

SIMULACIÓN DIRECTA DE TURBULENCIA DE FLUJO SECUNDARIO EN DUCTOS RECTOS CON GRADIENTES DE PRESION NO UNIFORMES

Julia V. Martorana^{a,b}, Mariano I. Cantero^{a,b,c} y Enzo A. Dari^{a,b,c}

^a*Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina, julia.martorana@cab.cnea.gov.ar, <http://mecom.cnea.gov.ar/>.*

^b*Instituto Balseiro, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina.*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina.*

Palabras Clave: flujo secundario, flujo turbulento, ducto, DNS.

Resumen. El flujo turbulento en ductos de sección rectangular presenta flujo secundario. La generación de este flujo secundario es debida exclusivamente a la presencia de turbulencia y está ausente en el caso de flujo laminar. Además de modificar el perfil medio de velocidad, el flujo secundario tiene un gran impacto en la redistribución interna de masa y energía y en la distribución de esfuerzos de corte sobre las paredes. El objetivo de este trabajo es analizar las modificaciones en el flujo secundario de flujos forzados por gradientes de presión no uniformes. En este caso el flujo secundario se ve fuertemente modificado. Para desarrollar este estudio se adaptó un código pseudo-espectral y se realizaron simulaciones directas de turbulencia (DNS) para varios gradientes de presión. El trabajo detalla el código de cálculo utilizado, su paralelización y la validación del mismo. Por último, se reportan las variaciones del flujo secundario inducidas por los gradientes de presión estudiados.

1. INTRODUCCIÓN

El flujo secundario en un ducto de sección rectangular se genera solamente cuando el flujo es turbulento. El flujo secundario que se genera sólo en presencia de turbulencia fue clasificado por Prandtl (1926) como flujo secundario de segundo tipo. El flujo secundario de primer tipo se origina por la variación de la dirección del vector vorticidad y puede existir tanto el flujo laminar como en flujo turbulento.

A pesar de que el flujo secundario de segundo tipo es relativamente débil, sus efectos pueden ser importantes. El flujo secundario produce un incremento en las tensiones de corte en las paredes y este efecto es fundamental en problemas de transporte de sedimentos y erosión (Abad et al., 2013). De manera similar, la transferencia de calor y la dispersión de contaminantes (Simpson, 1997) están influenciadas por los flujos secundarios. Por estas razones es importante entender el comportamiento del flujo secundario y lograr predecir de forma precisa este fenómeno.

Se han realizado diversos estudios sobre este flujo secundario. Los primeros trabajos que presentan simulaciones numéricas directas (DNS, por *Direct Numerical Simulations*) pertenecen a Gavrilakis (1992) y a Huser y Biringen (1993). Estos trabajos tienen como objetivo analizar el comportamiento y origen del flujo secundario. Trabajos más actuales muestran la influencia del número de Reynolds en el flujo medio (Pinelli et al., 2010; Zhang et al., 2015) y el efecto de la relación de aspecto de la sección del ducto (Vinueza et al., 2014), todos mediante cálculo DNS. Entre las simulaciones de grandes remolinos (LES, por *Large Eddy Simulations*) se pueden nombrar los trabajos de Madabhushi y Vanka (1991), Breuer y Rodi (1994) y Yao et al. (2015). En estos trabajos también se lleva a cabo el análisis de las características del flujo para diferentes números de Reynolds. Todos estos trabajos se focalizan en flujos forzados por gradientes de presión uniformes.

Entre los trabajos que reportan experimentos con este tipo de flujo se encuentran los de Brundrett y Baines (1964), Launder y Ying (1972) y Mellling y Whitelaw (1976) para números de Reynolds altos ($Re_b > 35000$; donde $Re = u_b h / \nu$, donde u_b es la velocidad media, h es el semiancho del ducto y ν es la viscosidad cinemática). Experimentos para números de Reynolds bajos fueron realizados por Kawahara et al. (2000) ($Re_b = 3535$) y Owolabi et al. (2016) ($Re_b = 1203$ y 2230). En ambos casos utilizaron un Velocímetro Láser Doppler para tomar las mediciones.

