

FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS PARA MODELAR DISPOSITIVOS RECOLECTORES DE ENERGIA ROTANTES

José. M. Ramírez^{a,c}, Claudio D. Gatti^{a,c}, Sebastián. P. Machado^{a,c} y Mariano Febbo.^{b,c}

^a *Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional FRBB (UTN), 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina.*

^b *Instituto de Física del Sur (IFISUR), Departamento de Física. Universidad Nacional del Sur (UNS). Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).*

Palabras claves: Elementos finitos, Materiales piezoeléctricos, Recolectores de energía.

Resumen. Los dispositivos recolectores de energía piezoeléctricos convierten la energía mecánica en energía eléctrica debido a las deformaciones mecánicas de las estructuras. Los prototipos de recolección de energía se utilizan para alimentar dispositivos y sensores electrónicos de baja potencia. En este trabajo, se desarrolla un elemento finito unidimensional para el modelado de recolectores de energía tridimensionales rotantes. La viga piezoeléctrica rotante se formula mediante un elemento finito geoméricamente no lineal con seis grados de libertad mecánicos y un grado de libertad eléctrico por nodo. Utilizando la teoría de viga de Timoshenko para el dominio mecánico y una teoría de primer orden para el campo eléctrico, las ecuaciones de equilibrio electromecánico se derivan usando el principio D'Alembert. Con el fin de validar la formulación de elementos finitos, se construyen y ensayan dos dispositivos de recolección de energía, obteniéndose información sobre la generación de energía eléctrica, las frecuencias naturales y las respuestas temporales de las variables dinámicas. Una placa Arduino se implementa como sistema de adquisición de datos que transfiere la señal de voltaje a través de Bluetooth. Finalmente, los resultados de nuestra formulación se comparan con los obtenidos utilizando un software comercial (Abaqus) y los resultados experimentales. Se obtiene una buena correlación entre los tres métodos, proporcionando evidencia de que la formulación propuesta predice con precisión el comportamiento de los recolectores de energía rotantes.

1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento dinámico de las estructuras rotantes ha sido estudiado durante muchos años. Hay numerosos artículos en la literatura que analizan la vibración de las vigas rotantes. [Carnegie \(1959\)](#) investigó la vibración de una pala en voladizo, obteniendo una expresión teórica para el trabajo realizado debido a efectos centrífugos y de Coriolis. [Boyce et al. \(1961\)](#) estudiaron la vibración transversal y la influencia de una masa colocada en el extremo libre de una viga en voladizo teniendo en cuenta una velocidad constante. [Hoa \(1979\)](#) propuso un método de elementos finitos (FE) para investigar la frecuencia de vibración de una viga en voladizo con una masa en la punta. El método de elementos finitos se basó en un polinomio de tercer orden para la variación del desplazamiento lateral. [Geradin et al. \(1984\)](#) desarrollaron un nuevo enfoque para el modelado de elementos finitos aplicado a rotores flexibles con el fin de realizar el análisis de estabilidad. Sus modelos se desarrollaron mediante un sistema de referencia giratorio y otro sistema de referencia inercial. En ambos casos se propone un elemento finito asimétrico. Las hélices de aeronaves y las palas de aerogeneradores son aplicaciones de las investigaciones sobre el comportamiento dinámico de las estructuras giratorias. Recientemente, los materiales compuestos se han utilizado en la estructura principal para aumentar el rendimiento de las palas o hélices. [Saravia et al. \(2011\)](#) investigaron el comportamiento de estabilidad dinámica de vigas rotantes de pared delgada de material compuesto utilizando el método de elementos finitos. Debido a la flexibilidad de las estructuras compuestas, el control de las vibraciones es esencial ([Choi et al., 2003](#)). Por esta razón, en las últimas décadas se ha estudiado la inclusión de materiales inteligentes en la estructura principal. La reducción de las vibraciones se mejora mediante el control activo en las estructuras con actuadores piezoeléctricos. Los materiales piezoeléctricos suelen ser de interés al diseñar estructuras inteligentes que se pueden utilizar como sensores o actuadores ([Choi et al, 2006](#)), ([Brockmann et al. 2006](#)). En los últimos años, la recolección de energía ha recibido cada vez más atención debido a sus aplicaciones. Convierte la energía residual en energía eléctrica utilizable, o en otras palabras, las vibraciones mecánicas se convierten en energía eléctrica, utilizada para alimentar dispositivos móviles y redes de sensores inalámbricos ([Beeby et al., 2006](#)). Muchos investigadores han derivado modelos matemáticos de recolectores de energía basados en teorías de vigas ([Erturk et al., 2011](#)); La mayoría de ellos han utilizado la teoría de Bernoulli-Euler con una excitación armónica en la base. [Erturk et al \(2008\)](#), [Erturk et al. \(2009\)](#) estudiaron un modelo electromecánico de parámetros distribuidos para los recolectores de energía piezoeléctricos en voladizo. [Mitcheson et al. \(2008\)](#) presentaron una revisión del estado del arte de los dispositivos de recolección de energía, incluyendo posibles aplicaciones y desarrollos futuros.

También se utilizan modelos de placas de elementos finitos para investigar las estructuras piezoeléctricas bajo el movimiento armónico en la base. [De Marqui Junior et al. \(2009\)](#) propusieron un modelo de placa de elemento finito acoplado electromecánicamente para predecir la salida de energía eléctrica de las placas del recolector de energía piezoeléctrica. La excitación se debe al movimiento armónico de la base en la dirección transversal. [Detwiler et al. \(1995\)](#) formularon una placa compuesta laminada con material piezoeléctrico para analizar el comportamiento mecánico-eléctrico. La superficie superior e inferior de la viga se sometió a un potencial eléctrico de 1 V a través del espesor de la viga y se determinaron los desplazamientos correspondientes. Por otro lado, existen varios programas de elementos finitos (como Abaqus o ANSYS) para el modelado de materiales piezoeléctricos. [Kumar et al. \(2014\)](#) analizaron el rendimiento de los materiales piezoeléctricos sin plomo en recolectores usando vigas cantiléver. El método de elementos finitos se utilizó para modelar la estructura piezoeléctrica, mientras que la optimización del algoritmo genético se utilizó para optimizar la

potencia de salida. [Staworko et al. \(2008\)](#) presentaron una visión general de las técnicas de modelado de elementos piezoeléctricos y su comparación con software comercial para simular sistemas electromecánicos. Los modelos construidos utilizando Simulink y PSPICE dan una ligera diferencia de la frecuencia de vibración con respecto a la simulación de Ansys, mientras que las amplitudes de la respuesta temporales utilizando Simulink y PSPICE son tres veces mayores que las obtenidas con Ansys. [Elvin et al. \(2009\)](#) desarrollaron un modelo acoplado de simulación de circuitos-elemento finito utilizando paquetes de software de elementos finitos. Para el dominio mecánico, un método de elementos finitos se utilizó para calcular la respuesta dinámica. En el dominio eléctrico, se utilizó la herramienta de simulación SPICE para calcular la respuesta. Este enfoque permite el modelado de geometrías mecánicas complejas. Sin embargo, la técnica de solución es computacionalmente costosa para modelos grandes. [Zhou et al. \(2012\)](#) propusieron un sistema de SDOF equivalente para describir el rendimiento de recolección de energía de una viga en voladizo. La potencia de salida máxima y el voltaje se compararon con la simulación numérica utilizando el paquete comercial de FE Ansys.

