(\bar{x})}{1 - \mu^2}}, \quad \text{en MPa.} \quad (23)$$

La expresión (23) permite que el módulo de reacción pueda ser constante o variable. Es de interés particular la variación de K en función de la profundidad al variar $E_s(\bar{x})$, lo que permite ajustar el valor del módulo de reacción en función de las observaciones experimentales en el comportamiento de pilotes embebidos en suelos que van desde las arenas a las arcillas. Para los suelos puramente friccionantes, la experiencia admite una variación lineal o cuasi lineal para el módulo de reacción (Bowles, J.E., 1997); mientras que para los suelos cohesivos se considera suficiente considerar a K constante (Pochman et al., 1989).

Proponemos aplicar una función de ajuste en profundidad, que permita calibrar la (23):

$$E_s(\bar{x}) \cong E_{s(Ref)} \left[s_o + \left(\frac{\bar{x}}{z_o} \right)^n \right]^{\frac{1}{m}} \quad \text{y} \quad K(\bar{x}) \cong K_{Vesic}(\bar{x}) \quad \text{ambas en MPa,} \quad (24)$$

siendo s_o : adimensional, en general 1 (arcillas) o 0 (arenas), ajusta el valor del módulo de elasticidad en la superficie del terreno; $E_{s(Ref)}$, Z_o : valores de referencia para el módulo de elasticidad del suelo y profundidad; \bar{x} : longitud embebida en el subsuelo; n : factor de ajuste adimensional (por ejemplo, 1 para suelos no cohesivos); m : factor de ajuste adimensional (por ejemplo, 1 para suelos no cohesivos).

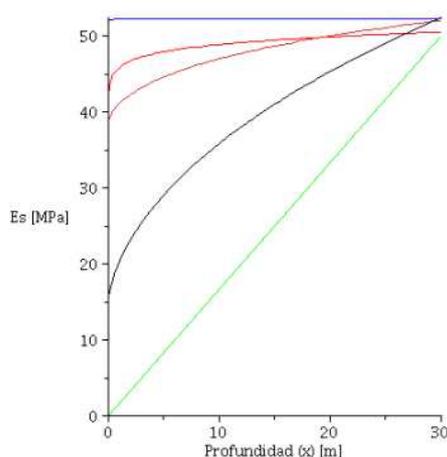


Figura 3: Variación de E_s con la profundidad.

A modo ilustrativo, en la Figura 3 se grafican curvas teóricas para la variación de $E_s(\bar{x})$ obtenidas con (24), para $E_{s(Ref)} = 50$ MPa, $Z_o = 30$ m, con los valores de ajuste comenzando desde la curva casi constante arriba en la figura, y hacia abajo: a) $s_o = 1$, $n = 0,01$, $m = 15,5$; b) $s_o = 0,25$, $n = 0,7$, $m = 5,5$; c) $s_o = 0,1$, $n = 0,3$, $m = 9,0$; d) $s_o = 0,1$, $n = 0,8$, $m = 2,0$; e) $s_o = 0$, $n = 1$, $m = 1$;

4.3. Aplicación para un caso particular: obtención de la carga crítica y modo fundamental con estimación de la longitud de empotramiento elástico del pilote

Se muestra una aplicación más del método propuesto para una estructura pilote-pila de puente considerando en el extremo $\bar{x} = L$ giro nulo para la sección e indesplazable (Figura 1.2). El pilote de sección circular con diámetro D se halla embebido en una arcilla de resistencia media con: $E_{s(Ref)} = 50$ MPa, AASHTO (2017), Sección 10, Tabla 10.6.2.2.3b-1, (Bowles, J.E., 1988); y una longitud total $L = 20$ m para el conjunto, siendo la longitud del pilote $L_{EMB} = 10$ m (longitud embebida), y apoyo de punta en suelo resistente en $\bar{x} = 0$ (Figura 1).