En este trabajo se analiza el flujo secundario en ductos donde el flujo es forzado por gradientes de presión no uniformes en la vertical, como es el caso de corrientes de turbidez (Kassem y Imran, 2004; Dorrell et al., 2013). El análisis se lleva a cabo mediante cálculos DNS de un flujo turbulento en un ducto de sección cuadrada empleando un código de cálculo pseudo-espectral. Se presenta primero una descripción de la metodología de cálculo del código utilizado, la implementación de directivas de paralelización y la validación del mismo con casos de estudio conocidos. Finalmente, se presentan los resultados sobre el efecto de gradientes de presión no uniformes lineales en la dirección vertical sobre el flujo secundario.

2. MODELO MATEMÁTICO

En este trabajo se considera un flujo incompresible forzado por un gradiente de presión medio en un ducto de sección cuadrada. El sistema de coordenadas cartesiano utilizado y las características geométricas se pueden observar en la figura 1. El ducto tiene un largo $L_x = 4\pi h$, un ancho $L_z = 2h$ y un alto $L_y = 2h$. Las ecuaciones adimensionales que gobiernan el flujo

en este caso son

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ es el campo de velocidades adimensional, \tilde{p} es la presión adimensional y \mathbf{F} es el gradiente de presión medio no uniforme en la vertical que fuerza el flujo en la dirección x ($\mathbf{F} = \{F_x(y), 0, 0\}$). Para la adimensionalización de las ecuaciones (1)-(2) se utiliza como escala de velocidad la velocidad de fricción $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, donde τ_w es el esfuerzo de corte en la pared y ρ es la densidad del fluido. Como escala de longitud se toma el semiancho del ducto h , para la escala temporal se emplea $T = h/u_\tau$ y para la escala de presión ρU^2 . El flujo depende del número de Reynolds $Re = u_\tau h/\nu$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido.

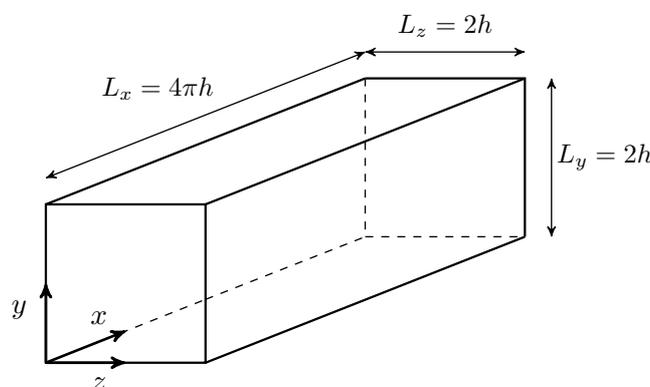


Figura 1: Geometría y sistema de coordenadas empleados para el estudio de flujo secundario en un ducto.

3. MODELO NUMÉRICO

3.1. Discretización temporal

La resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (1)-(2) se lleva a cabo mediante el Método de Paso Fraccionado (Kim y Moin, 1985). Este enfoque utiliza un esquema temporal dividido en dos pasos. En el primer paso del método se calcula un campo de velocidades intermedio $\tilde{\mathbf{u}}^*$ en base a la ecuación de momento (1):

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{23}{12} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho)^n - \frac{16}{12} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho)^{n-1} \\ + \frac{5}{12} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho)^{n-2} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí se ha discretizado el término advectivo de forma explícita mediante un esquema de Adams-Bashforth de tercer orden y el término difusivo de manera implícita por medio del esquema de Crank-Nicolson. Para mayor claridad se han eliminado las tildes de las variables adimensionalizadas.