En los últimos años se han publicado varias investigaciones sobre los recolectores de energía rotantes. [Lei et al. \(2010\)](#) presentaron un modelo de un solo grado de libertad (SDOF) teniendo en cuenta la fuerza centrífuga de la masa de la punta del recolector de energía rotante. [Khameneifar et al. \(2012\)](#), [Khameneifar et al. \(2010\)](#) también presentaron un modelo analítico con un SDOF considerando la fuerza centrífuga de la masa en la punta y la fuerza de gravedad de todo el modelo. [Guan et al. \(2016\)](#) desarrollaron un nuevo diseño de una estructura de recolección rotante utilizando un modelo analítico que asume toda la masa del sistema en las fuerzas centrífugas y de gravedad. Los autores analizaron el dispositivo, teóricamente y experimentalmente. Sus resultados no predicen con suficiente precisión los ensayos experimentales. [Shahrz et al. \(2008\)](#) propusieron un modelo matemático SDOF de una viga en voladizo con una masa en la punta considerando toda la masa del sistema en fuerzas centrífugas y de gravedad. [Yang et al. \(2014\)](#) investigaron experimentalmente una mejora de la potencia de salida de un recolector de energía rotante usando piezoeléctricos. Propusieron una fuerza de impacto para permitir una excitación efectiva. Por otra parte, [Jin-Chen et al. \(2014\)](#) utilizaron un paquete de software de elementos finitos (COMSOL) para simular una viga en cantiléver con una masa en la punta. Ellos analizaron la frecuencia de auto-sintonía en recolectores piezoeléctricos rotantes. Su modelo FE tiene en cuenta la deformación por corte, el efecto piezoeléctrico y el efecto de rigidez inducido por las fuerzas centrífugas de toda la masa. Sus resultados fueron comparados con un modelo analítico y ensayos experimentales.

En las referencias anteriores, el análisis de los dispositivos de recolección de energía se limitó a geometrías simples, tales como vigas en cantiléver ([Lei et al. 2010](#), [Khameneifar et al. 2012](#), [Khameneifar et al. 2010](#)). En las referencias [Guan et al. \(2016\)](#) y [Shahrz et al. \(2008\)](#) se consideraron las fuerzas centrífugas y gravitatorias aplicadas al sistema SDOF en el modelo FE, pero el efecto de ablandamiento inducido por la velocidad de rotación fue despreciado. En [Jin-Chen et al. \(2014\)](#) desarrollaron un modelo de FE utilizando un software comercial (COMSOL) basado en elementos sólidos tridimensionales (3D) para modelar el recolector de energía rotacional. Este enfoque permite resolver las dificultades mencionadas anteriormente, pero tiene un gran costo computacional debido a los elementos 3D. En el presente trabajo, a diferencia de la literatura científica actual, se desarrolla un elemento finito unidimensional para modelar dispositivos de recolección de energía rotantes en 3D. Dentro de este enfoque es posible modelar configuraciones geométricas complejas, el efecto geométrico no lineal inducido por las fuerzas centrífugas y el acoplamiento electromecánico. La viga piezoeléctrica se formula mediante un FE geométrico no lineal con seis grados de libertad

mecánicos por nodo y un grado de libertad eléctrico interpolado usando funciones de forma lineal estándar. La teoría de viga Timoshenko se utiliza para el dominio mecánico (Saravia et al. 2011) y una teoría de primer orden se utiliza para el dominio eléctrico (Butz et al. 2003).

El presente artículo se organiza de la siguiente manera. Después de la introducción, la cinemática de la viga piezoeléctrica rotante se presenta en la sección 2. La sección 3 presenta los detalles del principio variacional para derivar las ecuaciones de equilibrio usando el principio de D'Alembert. La sección 4 presenta la formulación del elemento viga piezoeléctrica. La sección 5 contiene la configuración experimental para validar el enfoque FE propuesto. La sección 6 muestra una comparación de las frecuencias naturales entre la formulación FE propuesta y las simulaciones numéricas con Abaqus. La respuesta temporal de voltaje y la generación de voltaje y potencia de la formulación propuesta también se comparan con los resultados experimentales. Finalmente, la sección 7 presenta las conclusiones.

2 CINEMÁTICA

Los principales aspectos de la presente formulación de recolector rotante de energía son:

- La cinemática está basada en la teoría de Timoshenko.
- El potencial eléctrico es una interpolación lineal a través del espesor.
- El material piezoeléctrico es constitutivamente lineal.

2.1 Sistema de referencia

Los sistemas de referencia global y local usados son como se puede apreciar en la Figura 1.

- Sistema de referencia Global $\{O, x, y, z\}$.
- Sistema de referencia Local $\{T, X', Y', Z'\}$.

Una viga 3D es un sólido de longitud L orientado en la dirección longitudinal x' . El área transversal A con dimensiones en plano $Y'Z'$ es ortogonal a X' y es relativamente pequeña con respecto a la dirección longitudinal. El punto c es el centro de corte y si el centro de corte c y el punto neutro T no coinciden, existe un acoplamiento entre axial/flexión y flexión en las direcciones x e y . Para secciones sólidas homogéneas los puntos T , g (punto neutro y centro de gravedad) y c son coincidentes, caso contrario sucede para vigas compuestas, donde dichos puntos no coinciden.

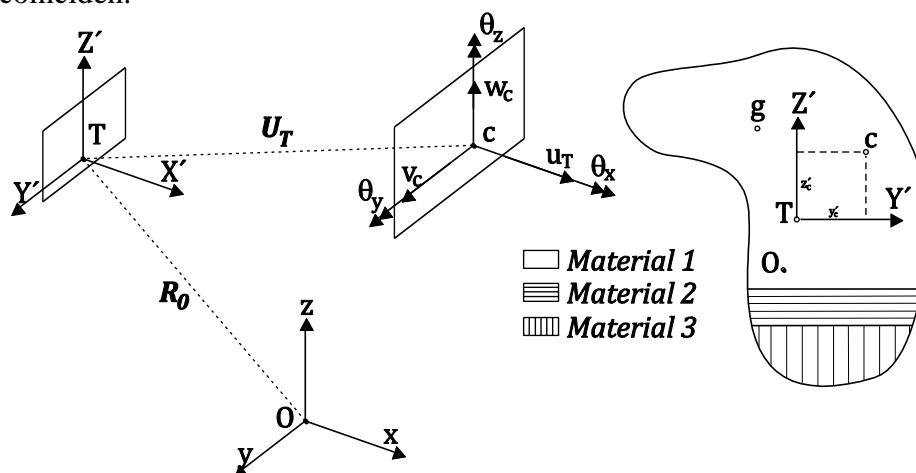


Figura 1: Sistema de referencia Global: $\{O, x, y, z\}$ y Sistema de referencia Local $\{T, X', Y', Z'\}$. Centro de gravedad y corte (g and c).

2.2 Desplazamientos

La teoría de vigas de Timoshenko se utiliza para obtener la dinámica de viga rotante (Oñate, 2013). Se supone que el centro de corte c y T no coinciden y por lo tanto, existe un acoplamiento entre los efectos axial, flexión/corte y torsional. En el sistema local $\{T, X', Y', Z'\}$, el desplazamiento puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_T + Z'\theta_{Y'} - Y'\theta_{Z'} \\ v_c - (Z' - Z'_c)\theta_{X'} \\ w_c + (Y' - Y'_c)\theta_{Y'} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{U}_T = [u_T, v_c, w_c, \theta_{X'}, \theta_{Y'}, \theta_{Z'}]^T \quad (2)$$

Donde u_T es el desplazamiento axial en el punto neutro T , e Y'_c y Z'_c son las coordenadas del centro de corte c .

Trabajando con el sistema global $\{O, x, y, z\}$, se puede obtener el siguiente campo de desplazamiento para un punto arbitrario de coordenadas:

$$\mathbf{U} = [u(x, t), v(x, t), w(x, t), \theta_x(x, t), \theta_y(x, t), \theta_z(x, t)]^T$$

donde el apóstrofe indica que está relacionada con el sistema local y t es la variable temporal. Este sistema es paralelo al sistema global. u , v y w son los desplazamientos globales, θ_x , θ_y y θ_z representan las rotaciones globales.

