

## **SENSIBILIDAD DE LA MICROESTRUCTURA EN UN SISTEMA MULTI-ESCALA**

**João B. D. Moreira, Ederval de S. Lisboa, Lucas M. Candido y Walter J. P. Casas**

*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 425, Porto Alegre, Brazil, joaobapmdias@gmail.com, <http://www.ufrgs.br/demec>*

**Palabras Clave:** Elementos finitos, Homogenización, Método del Criterio Óptimo.

**Resumen.** Este trabajo analiza la sensibilidad de los parámetros de optimización de una microestructura periódica isotrópica en la optimización topológica de una viga MBB. La función objetivo para optimización de la microestructura es el módulo volumétrico, y los parámetros analizados son: fracción volumétrica, radio de filtro y factor de penalización. En la macroestructura la función objetivo es la minimización de la flexibilidad, sujeta a un volumen predefinido de 0.5. Se desarrolló un algoritmo, con base en el método SIMP, capaz de transferir las informaciones de la microestructura para la macroestructura. Se realizaron análisis numéricos, variando los parámetros y observando el comportamiento de las soluciones. Los resultados demuestran que la fracción volumétrica de la microestructura tiene gran influencia en la maximización de la rigidez, sin embargo el radio de filtro y el factor de penalización presentaron poca influencia, así como sobre el perfil de la macroestructura.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los métodos de optimización topológica buscan la solución óptima mediante la variación del perfil de la estructura, quiere decir, consiste en determinar las regiones de la estructura que deben tener o no material.

Uno de los primeros métodos desarrollados, el de la homogenización, se encuentra basada en la existencia de una microestructura porosa, que define las relaciones constitutivas del material en función de su geometría y de la densidad volumétrica de una célula unitaria de material. Además, la densidad estructural consiste de variables continuamente distribuidas en el espacio del dominio fijo extendido (Stump, 2006).

Entre los algoritmos de optimización topológica merece destaque el método SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*), visto que posibilita la variación continua de la densidad en el dominio, Bendsøe (1989). Buhl *et al.* (2000) utilizan el enfoque SIMP, en conjunto con el método de las asíntotas móviles (MMA) desarrollada por Svanberg (1987), para minimizar las funciones objetivo de estructuras no lineales geoméricamente sujetas a limitaciones de volumen. Stolpe y Svanberg (2001) mejoran el método para aumentar gradualmente el parámetro de penalidad, observando que éste evita mínimos locales, pudiendo ser alcanzado al utilizar un valor creciente constante, sin embargo genera un aumento del costo computacional. Sigmund (2001) proporciona el código SIMP fundamentado en un enfoque NAND (*Nested Analysis and Design*) para actualizar la estructura con un método iterativo a fin de convergir con base en el criterio óptimo, priorizando la minimización de la flexibilidad sujeta a un problema de restricción de volumen. Sardan *et al.* (2008) utilizan el método SIMP en una aplicación industrial sobre optimización de pinzas para fabricación de nanotubos de carbono, maximizando simultáneamente la constante elástica y la topología de la estructura.

Este trabajo pretende evaluar la influencia de los parámetros de optimización topológica de una microestructura en la maximización de la rigidez de la macroestructura, aplicada al problema de la viga MBB (*Messerschmitt-Bölkow-Blohm*) (ver Figura 1). La función objetivo definida pretende obtener la distribución óptima de material para garantizar la minimización de la flexibilidad de la viga con una restricción de volumen predefinida. La metodología utilizada se describe en la sección 2, la implementación del algoritmo en la sección 3, los resultados de las análisis computacionales realizadas se presentan en la sección 4, en la sección 5 se realizan las discusiones de los resultados, y en la sección 6 son expuestas las conclusiones del trabajo realizado.

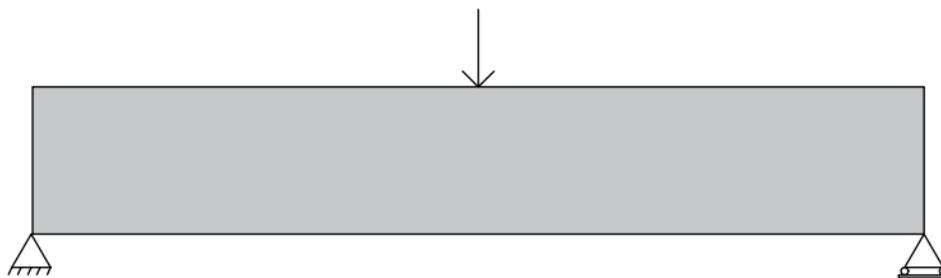


Figura 1: Viga MBB

## 2 SIMP MODIFICADO

La función objetivo del problema de optimización topológica para minimizar la flexibilidad de una estructura es descrita por [Andreassen et al. \(2011\)](#), con las Ecs. (1)-(3),