Debido al término faltante de la presión en (3), la velocidad intermedia \mathbf{u}^* no posee divergencia nula. El segundo paso de este método consiste en corregir la velocidad intermedia de

modo tal que

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (5)$$

Combinadas, las ecuaciones (4)-(5) implican resolver

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (6)$$

El avance desde el tiempo n al tiempo $n + 1$ comienza con la obtención del campo de velocidades intermedio \mathbf{u}^* por medio de la expresión (3). Luego se calcula la presión para el tiempo siguiente, p^{n+1} , con la ecuación (6). Finalmente, se aplica la expresión (4) para obtener el nuevo valor de velocidad \mathbf{u}^{n+1} .

3.2. Discretización espacial

De la discretización temporal resultan dos ecuaciones parciales diferenciales elípticas de la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sigma \right) g(x, y, z) = rhs(x, y, z). \quad (7)$$

En el caso de la ecuación (3) se tiene

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \mathbf{u}^*, \\ \sigma &= 2Re/\Delta t, \\ rhs(x, y, z) &= \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{23}{12}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho)^n - \frac{16}{12}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho)^{n-1} \\ &\quad + \frac{5}{12}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho)^{n-2} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n; \end{aligned}$$

mientras que para la ecuación (6)

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= p^{n+1}, \\ \sigma &= 0, \\ rhs(x, y, z) &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \end{aligned}$$

Para la resolución numérica de la ecuación (7) se discretiza el dominio en las direcciones espaciales x , y , y z utilizando expansiones de Fourier con puntos equiespaciados en la dirección x , periódica, mientras que en las direcciones y y z se utilizan polinomios de Chebyshev con puntos de cuadratura Gauss-Lobatto (Canuto et al., 1988).

3.2.1. Discretización de Fourier

Realizando la transformada de Fourier en dirección x a la ecuación (7) se tiene

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\sigma + \frac{k^2 4\pi^2}{L_x^2} \right) \right] \hat{g}(y, z) = r\hat{h}s(y, z) \quad (10)$$

donde \hat{g} y $r\hat{h}s$ son los correspondientes coeficientes de Fourier. La ecuación (10) es una ecuación bidimensional de Helmholtz en y y z para cada coeficiente de Fourier correspondiente al número de onda k .

3.2.2. Solución de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones

Se necesita resolver expresiones de la forma (10) sobre un dominio rectangular discretizado en $N_z \times N_y$ puntos de colocación. En las direcciones z e y se aplica una discretización espectral de Chebyshev (Canuto et al., 1988). Los cálculos de las derivadas en las direcciones z e y se expresan en términos de multiplicación matricial combinando una transformación discreta de Chebyshev, diferenciación recursiva y una transformación discreta de Chebyshev inversa. La derivada segunda se obtiene mediante la multiplicación de dos operadores de derivada primera. En los puntos interiores del dominio, se aplica la forma discretizada de las ecuaciones gobernantes y de forma similar en los bordes se aplica la condición de borde específica. Esto produce un sistema de $N_z N_y \times N_z N_y$ ecuaciones. Para obtener la solución del sistema de ecuaciones resultante se emplea el método rápido de solución de Helmholtz. Previo a su aplicación, se eliminan las ecuaciones y los valores en los bordes del dominio por lo que se resuelven expresiones de la forma

$$\tilde{D}Z^2 \tilde{g}_k + \tilde{g}_k \tilde{D}Y^2 - \tilde{\sigma} \tilde{g}_k = r \tilde{h}_{s_k} \quad (11)$$

donde \tilde{g}_k es la matriz de solución reducida que contiene solamente los valores de los puntos interiores de \hat{g}_k y por lo tanto posee un tamaño $(N_z - 2) \times (N_y - 2)$. De manera similar, $r \tilde{h}_{s_k}$ es la parte interior de $r \hat{h}_{s_k}$ modificada por la incorporación de las condiciones de borde y de tamaño $(N_z - 2) \times (N_y - 2)$. Las matrices $\tilde{D}Z^2$ y $\tilde{D}Y^2$ son las matrices reducidas de las derivadas segundas y poseen un tamaño de $(N_z - 2) \times (N_z - 2)$ y $(N_y - 2) \times (N_y - 2)$ respectivamente. Por último, $\tilde{\sigma} = \sigma + k^2 4\pi^2 / L_x^2$.