El vector instantáneo de posición de un punto en la configuración deformada Librescu (2006) se puede escribir como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{S}_M \mathbf{U} \quad (3)$$

donde \mathbf{R}_0 es el punto de la viga en la configuración no deformada y \mathbf{S}_M es la matriz de sección transversal.

2.3 Velocidad y aceleración

Para el caso general de un elemento estructural que está rotando en el espacio, podemos escribir la velocidad absoluta y la aceleración de un punto (Saravia et al. 2011). Las velocidades y aceleraciones generalizadas se definen como:

$$\mathbf{V}_G = [\dot{u}(x, t), \dot{v}(x, t), \dot{w}(x, t), \dot{\theta}_x(x, t), \dot{\theta}_y(x, t), \dot{\theta}_z(x, t)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_G = [\ddot{u}(x, t), \ddot{v}(x, t), \ddot{w}(x, t), \ddot{\theta}_x(x, t), \ddot{\theta}_y(x, t), \ddot{\theta}_z(x, t)]^T \quad (5)$$

2.4 Campo de deformaciones

Consideremos el tensor de deformación de Green-Lagrange según Reddy (2006):

$$L_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (6)$$

donde:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (7)$$

Podemos expresar las deformaciones de Green-Lagrange en forma vectorial como:

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = \mathbf{S}_T \boldsymbol{\epsilon}_G \quad (8)$$

Donde $\boldsymbol{\epsilon}_G$ es la deformación generalizada, y \mathbf{S}_T es la matriz de transformación de

deformación. Las tres componentes no nulas de la deformación son ϵ_{xx} , ϵ_{xy} , ϵ_{xz} . La Ec. (8) sólo tiene en cuenta las componentes no lineales de las deformaciones de Green-Lagrange simplificadas correspondientes al acoplamiento flexional-axial.

2.5 Ecuaciones constitutivas

Las componentes del tensor de tensiones y el desplazamiento eléctrico pueden derivarse de la densidad de entalpía eléctrica como Tiersten (1969):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i} \quad (9)$$

La forma de la densidad de entalpía eléctrica en la teoría linealizada de la piezoelectricidad es:

$$H = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^s E_i E_j \quad (10)$$

donde C_{ijkl} son las constantes elásticas, e_{kij} son las constantes piezoeléctricas, y ϵ_{ij}^s son las constantes de permitividad. El exponente s indica que las constantes respectivas se evalúan a deformación constante.

Usando la Ec. (9) y la Ec. (10) junto con la relación $\partial \epsilon_{ij} / \partial \epsilon_{ji} = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker, obtenemos las ecuaciones constitutivas lineales, dadas como:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{C}} & \tilde{\boldsymbol{e}}^T \\ \tilde{\boldsymbol{e}} & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_G \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde $\tilde{\boldsymbol{C}}$, $\tilde{\boldsymbol{e}}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ son el tensor de constantes elásticas, el tensor piezoeléctrico y el tensor de permitividad, respectivamente. Debe señalarse que $\boldsymbol{\epsilon}_G$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices generalizadas de deformación y tensión, respectivamente. \boldsymbol{E} y \boldsymbol{D} son el campo eléctrico y los vectores de desplazamiento eléctrico.

2.6 Campo eléctrico

La definición del vector del campo eléctrico en términos de potencial eléctrico es:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi \quad (12)$$

Ahora, el campo eléctrico se define como (Butz et al. 2003):

$$\bar{\boldsymbol{E}} = -\bar{\boldsymbol{A}} \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (13)$$

donde $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ es el grado eléctrico de libertad.

$$\bar{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_x \quad \phi_{y,y} \quad \phi_{z,z} \quad \phi_{x,x} \quad \phi_{y,yx} \quad \phi_{z,zx}]^T \quad (14)$$

La función para el potencial eléctrico es:

$$\phi(x, y, z) = \phi_x(x) + y \frac{\partial}{\partial y} \phi_y(x) + z \frac{\partial}{\partial z} \phi_z(x) \quad (15)$$

La matriz de transformación eléctrica $\bar{\boldsymbol{A}}$ es:

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y' & z' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

El potencial eléctrico es constante en este caso.

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi_z(x) = E_3 = -\frac{v}{h_e} \quad (17)$$

La matriz constitutiva eléctrica $\bar{\boldsymbol{D}}$ se obtiene por integración en la sección transversal:

$$\bar{\mathbf{D}} = \int_A \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{D} dA \quad (18)$$

Esta expresión, conceptualmente es análoga a los esfuerzos resultantes de una viga [Barbero \(2008\)](#).

3 PRINCIPIO VARIACIONAL

Para derivar las ecuaciones de equilibrio, se usa el principio d'Alembert ([Meirovitch, 1997](#)). El principio del trabajo virtual para los sistemas dinámicos es:

$$\delta\Pi = \delta W_{int} - \delta W_E + \delta W_T \quad (19)$$

3.1 Energía de deformación virtual

La energía de deformación como una contribución de la energía elástica y eléctrica es:

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^d + \delta W_{int}^e = \int_V \delta(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon}_R) dA + \int_V \delta(\bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{D}}) dV \quad (20)$$

La primera integral se debe a la deformación elástica de un cuerpo [Washizu \(1968\)](#), y la segunda integral proviene de la energía electrostática, que es igual al trabajo realizado por la carga mientras se mueve de un cátodo a un ánodo. El campo eléctrico es constante entre los electrodos:

$$\bar{\mathbf{E}} = \left[0 \quad 0 \quad -\frac{v}{h_e} \right]^T \quad (21)$$

donde h_e es la distancia entre electrodos.

3.2 Trabajo virtual de las fuerzas de D'Alembert

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia se define como:

$$\delta W_T = \int_V \rho \ddot{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{R} dV \quad (22)$$

Las fuerzas de inercia proporcionan dos términos, la inercia relativa y centrífuga ([Geradin et al. 1984](#)).

3.3 Trabajo virtual de las fuerzas externas

El trabajo virtual de las fuerzas externas puede expresarse como:

$$\delta W_E = \delta \mathbf{U} \mathbf{F}_E \quad (23)$$

donde \mathbf{F}_E es un vector que representa las fuerzas externas.

Adicionalmente, el trabajo virtual de la fuerza no conservativa para la carga eléctrica es:

$$\delta Q_E = \delta \mathbf{V} \mathbf{Q}_E \quad (24)$$

donde \mathbf{Q}_E es un vector que representa la carga eléctrica.

4 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos proporciona un enfoque para la discretización de un continuo ([Zienkiewicz, 2000](#)). En este análisis, el elemento unidimensional tiene 2 nodos por elemento con 12 grados mecánicos de libertad por elemento, 6 en cada nodo (3 desplazamientos + 3 rotaciones) y 2 grados eléctricos de libertad por elemento.

Introduciendo la discretización de elementos finitos, las deformaciones en los

desplazamientos nodales generalizadas son:

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}(\eta) \hat{\mathbf{U}} \quad (25)$$

$$\mathbf{N}(\eta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\eta) \mathbf{I}_6 \quad (26)$$

En las ecuaciones anteriores, \mathbf{N} es la matriz de función de forma lineal, $\hat{\mathbf{U}}$ es el desplazamiento nodal y \mathbf{I}_6 es la matriz unidad de 6×6 . La matriz de deformación generalizada es:

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{U}} \quad (27)$$

donde \mathbf{B}_i es la matriz de desplazamiento-deformación según el tensor de deformación del nodo i .