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } c(\boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\ &= \sum_{e=1}^N E_e(\rho_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a : } V(\boldsymbol{\rho})/V_0 &= f \\ \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\rho} &\leq \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2)$$

En este caso  $c$  es la flexibilidad,  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez global,  $\mathbf{U}$  el vector de desplazamiento global,  $\mathbf{F}$  el vector global de fuerza,  $\mathbf{u}_e$  el vector desplazamiento elemental,  $\mathbf{k}_0$  la matriz de rigidez elemental con módulo de elasticidad unitario,  $E_e$  el módulo de elasticidad elemental,  $\boldsymbol{\rho}$  el vector de densidades de los elementos o variables del problema,  $N$  el número de elementos usados para discretizar el dominio,  $V(\boldsymbol{\rho})$  el volumen en la última iteración,  $V_0$  el volumen inicial del dominio y  $f$  la fracción de volumen prescrita.

A fin de evitar problemas de condicionamiento numérico ([Sigmund, 2001](#)), el módulo de elasticidad elemental es definido de acuerdo a la Ec. (3).

$$E_e(\rho_e) = E_{min} + \rho_e^p (E_0 - E_{min}), \quad \rho_e \in [0,1] \quad (3)$$

$E_{min}$  representa el módulo de elasticidad en los espacios vacíos, al cual se atribuye el valor de  $10^{-9}$  para evitar la singularidad en la matriz de rigidez,  $p$  representa la penalización predefinida y  $E_0$  el módulo de elasticidad inicial del material.

### 2.1 Método del criterio óptimo

Con base en una formulación heurística de la variable densidad  $\rho$ , el método del criterio óptimo realiza la actualización de las densidades elementares en el problema de optimización a través de la Ecs. (4)-(7), de acuerdo a [Andreassen et al. \(2011\)](#).

$$\rho_e^{nuevo} = \begin{cases} \text{máx}(0, \rho_e - m) & \text{si } \rho_e B_e^\eta \leq \text{máx}(0, \rho_e - m) \\ \text{mín}(1, \rho_e + m) & \text{si } \rho_e B_e^\eta \geq \text{mín}(1, \rho_e + m) \\ \rho_e B_e^\eta & \text{otros casos} \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\eta = 1/2$  es el coeficiente de amortiguación numérica, y  $m = 1/5$ , el límite de movimiento positivo.  $B_e$  se obtiene de la Ec. (5) y es utilizada para calcular la variación de la flexibilidad con relación al volumen, donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange y es definido por el método de la bisección, debiendo ser escogido para que la restricción de volumen sea satisfecha.

$$B_e = \left( -\frac{\partial c}{\partial \rho_e} \right) \frac{1}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}} \quad (5)$$

Las sensibilidades de la función objetivo, o sea de la flexibilidad, y del volumen de

material, ambas con relación a la densidad elemental, son determinadas por ejemplo por las Ecs. (6) y (7).

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = 1 \quad (7)$$

## 2.2 Filtros

Los filtros, como el de sensibilidad (Ec. (8)) y el de densidad (Ec. (9)), siguiendo [Andreassen et al. \(2011\)](#), son empleados para garantizar la existencia de soluciones para el problema de optimización topológica y evitar la formación de tablero de ajedrez ([Figura 2](#)). Diversos detalles sobre los métodos de filtración pueden ser revistos en [Sigmund \(2007\)](#). La sensibilidad, Ec. (6), es modificada por el filtro de sensibilidad, Ec. (8). La densidad  $\rho_e$  es transformada con el filtro de densidad, Ec. (9).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_e} = \left( \max(\gamma, \rho_e) \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} \rho_i \frac{\partial c}{\partial \rho_i} \quad (8)$$

$$\hat{\rho}_e = \left( \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} \rho_i \quad (9)$$

En este caso  $\rho_i$  representa la densidad asociada a cada elemento  $i$  del conjunto  $N_e$  de elementos, para los cuales la distancia entre centros  $\Delta(e,i)$  de los elementos  $i$  al elemento  $e$  es menor que el radio de filtro mínimo predefinido  $r_{min}$ , siendo que  $H_{ei}$  es la función de ponderación definida en la Ec. (10), conforme [Andreassen et al. \(2011\)](#),

$$H_{e_i} = \max(0, r_{min} - \Delta(e,i)) \quad (10)$$

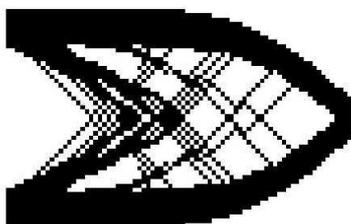


Figura 2: Efecto tablero de ajedrez

## 2.3 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez elemental  $\mathbf{k}_e$  puede ser obtenida a partir de la Ec. (11).