Las matrices $\tilde{D}Z^2$ y $\tilde{D}Y^2$ pueden ser diagonalizadas por lo que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{D}Z^2 &= P \Lambda_z P^{-1}, \\ \tilde{D}Y^2 &= Q \Lambda_y Q^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde P y Q son las matrices de autovectores de $\tilde{D}Z^2$ y $\tilde{D}Y^2$ respectivamente y Λ_z , Λ_y son las matrices diagonales que contienen los autovalores correspondientes. La ecuación (11) puede reescribirse a partir de (12) como

$$P \Lambda_z P^{-1} \tilde{g}_k + \tilde{g}_k Q \Lambda_y Q^{-1} - \tilde{\sigma} \tilde{g}_k = r \tilde{h}_{s_k}.$$

Multiplicando por la izquierda por P^{-1} y por la derecha por Q se obtiene

$$\Lambda_z P^{-1} \tilde{g}_k Q + P^{-1} \tilde{g}_k Q \Lambda_y - \tilde{\sigma} P^{-1} \tilde{g}_k Q = P^{-1} r \tilde{h}_{s_k} Q. \quad (13)$$

Definiendo

$$a = P^{-1} \tilde{g}_k Q, \quad (14)$$

$$R = P^{-1} r \tilde{h}_{s_k} Q, \quad (15)$$

se tiene

$$a_{ij} = \frac{R_{ij}}{\Lambda_{z_i} + \Lambda_{y_j} - \tilde{\sigma}} \quad (i = 2, \dots, N_y - 2; \quad j = 2, \dots, N_z - 2), \quad (16)$$

dado que las matrices Λ_z y Λ_y son diagonales.

En síntesis, el procedimiento de cálculo es el siguiente:

1. Se calculan las matrices de autovalores (Λ_z y Λ_y); y las matrices de autovectores (P y Q).
2. Se obtiene R mediante la expresión (15).
3. Se calcula el valor de a por medio de la ecuación (16).
4. Se utiliza la inversa de la expresión (14) para obtener el valor de \tilde{g} .

3.3. Condiciones de borde

El sistema de ecuaciones mostrado en (11) representa las ecuaciones para los puntos interiores del dominio. Para completar estas ecuaciones, se requiere de condiciones de borde en todos los contornos del dominio. El sistema discretizado que se quiere resolver es entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{N_z} dz_{(i,k)}^2 \hat{g}_{(k,j)} + \sum_{k=1}^{N_y} \hat{g}_{(i,k)} dy_{(k,j)}^2 - \left(\sigma + \frac{k^2 4\pi}{L_x^2} \right) \hat{g}_{(i,j)} = r\hat{h}s_{(i,j)}, \quad i=2, \dots, N_z-1, j=2, \dots, N_y-1; \\ \alpha_b \hat{g}_{(i,1)} + \beta_b \sum_{k=1}^{N_y} \hat{g}_{(i,k)} dy_{(k,1)}^1 = c_{(i,1)}, \quad i=2, \dots, N_z-1; \\ \alpha_t \hat{g}_{(i,N_y)} + \beta_t \sum_{k=1}^{N_y} \hat{g}_{(i,k)} dy_{(k,N_y)}^1 = c_{(i,N_y)}, \quad i=2, \dots, N_z-1; \\ \alpha_l \hat{g}_{(1,j)} + \beta_l \sum_{k=1}^{N_z} dz_{(1,k)}^1 \hat{g}_{(k,j)} = c_{(1,j)}, \quad j=1, \dots, N_y; \\ \alpha_r \hat{g}_{(N_z,j)} + \beta_r \sum_{k=1}^{N_z} dz_{(N_z,k)}^1 \hat{g}_{(k,j)} = c_{(N_z,j)}, \quad j=1, \dots, N_y; \end{array} \right.$$

donde dz^1 y dy^1 (dz^2 y dy^2) son las matrices de derivadas primeras (segundas) con respecto a z y a y respectivamente, \hat{g} es la matriz de coeficientes de Fourier de la variable incógnita (u o p) y $r\hat{h}s$ es la matriz de coeficientes de Fourier de los términos conocidos. Los subíndices b , t , l y r corresponden a los bordes inferior, superior, izquierdo y derecho respectivamente.