El vector de campo eléctrico se define como:

$$\bar{\mathbf{E}} = -\mathbf{B}_E \hat{\mathbf{V}} \quad (28)$$

donde $\hat{\mathbf{V}}$ es el voltaje nodal, y \mathbf{B}_E es:

$$\mathbf{B}_E = [0 \quad 0 \quad 1/h_p]^T \quad (29)$$

4.1 Matriz de rigidez tangente

Introduciendo la Ec. (8) en la expresión de energía de deformación virtual Ec. (20), obtenemos:

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^d + \delta W_{int}^e \quad (30)$$

$$\delta W_{int}^d = \int_L \delta(\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}})^T \mathbf{C} \mathbf{B}\hat{\mathbf{U}} dx + \int_L \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{e}^T \delta(\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}}) dx \quad (31)$$

$$\delta W_{int}^e = \int_L \delta(\mathbf{B}_E \hat{\mathbf{V}})^T \mathbf{e}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} dx - \int_L \delta(\mathbf{B}_E \hat{\mathbf{V}})^T \boldsymbol{\epsilon}^s \mathbf{B}_E \hat{\mathbf{V}} dx \quad (32)$$

Las Ecs. (31) y (32) se pueden reescribir como:

$$\delta W_{int}^d = \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_M \hat{\mathbf{U}} + \delta \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_G \hat{\mathbf{U}} - \delta \hat{\mathbf{U}}^T \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{V}} \quad (33)$$

$$\delta W_{int}^e = \delta \hat{\mathbf{V}}^T \boldsymbol{\Theta}^T \hat{\mathbf{U}} - \delta \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{C}_P \hat{\mathbf{V}} \quad (34)$$

Donde \mathbf{K}_M , \mathbf{K}_G , $\boldsymbol{\Theta}$, \mathbf{C}_P son la rigidez material, la rigidez geométrica, la matriz electromecánica y la matriz de capacidad, respectivamente. Obsérvese que el campo eléctrico se supone que es uniforme para el modo d_{31} , y la matriz de acoplamiento viene dada por:

$$\boldsymbol{\Theta} = \int_L \delta(\mathbf{B}_E \hat{\mathbf{V}})^T \mathbf{e}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} dx \quad (35)$$

Ahora, con el fin de considerar el campo eléctrico no uniforme para el modo d_{33} , asumimos un enfoque empírico (Bilgen et al. 2010), llegando a la siguiente matriz de acoplamiento:

$$\boldsymbol{\Theta} = \alpha \int_L \delta(\mathbf{B}_E \hat{\mathbf{V}})^T \mathbf{e}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} dx \quad (36)$$

donde α es una constante empírica que se utiliza para considerar el campo eléctrico no uniforme.

4.2 Matriz de rigidez geométrica

La matriz de rigidez geométrica puede expresarse como:

$$\mathbf{K}_G = T(x) \mathbf{K}_G^U \quad (37)$$

donde $T(x)$ es la fuerza del axial que actúa sobre cualquier sección a una distancia x del borde interior del elemento (Saravia et al. 2011), y \mathbf{K}_G^U es una matriz unitaria de rigidez geométrica.

4.3 Matrices dinámicas

Introduciendo las siguientes aproximaciones en las Ec. (4) y Ec. (5), obtenemos:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{V}_G = \mathbf{N} \hat{\mathbf{V}}_G, \quad \mathbf{a}_G = \mathbf{N} \hat{\mathbf{a}}_G, \quad \mathbf{U}_T = \mathbf{H} \hat{\mathbf{U}}_T \quad (38)$$

donde \mathbf{N} es la función de forma, $\hat{\mathbf{X}}$ es la coordenada nodal, $\hat{\mathbf{U}}_T$ es el desplazamiento nodal, $\hat{\mathbf{V}}_G$ es la velocidad nodal, y $\hat{\mathbf{a}}_G$ es la aceleración nodal.

Introduciendo la Ec. (38) en la Ec. (22) se llega a:

$$\delta W_T = (\hat{\mathbf{a}}_G^T \mathbf{M} + \mathbf{K}_R \hat{\mathbf{U}}_T + \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{V}}_G) \delta \hat{\mathbf{U}}_T \quad (39)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{K}_R , \mathbf{C}_c son la matriz de masa, la matriz de rigidez de rotación y la matriz de coriolis, respectivamente. Se debe tener en cuenta que la rigidez de rotación juega el papel de una rigidez negativa.

4.4 Ecuaciones de movimiento

La ecuación electromecánica de movimiento en forma de matricial es:

$$\mathbf{K}_T \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \hat{\mathbf{V}}_G + \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{V}}_G + \mathbf{M} \hat{\mathbf{a}}_G - \mathbf{\Theta} \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_E \quad (40)$$

$$\mathbf{\Theta}^T \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_p \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{Q}_E = \mathbf{0} \quad (41)$$

donde la matriz de rigidez total y la matriz de amortiguación son, respectivamente

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_R \quad (42)$$

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_T \quad (43)$$

5 ENSAYOS EXPERIMENTALES

5.1 Descripción del ensayo

La configuración experimental construida para evaluar el comportamiento dinámico del recolector de energía rotante se muestra en la Figura 2.

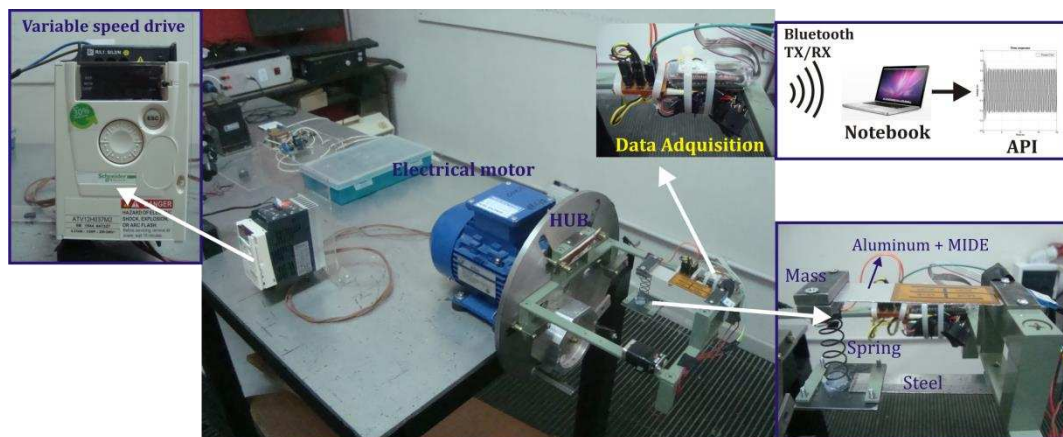


Figura 2: Configuración experimental para ensayar el recolector de energía rotante.

Una placa Arduino se utiliza para leer la señal de voltaje en tiempo real, y el protocolo de comunicación seleccionado fue Bluetooth (a 115200 baudios) ya que está disponible en casi todos los dispositivos móviles, y también en computadoras. El sistema de adquisición propuesto tiene dos partes principales: hardware y software. El hardware se compone de la plataforma Arduino, un receptor-transmisor Bluetooth y una notebook. En el caso de la adquisición, el movimiento mecánico se convierte en energía eléctrica a través del material piezoeléctrico. Esas señales son adquiridas a través de los puertos de entrada analógica en la placa Arduino, y luego convertidas mediante el convertidor analógico-digital interno. Es importante señalar que la placa Arduino está energizada por una batería de 9V debido al hecho de que este es el primer diseño del recolector de energía; En trabajos futuros, nuestro objetivo es eliminar la batería y convertir el sistema en un dispositivo recolector de energía autónomo (auto-alimentado). En cuanto al software, se programa una interfaz (API) para establecer una rutina de start/stop con la conexión Bluetooth para guardar los datos adquiridos (100 muestras por segundo). Es importante destacar que en las pruebas experimentales por otros autores (Lei et al. 2010, Khameneifar et al. 2012, Khameneifar et al. 2010, Guan et al. 2016, Shahruz et al. 2008, Yang et al. 2014, Jin-Chen et al. 2014) los datos se adquirieron utilizando cables conectados a un anillo deslizante.