Para obtener expresiones en forma adimensional, se adopta $x = \bar{x}/L$ resultando:

$$k_1(x) = K_{Vesic} \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) = K_{Vesic} (1 - x), \quad k_2(x) = 0. \quad (25)$$

Con la (25), se propone la siguiente restricción elástica para aplicar en la (7):

$$k(x) = \begin{cases} 0,65^{12} \sqrt{\frac{E_s(1-x)^{64,0}}{\pi E_b} \frac{E_s(1-x)}{(1-\mu^2)}}; & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0; & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (26)$$

El problema de contorno (Figura 1.2) en forma adimensional resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{I(x)}{I_0} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] + \alpha \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \beta k(x) w(x) &= 0, \quad \forall x \in (0, 1); \\ w(x)|_{x=0} &= 0, \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad y \quad w(x)|_{x=1} = 0, \quad \frac{dw(x)}{dx} \Big|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

un procedimiento análogo al caso anterior conduce a las mismas ec. (6), (7) y (8), siendo el espacio apropiado para ubicar este nuevo problema, asumiendo $k, I \in L^2(\Omega)$:

$$V(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega), \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad v'|_{x=1} = 0\}. \quad (28)$$

La base adoptada para el espacio V^h es:

$$\{\varphi_1(x) = x/6 - x^3/2 + x^4/3, \quad \varphi_i(x) = \varphi_1(x) + (x-1)^2 x^{(i+2)}; \quad i = 2, 3, \dots, N\}. \quad (29)$$

La expresión (23) se ajusta a través de la (24) con: $Z_o = 30$ m; $s_o = 1$, $n = 0,1$, $m = 15,5$, $\mu = 0,3$. En la Figura 3 (izq) se muestra la variación de $k(x)$ en profundidad (ec. 26). Los restantes datos para el ejemplo son: $D_{pilote} = D_b = 0,40$ m; $\mu_b = 0,2$; $E_b = 4700\sqrt{f'_c}$ MPa, con $f'_c = 25$ MPa.

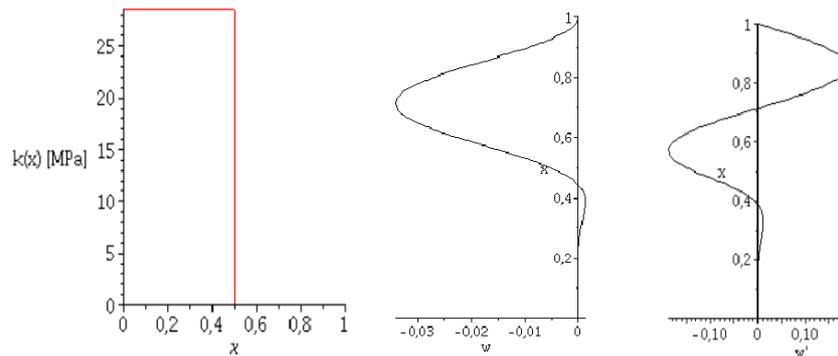


Figura 4: Variación del módulo de reacción de suelo $k(x)$ (izq), primer modo (ctro) y función derivada (der).

Un resumen de los resultados obtenidos para el primer modo con $L = 20$ m y $L_{EMP}/L = 0,5$, aplicando el método de Galerkin con el espacio dado por (28) y la base adoptada en (29) se muestra en la Tabla 2.

Galerkin	$N = 20$	$N = 30$
$P_{critico}$ [MN]	8,79497	8,79359
L_{libre} [m]	12,275	12,295
L_{empot} [m]	7,725	7,705

Tabla 2: Carga crítica y longitudes características para el primer modo.

En la Figura 4 (centro y derecha) se grafican el modo fundamental de pandeo y la función derivada respectivamente. En la Tabla 2 se transcriben la carga crítica de pandeo, la longitud libre de pandeo y en la última línea la longitud de empotramiento elástico del pilote L_{empot} , que es la longitud embebida desde $x = 0$ hasta la sección del pilote con giro nulo ($w' = 0$) más próxima a la superficie del terreno natural (o lecho). A partir de la posición de esta sección aproximamos la longitud de pandeo libre como: $L - L_{empot}$.