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (11)$$

En ese caso  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva del material, y  $\mathbf{B}$  dada por la Ec. (12) es la matriz de

deformaciones para un elemento rectangular de cuatro nodos.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1-\eta)}{a} & 0 & \frac{(1+\eta)}{a} & 0 & -\frac{(1+\eta)}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\xi)}{b} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1+\xi)}{b} & 0 & \frac{(1-\xi)}{b} & 0 \\ -\frac{(1-\xi)}{b} & -\frac{(1-\eta)}{a} & -\frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1-\eta)}{a} & \frac{(1+\xi)}{b} & \frac{(1+\eta)}{a} & \frac{(1-\xi)}{b} & -\frac{(1+\eta)}{a} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Las variables  $a$  e  $b$  representan respectivamente la mitad de la dimensión horizontal y vertical del elemento usado para discretizar el dominio del problema, y las variables  $\xi$  e  $\eta$  corresponden a las variables adimensionales  $\xi=x/a$  y  $\eta=y/b$ , definidas en la [Figura 3](#).

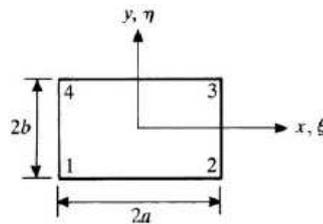


Figura 3: Elemento de volumen unitario

De acuerdo con la teoría del estado plano de tensiones, la matriz constitutiva del material  $\mathbf{D}$  tiene su origen basado en el concepto de energía de deformación. La relación entre los vectores de tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  y de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es dada por la Ec. (13).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

En un material isotrópico la matriz constitutiva puede ser representada por la Ec. (14).

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} E' & E'\nu & 0 \\ & E' & 0 \\ Sim & & G \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$E' = E(1-\nu^2)^{-1}$$

$$G = E(2(1+\nu))^{-1}$$

Se observa que  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. La matriz constitutiva proveniente de la microestructura, puede ser obtenida a partir de la Ec. (15), de acuerdo con [Xia y Breitkopf \(2015\)](#).

$$Q_{ij} = \frac{1}{|Y|} \sum_{e=1}^N q_e^{(ij)} \quad (15)$$

$$q_e^{(ij)} = \left( \mathbf{u}_e^{A(i)} \right)^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e^{A(j)}$$

En este caso  $Y$  representa el dominio de la célula base, y  $Q_{ij}$  la suma de las energías mutuas elementales.

Las informaciones de la microestructura son transportadas para la macroestructura, mediante el método de la homogenización; se observando que mayores detalles sobre el método de

homogenización pueden ser encontrados en [Hassani y Hinton \(1998a, b\)](#).

### 3 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Utilizando como base el código de [Andreassen \*et al.\* \(2011\)](#), se desarrolló en el programa MATLAB un algoritmo posible de evaluar la influencia de la optimización topológica de la microestructura en la maximización de la rigidez de la macroestructura.

A continuación se presentan los pasos realizados para el análisis mencionado, tal como se implementó en este trabajo.

1 – Discretización del dominio correspondiente a la microestructura, determinando el número de elementos en la horizontal, el número de elementos en la vertical, el factor de penalización, el radio de filtro, la fracción volumétrica y el tipo de filtro.

2 – Retirada de material de la microestructura, de acuerdo con la maximización del parámetro definido, generando la matriz constitutiva.

3 – Repetir el paso 2 hasta que la restricción de fracción volumétrica sea satisfecha.

4 – Discretización del dominio correspondiente a la macroestructura, determinando el número de elementos en la horizontal, el número de elementos en la vertical, el factor de penalización, el radio de filtro, la fracción volumétrica y el tipo de filtro.

5 – Cálculo de la matriz elemental de rigidez de la macroestructura a partir de la matriz constitutiva homogenizada.

6 – Obtención de las densidades físicas de la macroestructura a partir del filtro de densidad.