5.2 Configuración de los ensayos experimentales

En este trabajo se ensayan dos dispositivos con el objetivo de conocer la generación de energía eléctrica, las frecuencias naturales y las respuestas temporales de voltaje, validando la formulación FE propuesta. En primer lugar, se ensaya una viga cantiléver con una masa en la punta en el extremo libre para verificar la fiabilidad de su rendimiento a diferentes velocidades de rotación, como se muestra en la Figura 3. La estructura en voladizo está montada en el Hub a 55 mm del eje de rotación en la dirección X. El sustrato está hecho de aluminio y sus dimensiones son de $25 \times 0,5 \times 79 \text{ mm}^3$. La lámina piezoeléctrica MIDE unida al sustrato tiene dimensiones de $20,57 \times 0,254 \times 45,8 \text{ mm}^3$. La masa en la punta es de acero, con dimensiones de $28 \times 4 \times 16 \text{ mm}^3$. El rendimiento del recolector se analiza a bajas frecuencias de rotación de 1 Hz a 5 Hz.

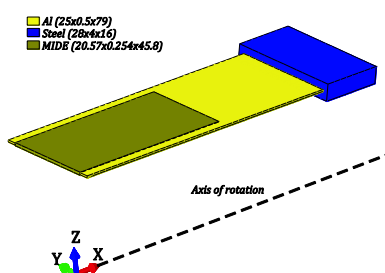


Figura 3: Viga piezoeléctrica cantiléver con una masa en el extremo libre.

El segundo dispositivo está hecho de dos vigas con masas en los extremos libres unidas a un resorte como se muestra en la Figura 4. La estructura superior es de aluminio, con dimensiones de 25 x 0,5 x 79 mm³. La masa en la punta es de acero, cuyas dimensiones son 38 x 10 x 16 mm³. La estructura inferior es de acero, y con dimensiones de 19 x 1 x 63 mm³. Su masa en la punta es de acero, con dimensiones de 45 x 2 x 45 mm³. El rendimiento del recolector se analiza a frecuencias de rotación de 1 Hz a 6 Hz. El dispositivo está montado en el Hub de forma similar al prototipo anterior. En todos los casos se utilizó una resistencia de carga de 10 kΩ debido a una limitación en el voltaje de 5 V máximo (sistema de adquisición por un Arduino).

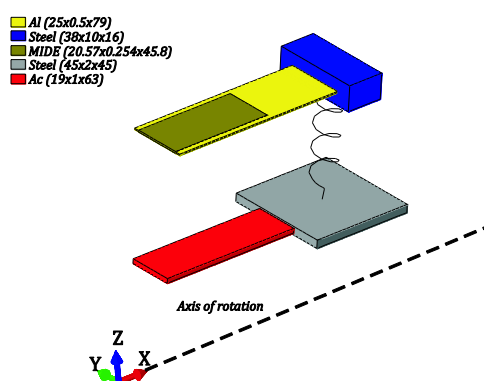


Figura 4: Dos vigas piezoeléctricas con masas en el extremo libre y unidas por un resorte.

Las propiedades de aluminio, acero, el resorte y las propiedades del material especificadas en la hoja de datos del proveedor del MIDE QP16N se muestran en la Tabla 1.

Aluminio		MIDE QP16N		Resorte		Acero			
Módulo de elasticidad	67 GPa	Módulo de elasticidad	67 GPa	Rigidez	560 N/m	Módulo de elasticidad	210 GPa		
		Densidad	7800 kg/m ³			Densidad	7850 kg/m ³		
Densidad	2700 kg/m ³	Constante Piezoeléctrica d ₃₁	-2.1 E+2 pm/V						
		Capacidad	125 nF						

Tabla 1: Propiedades del aluminio, acero, resorte y el piezoeléctrico MIDE QP16N.

6 RESULTADOS

En esta sección se comparan los resultados del modelo FE unidimensional propuesto con

simulaciones numéricas y ensayos experimentales. En primer lugar, el efecto de la rotación en las frecuencias naturales se compara con los resultados experimentales y un modelo 3D shell FE utilizando el software comercial Abaqus. En segundo lugar, se compara la respuesta temporal del voltaje, la generación de voltaje y la generación de potencia con los resultados experimentales considerando varias velocidades de rotación.

6.1 Viga cantiléver con una masa en el extremo libre

6.1.1 Validación de frecuencias naturales

El primer modo flexional sin velocidad de rotación es 18,50 Hz para la formulación FE propuesta, 18,40 Hz para el ensayo experimental y 18,47 Hz para la simulación de Abaqus. Las Figuras 5- 7 muestran las formas modales normalizadas y los valores de frecuencia para diferentes velocidades de rotación comparando los resultados de la formulación FE propuesta con el modelo 3D shell de Abaqus. En el caso de la rotación, el efecto de ablandamiento se analiza para diferentes velocidades de rotación desde 1 Hz a 5 Hz (equivalente a 60 - 300 rpm). Por lo tanto, cuando este efecto es activado, las frecuencias naturales del sistema de rotación disminuyen con el aumento de la velocidad de rotación (Carnegie, 1959).

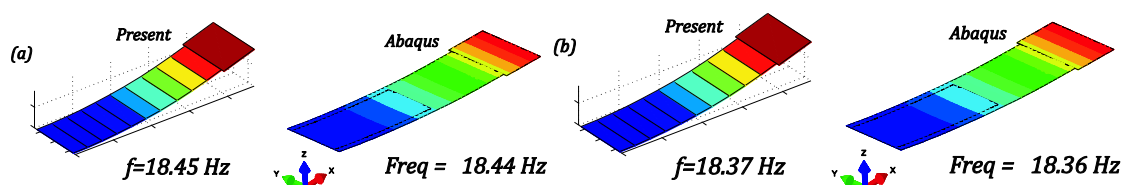


Figura 5: Frecuencias naturales (a) 1 Hz y (b) 2 Hz.

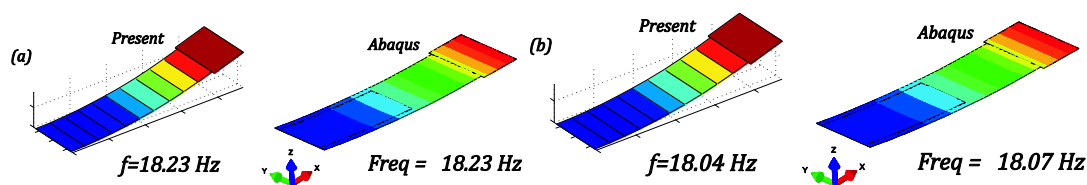


Figura 6: Frecuencias naturales (a) 3 Hz y (b) 4 Hz.

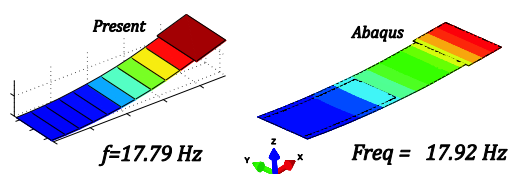


Figura 7: Frecuencias naturales para 5 Hz.

Se puede observar que la formulación FE propuesta muestra una buena concordancia con los resultados experimentales y la simulación de Abaqus.