Las especificaciones AASHTO (2017) en su sección 10 -10.7.4.2; (Davisson et al., 1965)-permite la estimación de la profundidad a partir de la cual puede considerarse empotrado el pilote en arcilla, con $1,4(E_p I_p / E_s)^{0,25}$. Mientras que con el método de Galerkin obtenemos una longitud de empotramiento elástico $L_{empot} \simeq 7,70$ m (última línea de la Tabla 2), con esta última expresión (AASHTO, 2017) la longitud de empotramiento elástico se estima en 8,77 m.

5. CONCLUSIONES

El método de Galerkin se presenta simple de implementar en computadoras y sin perder flexibilidad para el análisis de diferentes problemas, puede emplearse en aquellos de interés

en la ingeniería aplicada. En la práctica, la estimación del módulo de reacción del suelo no resulta sencilla y la expresión propuesta por Vesic (1961) constituye una buena alternativa para la etapa de proyecto. Es aconsejable durante el diseño ejecutivo, obtener valores experimentales y de laboratorio para generar y calibrar las curvas apropiadas para los estratos del subsuelo en estudio. En el último ejemplo se muestran la longitud de empotramiento elástico obtenida con el método de Galerkin y la obtenida a través de la 10.7.4.2-1 de la AASHTO (2017), haciendo notar que esta expresión empírica se limita a tener en cuenta el estrato cercano a la superficie. Una vez ajustados los valores y parámetros durante el diseño ejecutivo, el método de Galerkin proporciona datos necesarios para el diseño estructural como son la longitud de pandeo y la carga crítica, pudiendo modelarse las condiciones de vínculo ajustadas a la realidad física de la estructura. Como objetivos próximos, se prevé la extensión del modelo para cargas axial y lateral simultáneas con restricciones elásticas en los extremos y fricción lateral en el pilote embebido, que permitirían modelar y abordar situaciones más generales a las mostradas en este trabajo.

REFERENCIAS

- Albarracin, C.M., Albarracin, F.J., y Orosco Segura, L.E., Aplicación del Método de Galerkin al análisis de la estabilidad del equilibrio elástico de columnas. *Cuadernos de Ingeniería, Universidad Católica de Salta, Salta*, ISSN2545-692X, vol 9, 2016:7-15, 2016.
- American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), AASHTO LRFD Bridge Design Specifications. AASHTO, 8th Edition, 2017.
- Biot, M.A. Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation. *Journal of Applied Mechanics, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, volumen 59, pp. A1-A7, 1937.
- Bowles, J.E. Foundation Analysis and Design. *McGraw-Hill, New York, NY*, 4th edition. p. 1004, 1988.
- Bowles, J.E. Foundation Analysis and Design. *McGraw-Hill Book Company, New York*, 5th edition. ISBN 0-07-118844-4, 1997.
- Çatal S., and Çatal H.H. Buckling analysis of partially embedded pile in elastic soil using differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, volumen 24, No. 2 (2006) 000-000, 2006.
- Davisson, M.T., and Robinson, K.E. Bending and Buckling of Partially Embedded Piles. *Proc. Sixth International Conference S.M. and F.E.*, University of Toronto Press, 1965.
- Pochman, R., and Simek, J. Pilotove zaklady – Komentar k CSN 73 1002. 1st edition, Prague, Vydavatelstvi norem, 80 p, 1989.
- Prakash, S., and Sharma, H.D. Pile Foundations in Engineering Practice. *John Wiley and Sons, Inc.*, New York, 1990.
- Terzaghi, K. Evolution of Coefficients of Subgrade Reaction. *Geotechnique*, volumen 5, N° 4, 1955.
- Vesic, A.S. Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid. *JSMFD, ASCE*, volumen 87, EM 2: pp. 35 – 53, 1961.
- Vesic, A.S. Design of Pile Foundations. *National Cooperative Highway Research Program Synthesis 42, Transportation Research Board, Washington D.C.*, 1977.
- Wang C.M., Wang, C.Y. and Reddy, J.N. Exact Solutions for Buckling of Structural Members. *CRC PRESS*, 2005.
- Winkler, Die Lehre von Elasticitaet und Festigkeit. Prag 1867, H. Dominicus, pp. 182-184, 1867.