7 – Retirada de material utilizando la información de sensibilidad para minimizar la flexibilidad.

8 – Repetir los pasos 6 y 7 hasta que la fracción volumétrica preestablecida sea satisfecha.

### 4 ANÁLISIS NUMÉRICOS

En el proyecto de un material elástico, es posible obtener materiales cuyas constantes elásticas tengan valores extremos, como un material con módulo de Poisson negativo ([Sigmund, 2001](#)) o con el módulo de cizallamiento extremadamente elevado. En este trabajo, con el objetivo de evaluar la influencia de determinados parámetros en la maximización de la rigidez de la viga MBB, se definió como constante elástica a ser optimizada en la microestructura el módulo volumétrico  $B(\rho)$ , que representa la tasa del aumento de la presión infinitesimal en relación a la disminución relativa resultante del volumen, conforme Ec. (16). Otras informaciones sobre funciones objetivo microestructurales se pueden encontrar en [Xia y Breitkopf \(2015\)](#).

$$B(\rho) = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad (16)$$

En este caso  $\rho$  es la densidad del material, y  $dP/d\rho$  la derivada de la presión relativa a la densidad.

Los análisis numéricos fueron realizados y comparados con los resultados obtenidos por el algoritmo que aborda apenas la optimización topológica de la macroestructura, [Sigmund \(2001\)](#), manteniendo los mismos datos de entrada. Los análisis fueron realizados para una viga MBB, donde la matriz constitutiva homogenizada de la microestructura fue desarrollada de acuerdo con [Xia y Breitkopf \(2015\)](#).

#### 4.1 Fracción volumétrica

La obtención de la microestructura topológicamente optimizada se dio a partir de los siguientes datos de entrada: número de elementos en la horizontal = 100, número de elementos en la vertical = 100, factor de penalización = 3, radio del filtro = 4, fracción volumétrica = 0.65 y filtro de densidad = 4. La matriz constitutiva obtenida se presenta en la Ec. (17) y en la [Figura 4](#) el perfil de la microestructura optimizada, siendo posible observar dos densidades bien definidas, la región clara que representa la ausencia y la oscura que representa la presencia de material.

$$\mathbf{Q}_{[0.65]} = \begin{bmatrix} 0.4372 & 0.0861 & 0 \\ 0.0861 & 0.4372 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0718 \end{bmatrix} \quad (17)$$

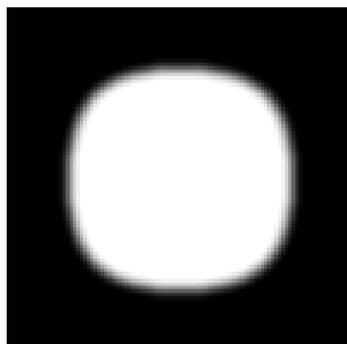


Figura 4: Microestructura optimizada para fracción volumétrica igual a 0.65

Para valores de fracción volumétrica superiores a 0.65, la microestructura pasa a presentar elementos con regiones grises, mostrando una no convergencia de la solución, pues pierde relevancia en medio de los análisis propuestos para este trabajo, que busca estructuras macro y microscópicas bien definidas. En la [Figura 5](#) (a), (b) y (c), es posible ver los perfiles obtenidos de las microestructuras para diferentes fracciones volumétricas.

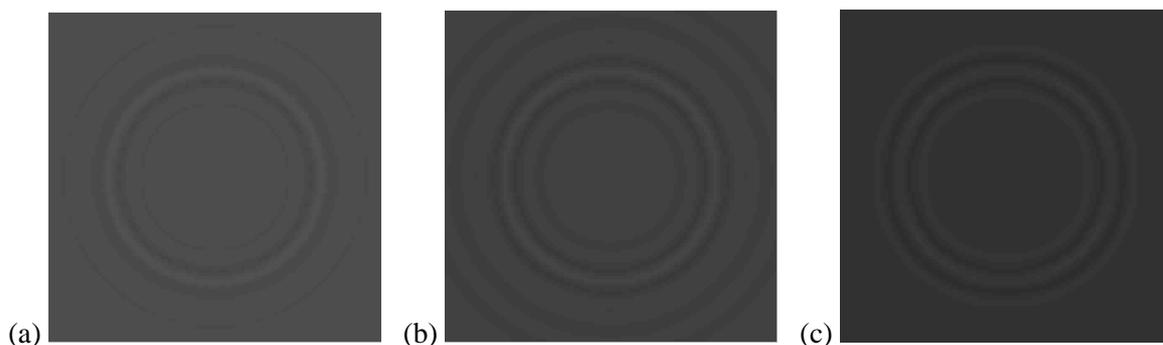


Figura 5: Microestructura optimizada para fracción volumétrica (a) = 0.70, (b) = 0.75, (c) = 0.80

A continuación, un comparativo fue realizado considerando la macroestructura resultante con y sin microestructura optimizada. En este análisis, los datos de entrada utilizados en la macroestructura fueron: número de elementos en la horizontal = 100, número de elementos en la vertical = 50, factor de penalización = 3, radio de filtro = 4 y volumen prescrito = 0.5.