6.1.2 Respuesta temporal

Las ecuaciones generalizadas de movimiento se resuelven temporalmente utilizando el método de integración Newmark (Bathe, 1996) comparando la generación de voltaje y la respuesta temporal entre los resultados de la formulación FE propuesta y los ensayos experimentales. La Figura 8 muestra la respuesta temporal de voltaje a una velocidad de rotación de 4 Hz (240 rpm) durante aproximadamente 15 segundos. Como se presenta en esta

figura, el voltaje máximo se mantiene en 0,1 voltios durante el intervalo.

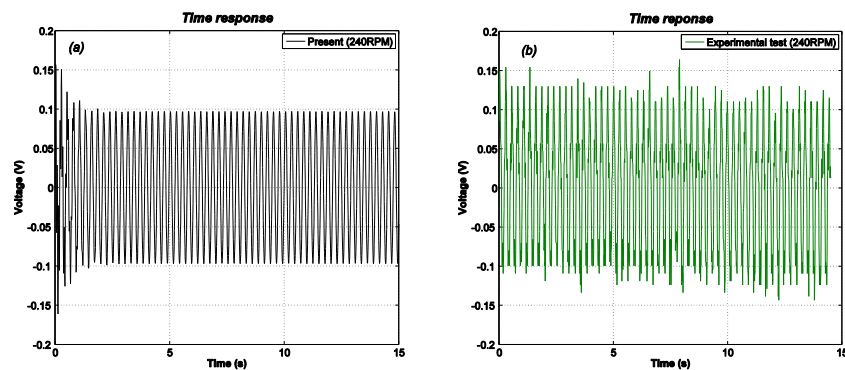


Figura 8: Respuesta temporal del voltaje 4 Hz: (a) Formulación propuesta, (b) Experimental.

Una comparación entre la formulación FE propuesta y los resultados experimentales de la respuesta de temporal de voltaje a 4 Hz (240 rpm) durante 0,5 segundos aproximadamente se presenta en la Figura 9. Como era de esperar, la forma de onda de la respuesta temporal obtenida con la formulación FE propuesta es más suave en comparación con los resultados experimentales. Esta diferencia se debe a las fluctuaciones del ruido en el proceso de adquisición inalámbrica.

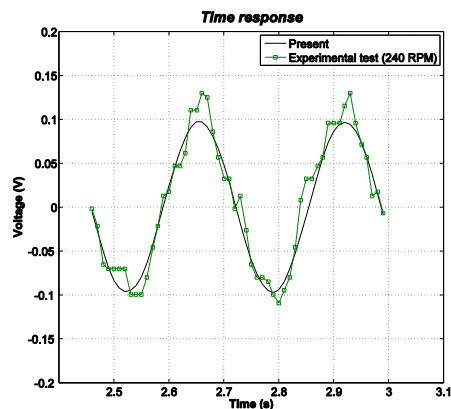


Figura 9: Comparación de la respuesta temporal del voltaje para 4 Hz (Formulación propuesta/Experimental).

En la recolección de energía, la generación de voltaje y potencia se analizan usualmente para diseñar un recolector eficiente. La Figura 10 muestra una comparación entre los resultados de la formulación FE propuesta y el ensayo experimental para la generación de voltaje y potencia variando la velocidad de rotación de 1 Hz a 5 Hz.

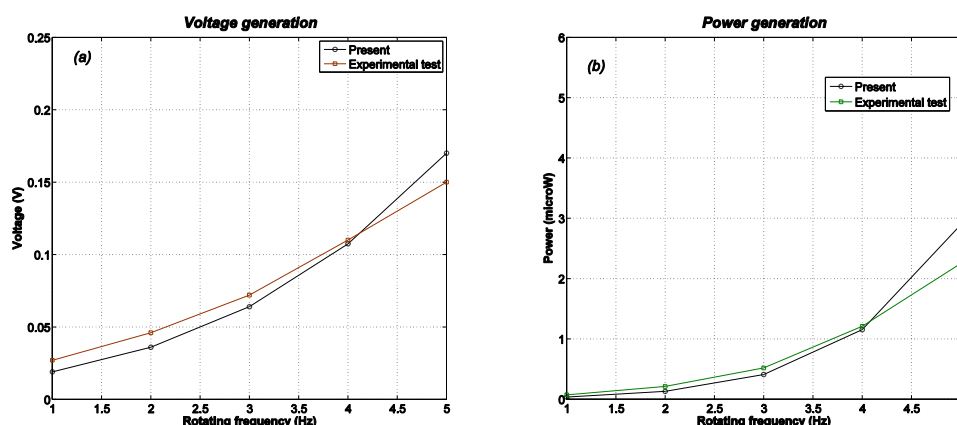


Figura 10: (a) Voltaje generado y (b) Potencia generada para velocidades de rotación desde 1 Hz a 5 Hz.

El voltaje máximo versus la frecuencia de rotación se produce a 5 Hz alcanzando 0,15 V. La potencia máxima obtenida se produce a la misma frecuencia de rotación (5 Hz) llegando a 2.2 μ W. Este prototipo es una configuración típica de un recolector de energía, y su solución analítica se puede encontrar fácilmente en la literatura (Khameneifar et al. 2012, Khameneifar et al. 2010, Guan et al. 2016, Shahruz et al. 2008). El objetivo de este ejemplo es calibrar los parámetros electromecánicos y estudiar la precisión de la formulación de FE propuesta antes de evaluar un modelo geométrico más complejo. Se puede observar que la generación de energía aumenta con la velocidad de rotación, y continuará aumentando hasta que se cumpla la condición de resonancia.

6.2 Dos vigas con masa en el extremo libre unidas por un resorte

6.2.1 Validación de frecuencias naturales

Cuando se requiere una geometría más compleja, es muy difícil formular una solución analítica (Jin-Chen et al. 2014). Por esta razón, la formulación FE propuesta es útil para modelar dispositivos recolectores de geometría compleja. El primer modo flexional sin rotación es 14,07 Hz para la formulación FE propuesta, 14,06 Hz para el ensayo experimental y 14,10 Hz para la simulación en Abaqus. Las formas modales normalizadas y los valores de frecuencia para velocidades de rotación de 1 Hz a 6 Hz (60 rpm - 360 rpm) se muestran en las Figuras 11-13. Con el fin de obtener resultados precisos, el modelo FE construido con Abaqus es discretizado utilizando elementos S4R shell. La malla contiene 659 elementos S4R shell y 1 elemento spring, y el tiempo total de CPU para calcular las frecuencias naturales con rotación es de 80 segundos. Por otro lado, la formulación FE propuesta se discretiza utilizando 24 elementos de viga y 1 elemento de resorte, y el tiempo total de la CPU es de 0,12 segundos.

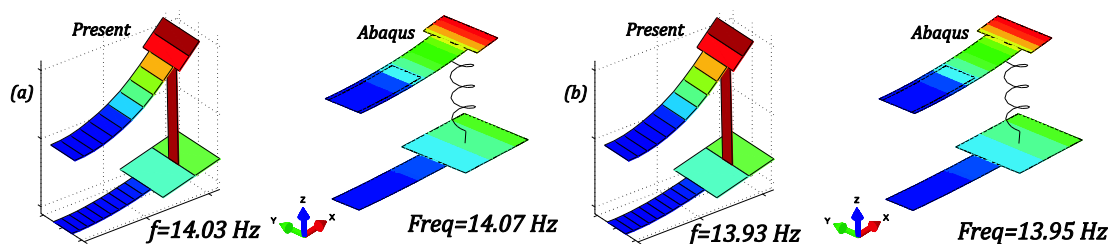


Figura 11: Frecuencias naturales (a) 1 Hz y (b) 2 Hz.