Para la velocidad u en dirección del flujo, se impone la condición de no deslizamiento en las cuatro paredes, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $c = 0$. Para la velocidad horizontal w (vertical v) se impone la condición de no deslizamiento en las paredes horizontales (verticales) y la condición de no penetración en las paredes verticales (horizontales). Para ambos casos, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $c = 0$ en todas las paredes. Para la ecuación de presión (6) se imponen condiciones de borde de derivada normal nula en las cuatro paredes con lo cual los coeficientes de las ecuaciones toman los valores $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $c = 0$.

4. PARALELIZACIÓN

Para el cálculo de cada paso temporal se deben resolver la ecuación del Helmholtz para cada componente de la velocidad intermedia y la ecuación de Poisson de presión, lo que implica un gran costo computacional. La distribución de los cálculos del código se lleva a cabo empleando el paradigma de memoria compartida y OpenMP.

La ejecución del algoritmo de solución de Helmholtz se lleva a cabo en forma independiente para cada número de onda luego de aplicar la transformada de Fourier en la dirección x . Las variables involucradas en el cálculo para cada iteración dependen solamente de z e y . Esto permite la paralelización del bloque de código encargado de resolver la ecuación de Helmholtz para cada una de las velocidades y para la ecuación de Poisson de presión.

Las operaciones de multiplicación de matrices para el cálculo de las derivadas primera y segunda en las tres direcciones se llevan a cabo por planos del dominio (plano $z - y$ para las

derivadas en esas direcciones y planos $x - z$ para la derivada con respecto a x) por lo que también se paraleliza este proceso de cálculo.

4.1. Análisis de desempeño

El análisis del desempeño del código se llevó a cabo en una máquina con procesador *Intel Core-i7 4790* de 4 núcleos + *HyperThreading*, 4.0GHz y 32GB de memoria RAM. Se realizaron pruebas para diferentes tamaños de grilla y para distinto número de procesadores. Para el cálculo del *speedup* (Sp) y de la eficiencia (E), se utilizaron los tiempos de ejecución en segundos (T). Se define el Sp como la relación entre el tiempo requerido por la versión secuencial del código y el tiempo utilizado por la versión paralelizada. La E es la relación entre el valor de Sp y el número de procesadores empleados. En la tabla 1 se muestran los valores obtenidos para grillas con distinta cantidad de puntos en la dirección x . En el sentido transversal del flujo el número de nodos permanece constante en $N_z \times N_y = 261 \times 261$, mientras que en la dirección restante los valores de N_x son 384 y 768. La figura 2 presenta la variación de los valores de Sp con el número de procesadores utilizados. También se estudiaron casos con mayor número de puntos en las direcciones z e y con $N_x = 192$: $N_z \times N_y = 131 \times 131$ y $N_z \times N_y = 261 \times 261$.

| Procesos | $261 \times 261 \times 384$ | | $261 \times 261 \times 768$ | |
|----------|-----------------------------|------|-----------------------------|------|
| | Sp | E | Sp | E |
| Serial | - | - | - | - |
| 1 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 2 | 1.71 | 0.85 | 1.71 | 0.86 |
| 3 | 2.28 | 0.76 | 2.32 | 0.77 |
| 4 | 2.68 | 0.67 | 2.61 | 0.65 |
| 8 (4+HT) | 2.76 | 0.34 | 2.82 | 0.35 |

Tabla 1: Desempeño obtenido para las grillas con variación de puntos en la dirección x .