La Figura 6 (a) y (b) presenta los perfiles obtenidos con la microestructura no optimizada y optimizada, respectivamente.

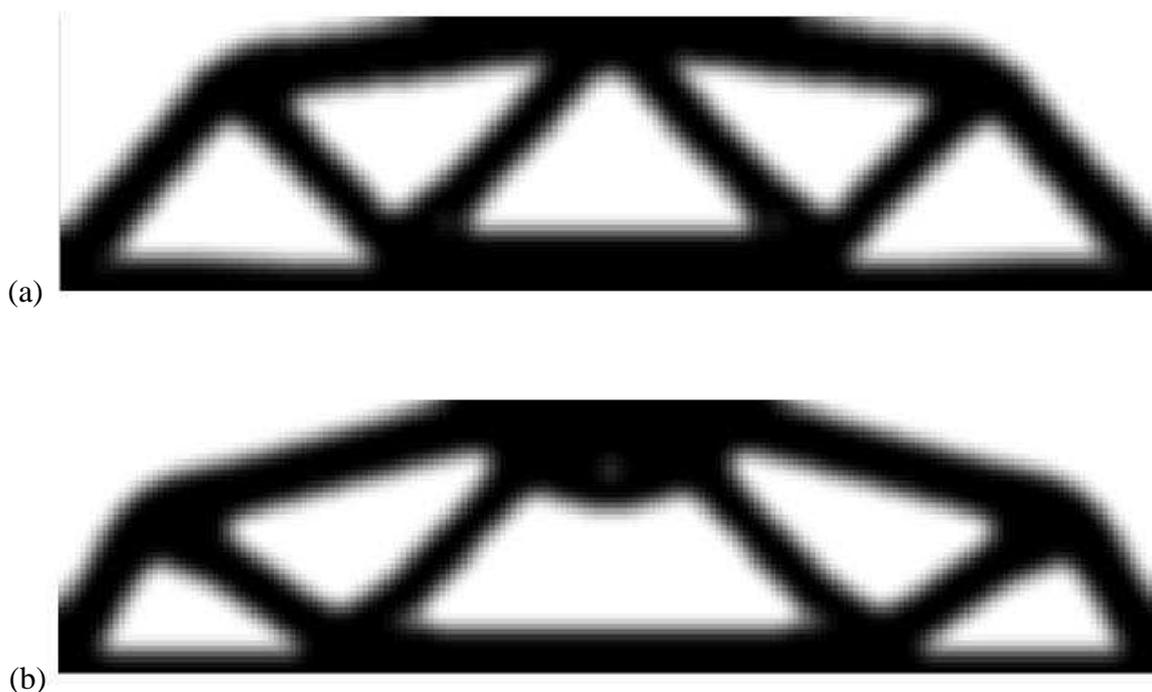


Figura 6: Viga MBB con microestructura: (a) no optimizada, (b) optimizada

En los análisis numéricos con diferentes valores de la fracción volumétrica de la microestructura, para valores menores que 0.6, la estructura se vuelve más flexible, presentando una menor rigidez, porque hay una retirada excesiva de material en esas condiciones. Para valores mayores que 0.65, la microestructura tiende a no mostrar convergencia considerando los resultados alcanzados. Con el valor de 0.59, para la matriz  $\mathbf{Q}$  conforme  $E_c$  (18), se obtuvo una flexibilidad de 91.2, siendo muy cerca de lo encontrado cuando la optimización fue solo de la macroestructura, justificando la elección de ese valor en el parámetro fracción volumétrica para los próximos análisis.

$$\mathbf{Q}_{[0.59]} = \begin{bmatrix} 0.3751 & 0.0657 & 0 \\ 0.0657 & 0.3751 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0475 \end{bmatrix} \quad (18)$$

## 4.2 Radio del filtro

Para el análisis de la influencia del radio del filtro, los datos de entrada de la optimización microestructural fueron: número de elementos en la horizontal = 100, número de elementos en la vertical = 100, factor de penalización = 3 y fracción volumétrica = 0,59. Para el radio del

filtro, se asignaron valores entre 2 y 5.