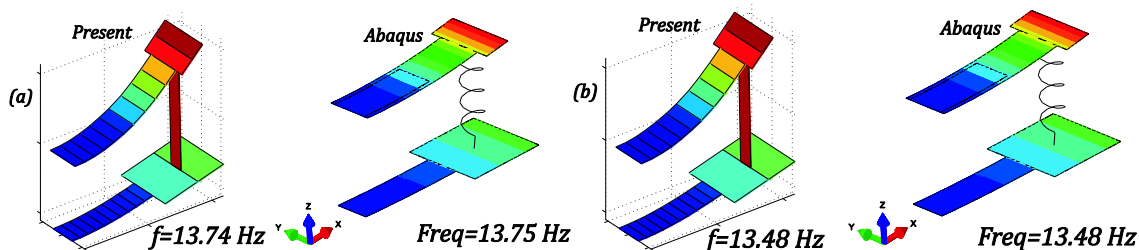


Figura 12: Frecuencias naturales (a) 3 Hz y (b) 4 Hz.

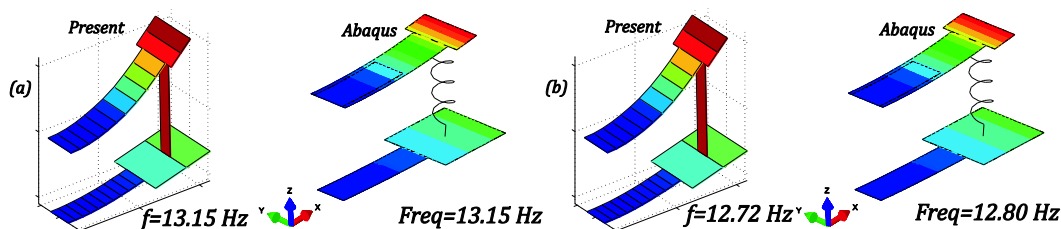


Figura 13: Frecuencias naturales (a) 5 Hz y (b) 6 Hz.

Como era de esperar, la frecuencia natural disminuye con el aumento de la velocidad de rotación. La formulación FE propuesta muestra un buen acuerdo con los resultados experimentales y la simulación en Abaqus. Cabe señalar que la disminución de frecuencia es más pronunciada en este caso en comparación con un prototipo recolector típico de viga cantiléver.

6.2.1 Respuesta temporal

La Figura 14 muestra la respuesta temporal de voltaje a una velocidad de rotación de 6 Hz (360 rpm) durante aproximadamente 20 segundos. El voltaje máximo (0.21 V) permanece constante durante el intervalo. La predicción del voltaje generado de la formulación FE propuesta es muy buena en comparación con los resultados experimentales. En cuanto al costo computacional, el tiempo CPU transcurrido para resolver la respuesta temporal es de 1,73 segundos.

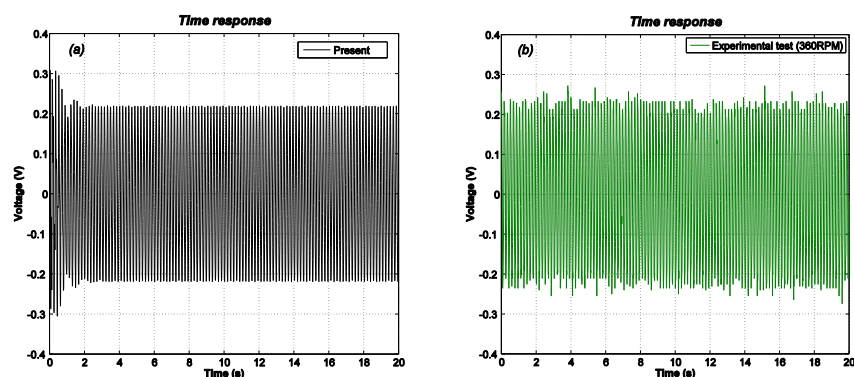


Figura 14: Respuesta temporal del voltaje para 6Hz (a) Formulación propuesta, (b) Experimental.

La Figura 15 presenta la respuesta temporal de voltaje a 6 Hz (360 rpm) durante 1 segundo aproximadamente (de 18,9 a 19,8 segundos) para la formulación FE propuesta y el ensayo

experimental, brindando un voltaje máximo de 0,21 voltios aproximadamente. También se puede observar que el resultado numérico proporcionó una forma de onda de la respuesta temporal similar a la experimentada.

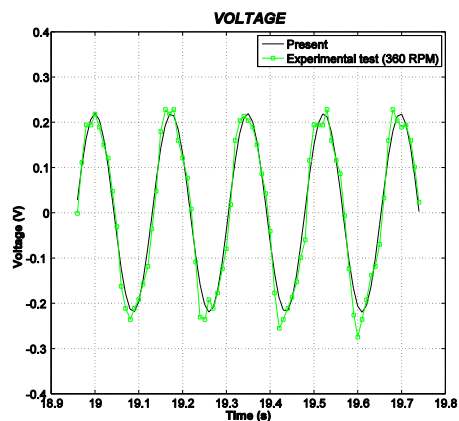


Figura 15: Respuesta temporal del voltaje para la presente formulación y ensayo experimental para 6 Hz.

Los valores máximos de voltaje y potencia de salida en función de la velocidad de rotación de 1 Hz a 6 Hz (60 rpm - 360 rpm) se presentan en la Figura 16: .

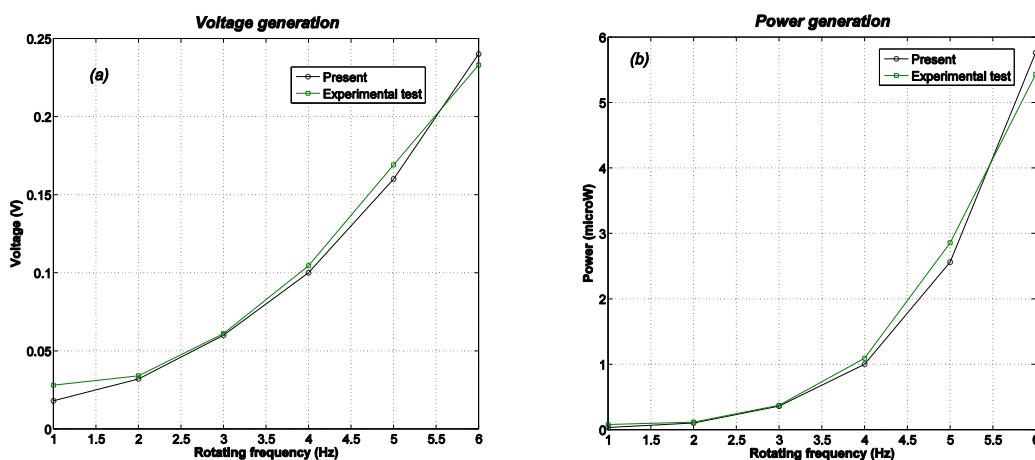


Figura 16: (a) Voltaje generado y (b) Potencia generada para velocidades de rotación desde 1 Hz a 6 Hz.

Los resultados obtenidos con este prototipo y la viga en voladizo son similares desde el punto de vista de la generación eléctrica, es decir, aumenta el voltaje con la velocidad de rotación. Las figuras anteriores muestran que los resultados obtenidos para la formulación FE propuesta tienen una buena correlación desde 1 Hz a 6 Hz con respecto a los resultados experimentales. Los valores máximos de voltaje y potencia frente a la frecuencia de rotación son alcanzados a 6 Hz (0,225 V y 5,5 μ W).

7 CONCLUSIONES

La principal contribución de este artículo es proporcionar una formulación de elemento finito unidimensional capaz de modelar dispositivos tridimensionales de recolección de energía rotantes. Se formuló un elemento finito geométrico no lineal con interpolación lineal.