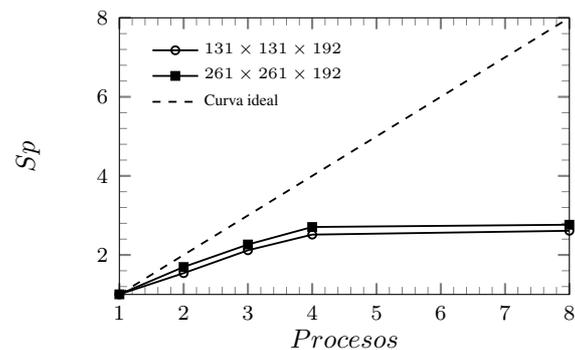


Figura 2: Valores de Sp vs. cantidad de procesos.

| Procesos | $131 \times 131 \times 192$ | | $261 \times 261 \times 192$ | |
|----------|-----------------------------|------|-----------------------------|------|
| | Sp | E | Sp | E |
| Serial | - | - | - | - |
| 1 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 2 | 1.54 | 0.77 | 1.70 | 0.85 |
| 3 | 2.12 | 0.71 | 2.26 | 0.75 |
| 4 | 2.51 | 0.63 | 2.71 | 0.68 |
| 8 (4+HT) | 2.61 | 0.33 | 2.76 | 0.35 |

Tabla 2: Desempeño obtenido para las grillas con variación de puntos en el plano $z - y$.

Los resultados de los valores de Sp y E obtenidos son similares para las cuatro grillas analizadas. Existe un leve incremento cuando la grilla posee mayor cantidad de puntos en el plano $z - y$. Se puede observar que los valores de eficiencia se mantienen por encima del 70 % para los casos de 2 y 3 procesadores. Para 8 procesadores, la eficiencia decae a valores cercanos al 35 %. En este caso no se están utilizando 8 procesadores físicos, si no que se aplica la tecnología *HyperThreading* que hace que cada procesador físico cree uno lógico. Así, cada procesador de la máquina puede ejecutar dos hilos a la vez pero su desempeño no es equivalente al conseguido con 2 procesadores físicos.

5. VALIDACIÓN

Con el objetivo de validar el código utilizado se realizó el cálculo del flujo laminar en una cavidad cuadrada en dos dimensiones y el cálculo del flujo turbulento en un ducto de sección cuadrada en tres dimensiones.

5.1. Flujo laminar en cavidad cuadrada

Se resolvió el flujo bidimensional en una cavidad cuadrada de lado $L = 1$ (esquema dentro de figura 3(b)) cuya pared superior se mueve en dirección horizontal (z) con una velocidad uniforme e igual a 1 (Ghia et al., 1982). La cavidad contiene un fluido incompresible y las condiciones de borde que se imponen son de no deslizamiento $(w, v) = (0, 0)$ en todas las paredes excepto en la horizontal superior ($y = 1$) donde $(w, v) = (w_0, 0)$.

Se realizó el cálculo para $Re = 100, 400$ y 1000 para una grilla de 73×73 puntos. Se calcularon los pasos temporales necesarios para alcanzar el estado estacionario. Las velocidades obtenidas v y w en las líneas medias de la cavidad se compararon con los valores presentados en Ghia et al. (1982) (figuras 3(a) y 3(b) respectivamente). Se observa un excelente ajuste de los resultados obtenidos con los valores de referencia.