La Figura 7 (a), (b), (c) y (d) presentan los perfiles de la macroestructura de la viga, para valores del radio de filtro igual a 2, 3, 4 y 5, con valores de flexibilidad obtenidos de 86.3, 88.9, 91.2 y 93.4, respectivamente.

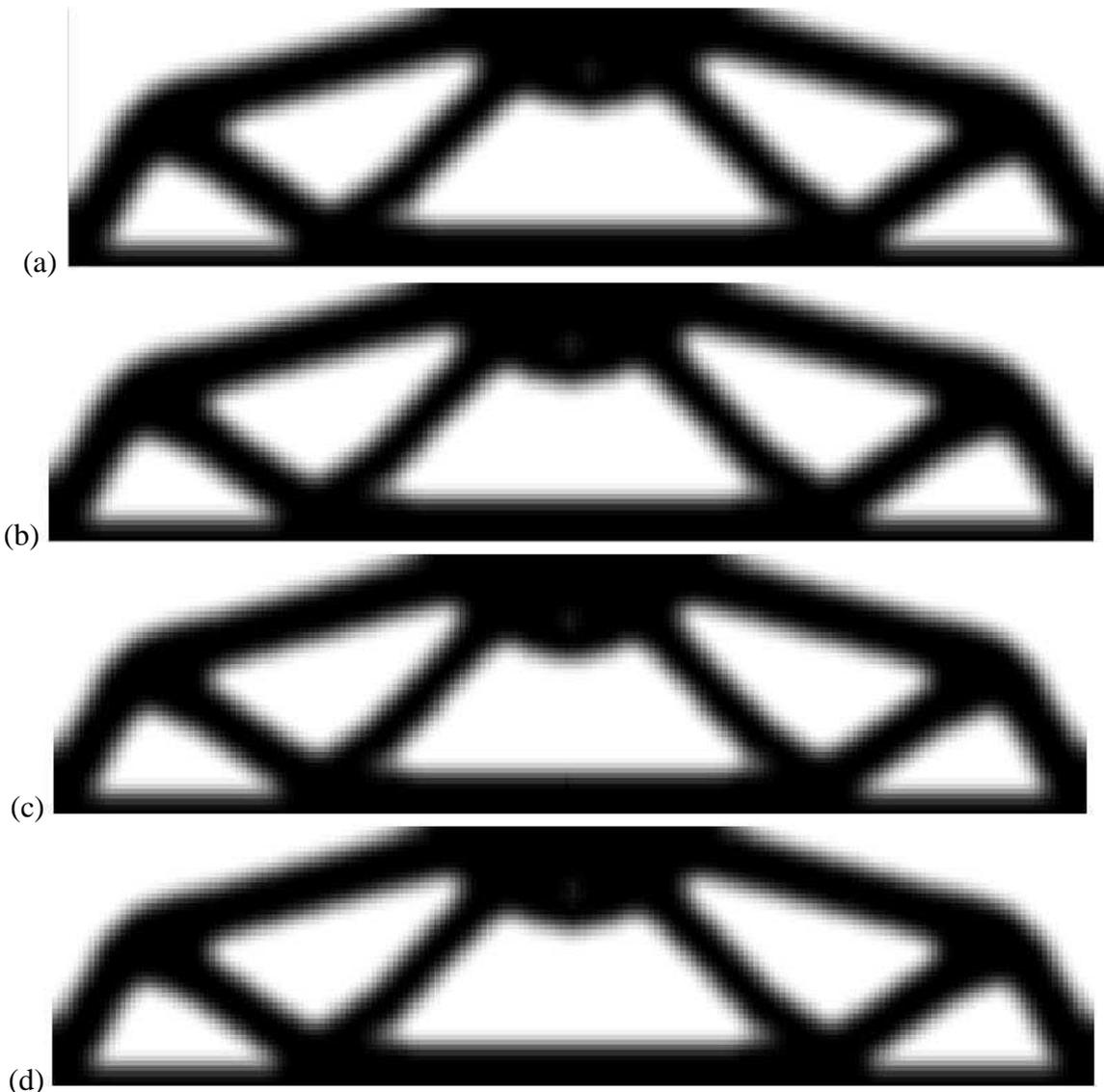


Figura 7: Viga MBB con microestructura optimizada, valores del radio de filtro: (a) = 2, (b) = 3, (c) = 4, (d) = 5

Se observa que, a diferencia de la fracción volumétrica, el radio de filtro de la microestructura tiene poca influencia sobre el valor de la flexibilidad, además hay una ganancia de rigidez de la macroestructura para valores del radio de filtro menor, lo que justifica la elección del uso en el siguiente análisis del radio de filtro = 2.