El elemento finito se formuló con seis grados de libertad mecánicos y un grado de libertad eléctrico por nodo. La teoría de vigas de Timoshenko fue usada asumiendo un campo de desplazamiento lineal y un campo de deformación no lineal en el dominio mecánico. En cuanto al dominio eléctrico, se formuló una teoría de primer orden. El principio de D'Alembert se utilizó para derivar las ecuaciones de equilibrio electromecánico. Con el fin de validar la formulación FE propuesta, construimos dos dispositivos de recolección de energía para ser ensayados con el objetivo de obtener conocimientos sobre la generación de energía eléctrica, las frecuencias naturales y las respuestas temporales. El primer prototipo a ensayar era una viga en voladizo con una masa en la punta en el extremo libre. Este prototipo fue utilizado para calibrar los parámetros electromecánicos y analizar la precisión de la formulación propuesta. Luego se ensayó un prototipo geoméricamente complejo, consistiendo en dos vigas con una masa en la punta en el extremo libre unido por un resorte. En cuanto a los ensayos experimentales, se utilizó una placa Arduino con protocolo de comunicación Bluetooth (a 115200 baudios) para leer la señal de voltaje desde el piezoeléctrico en tiempo real, ya que los receptores Bluetooth están disponibles en casi todos los dispositivos móviles. Estas señales se adquirieron a través de los puertos de entrada analógica de la placa Arduino y posteriormente se convirtieron utilizando el convertidor analógico-digital interno. Se programó una interfaz gráfica para establecer la conexión Bluetooth. Se estableció una rutina de start/stop de 100 muestras por segundo para guardar los datos adquiridos. Las frecuencias naturales con rotación y sin rotación de la formulación FE propuesta fueron comparadas con las simulaciones de Abaqus y los resultados experimentales. Las respuestas temporales, el voltaje y la potencia de la formulación propuesta fueron comparadas con los resultados experimentales. Los resultados de la presente formulación muestran una buena precisión con respecto a los resultados experimentales y simulaciones de Abaqus. Este trabajo desarrolla, analiza y verifica un elemento finito unidimensional capaz de predecir el comportamiento dinámico de los recolectores tridimensionales de energía rotantes. En trabajos futuros, nuestro objetivo es desarrollar un recolector de energía rotante más complejo para obtener un mejor rendimiento desde el punto de vista de la generación de potencia.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONICET, a la Universidad Nacional del Sur y a la Universidad Tecnológica Nacional.

REFERENCIAS

- Barbero, E., *Finite Element Analysis of Composite Materials*. Taylor and Francis, 2008.
- Bathe, J.K., *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- Beeby, S., Tudor, M., and White N., Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Measured Science and Technology*, 17:R175–R195, 2006.
- Bilgen, O., Erturk, A., Inman, D.J., Analytical and experimental characterization of macro fiber composite actuated thin clamped-free unimorph benders. *Journal of Vibration and Acoustics*, 132:051005-1-6, 2010.
- Boyce, E., Handelman. G., Vibration of rotating beams with tip mass. *Applied Mathematics and Physics*, 12:369-392, 1961.
- Brockmann, T., Lammering, R., Beam finite elements for rotating piezoelectric fiber composite structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17:431-448 2006.
- Butz, A., Klinkel, S., An anisotropic finite 3D beam element for the analysis of piezoelectric

- structures. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 3:262-263, 2003.
- Carnegie, W., Vibration of rotating cantilever blading: theoretical approaches to the frequency problem based on energy methods. *Journal Mechanical Engineering Science*, 1:235-240, 1959.
- Choi, S., Han, M., Vibration control of a rotating cantilevered beam using piezoactuators: experimental work, *Journal of Sound and Vibration*, 277:436-442, 2003.
- Choi, S., Park, J., Kim, J., Vibration control of pre-twisted rotating composite thin-walled beams with piezoelectric fiber composites. *Journal of Sound and Vibration*, 300:176-196, 2006.
- De Marqui Junior, C., Erturk, A., Inman, D.J., An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates. *Journal of Sound and Vibration*, 327:9-25, 2009.
- Detwiler, D.T., Shen, M., Venkayya, V.B., Finite element analysis of laminated composite structures containing distributed piezoelectric actuators and sensors. *Finite Elements in Analysis and Design*, 20:87-100, 1995.
- Elvin, N., Elvin, A., A coupled finite element-circuit simulation model for analyzing piezoelectric energy generators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20:587-595, 2009.
- Erturk, A., Inman, D.J., *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley and Sons Ltd, 2011.
- Erturk, A., Inman, D.J., A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustic*, 130:041002-1, 2008.
- Erturk, A., Inman, D.J., An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, 18:025009, 2009.
- Geradin, M., Kill, N., A new approach to finite element modeling of flexible rotors. *Engineering Computations*, 1:52-64, 1984.
- Guan, M., Liao, W., Design and analysis of a piezoelectric energy harvester for rotational motion system. *Energy Conversion and Management*, 111:239-244, 2016.
- Hoa, S., Vibration of a rotating beam with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 3:369-381, 1979.
- Jin-Chen, Hsu., Chih-Ta, Tseng., Yi-Sheng, Chen., Analysis and experiment of self-frequency tuning piezoelectric energy harvesters for rotational motion. *Smart Materials and Structures*, 23:075013-1-13, 2014.
- Khameneifar, F., Arzanpour, S., Moallem, M., A piezoelectric energy harvester for rotary motion applications: design and experiments. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 18:1527-1534, 2012.
- Khameneifar, F., Moallem, M., Arzanpour, F., Modeling and analysis of a piezoelectric energy scavenger for rotary motion applications. *Journal of Vibrations and Acoustics* 133: 011005-1-6, 2010.
- Kumar, A., Sharma, A., Kumar, R., Vaish, R., Chauhan, V., Finite element analysis of vibration energy harvesting using lead-free piezoelectric materials: A comparative study. *Journal of Asian Ceramic Societies*, 2:183-143, 2014.
- Lei, G., Livernore, C., Passive self-tuning energy harvester for extracting energy from rotational motion. *Applied Physics Letters*, 97:081904-1-3, 2010.
- Librescu, L., *Thin-Walled Composite Beams*. Springer, 2006.
- Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*. Prentice Hall, 1997.
- Mitcheson, P.D., Rao, G.K., Green TC. Energy harvesting from human and machine motion for wireless electronic devices. *Proceedings of the IEEE*, 96:1457-1486, 2008.
- Oñate, E., *Structural analysis with the finite element method: Linear static*. Springer, 2013.
- Reddy, J.N., *An introduction to the finite element method*. Mc Graw Hill, 2006.

- Saravia, M., Machado, S., Cortínez, V., Free vibration and dynamic stability of rotating thin-walled composite beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30:432-441, 2011.
- Shahruz, S.M., Sundararajan, V., Design of energy scavengers mounted on rotating shafts. *arXiv*, :0809.2766, 2008.
- Staworko, M., Uhl, T., Modeling and simulation of piezoelectric elements-comparison of available methods and tools. *Mechanics*, 27:4:161-171, 2008.
- Tiersten, H.F., *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Springer, 1969.
- Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, 1968.
- Yang, Y., Shen, Q., Jin, J., Wang, Y., Qian, W., Yuan, D., Rotational piezoelectric wind energy harvesting using impact-induced resonance. *Applied Physics Letters*, 105:053901-1-4, 2014.
- Zhou, L., Sun, J., Zheng, X., Deng, S., Zhao, J., Peng, S., Zhang, Y., Wang, X., Cheng, H., A model for the energy harvesting performance of shear mode piezoelectric cantilever. *Sensor and Actuator A: Physical*, 179:85-192, 2012.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000.