### 4.3 Factor de penalización

El análisis de la sensibilidad del factor de penalización en la optimización de la microestructura se realiza con los mismos datos de entrada de la sección 4.2, siendo que el factor de penalización varía entre 3 y 6.

La Figura 8 (a) y (b) muestra los perfiles obtenidos para los factores de penalización 3, 4, 5

y 6, obteniendo valores de flexibilidad de 91.2, 93.5, 95.5 y 97.0 respectivamente.

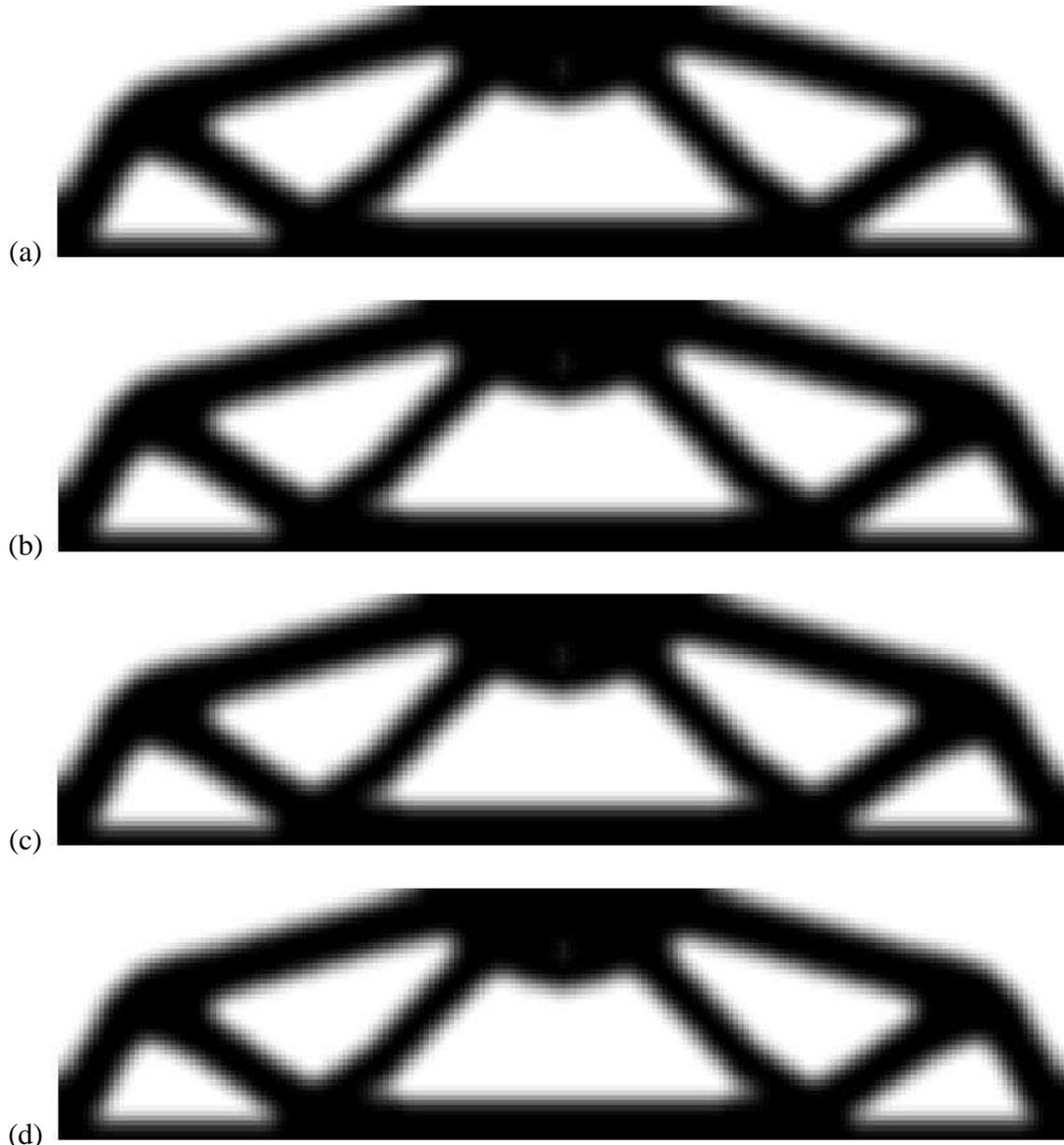


Figura 8: Viga MBB con microestructura optimizada, factor de penalización: (a) = 3, (b) = 4, (c) = 5, (d) = 6

La variación del factor de penalización de la microestructura causa pequeñas variaciones en la flexibilidad de la macroestructura de la viga MBB, indicando poca influencia en la rigidez de la estructura, se nota también que factores de penalización menores alcanzan flexibilidades menores.

## 5 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En posesión de los valores obtenidos con los análisis numéricos realizados, es posible obtener gráficos que demuestren la influencia de los parámetros micro en la flexibilidad macroestructural de una viga MBB, como se observa en la [Figura 9](#).

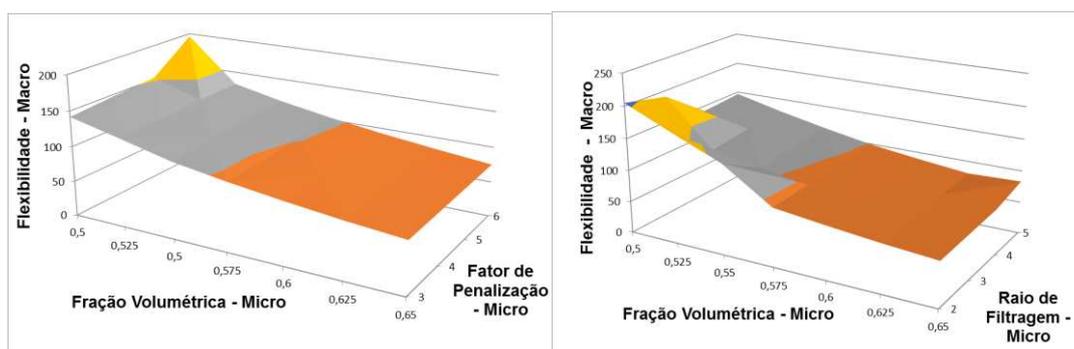


Figura 9: Flexibilidad de una viga MBB en un sistema de optimización multi-escala

## 6 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos comprueban la eficiencia de la implementación realizada sobre la influencia de la optimización topológica de la microestructura en la maximización de la rigidez de la macroestructura utilizando el método SIMP, generando resultados del comportamiento de las soluciones para diferentes parámetros de fracción volumétrica, radio de filtro y factor de penalización de la microestructura.

La fracción volumétrica fue el parámetro microestructural que tuvo mayor influencia sobre la flexibilidad de la macroestructura. El radio de filtro y el factor de penalización presentaron poca influencia, demostrando poca relevancia en la búsqueda de la maximización de la rigidez de la viga MBB.

## 7 AGRADECIMIENTOS

La investigación descrita en este trabajo tuvo soporte del *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* – CNPq, Agencia Nacional de Financiamiento del *Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação* de Brasil, mediante los Procesos de Números 148895/2016-6 y 140081/2015-1.

## REFERENCIAS

- Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B. S. y Sigmund, O., Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46:1-16, 2011.
- Bendsøe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1:193-202, 1989.
- Buhl, T., Pedersen, C. B. y Sigmund, O., Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19:93-104, 2000.
- Hassani, B. y Hinton, E., A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure. *Computers & Structures*, 69:707-717, 1998a.
- Hassani, B. y Hinton, E., A review of homogenization and topology optimization II - analytical and numerical solution of homogenization. *Computers & Structures*, 69:719-738, 1998b.
- Sardan, O., Eichhorn, V., Petersen, D. H., Fatikow, S., Sigmund, O. y Bøggild, P., Rapid prototyping of nanotube-based devices using topology-optimized microgrippers. *Nanotechnology*, 19:1-9, 2008.

- Sigmund, O., A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 21:120-127, 2001.
- Sigmund, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33:401–424, 2007.
- Stolpe, M. y Svanberg, K., On the trajectories of penalization methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21:128-139, 2001.
- Stump, F. V., Otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas tradicionais e estruturas com gradação funcional sujeitas a restrição de tensão. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo, 2006. (En Portugués).
- Svanberg, K., The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:359-373, 1987.
- Xia, L. y Breitkopf, P., Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52:1229-1241, 2015.