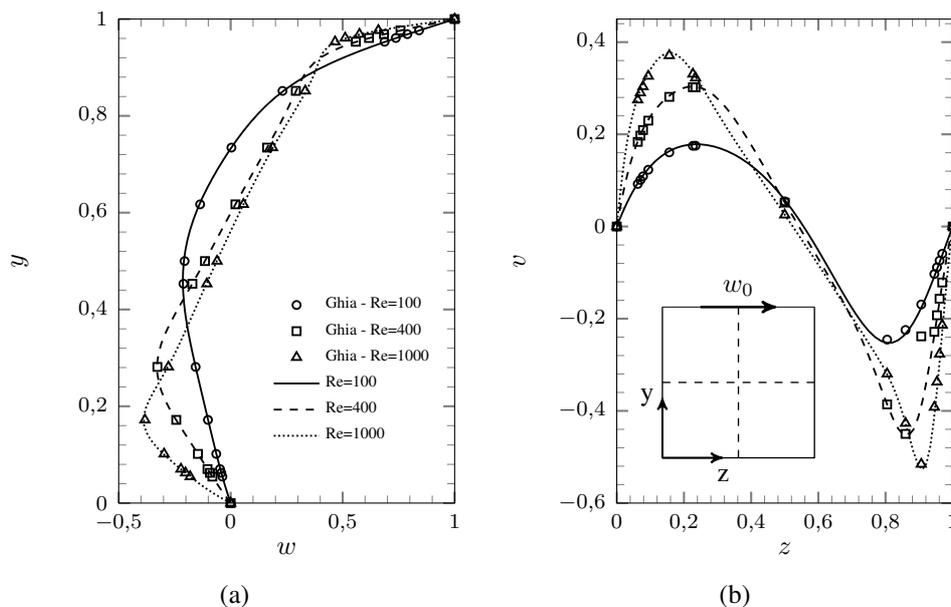


Figura 3: Comparación de perfiles de velocidad horizontal, w , en la línea vertical central (a) y de velocidad vertical, v , en la línea horizontal central (b) con valores presentados en Ghia et al. (1982). Referencias para ambas figuras en (a).

5.2. Flujo turbulento en un ducto de sección cuadrada

Se llevó a cabo la simulación de un flujo turbulento a $Re_\tau = 180$ en un ducto de sección cuadrada de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z = 4\pi h \times 2h \times 2h$ (Pinelli et al., 2010). La longitud en la dirección del flujo es suficiente para permitir el adecuado decaimiento de la correlación de velocidades entre dos puntos de acuerdo con Pinelli et al. (2010) y Gavrilakis (1992). El gradiente de presión medio aplicado es $\mathbf{F} = \{-2, 0, 0\}$, uniforme en la dirección vertical. Para este caso se analizó la sensibilidad de diferentes tamaños de grillas de cálculo adoptados. En una primera instancia se incrementó la cantidad de puntos en el plano $y-z$ y luego en la dirección x .

Los resultados obtenidos se compararon con los exhibidos en los trabajos de Gavrilakis (1992) y Vinuesa et al. (2014). Estas investigaciones presentan simulaciones DNS de flujo turbulento en un ducto de sección cuadrada para valores de Re_τ igual a 150 y 180 respectivamente. Además se contrastaron los resultados numéricos con observaciones experimentales obtenidas por Owolabi et al. (2016). La tabla 3 presenta valores característicos del problema para los casos estudiados y para las referencias utilizadas en la comparación. Las referencias para los valores presentados en la tabla son: $Re_b = u_b h / \nu$ es el número de Reynolds basado en la la velocidad media u_b , $u_{\tau,l} = \sqrt{\tau_{w,l}} / \rho$ es la velocidad de corte local, $\tau_{w,l}$ es el esfuerzo de corte en el centro de la pared inferior, $u_{\tau,avg} = \sqrt{\bar{\tau}_w} / \rho$ es la velocidad de corte promedio y u_c es la velocidad en el centro de la sección.

La estadística del flujo medio se obtuvo promediando en el tiempo y en la dirección del flujo los valores instantáneos. El promediado se realizó, además, entre los cuatro cuadrantes de la sección, aprovechando las simetrías del flujo (tanto en dirección y como en dirección z). De este modo, se incrementa el tamaño de la muestra para el cálculo de valores estadísticos, lo que resulta equivalente a promediar datos correspondientes a periodos más largos (Vinuesa et al., 2014).

La simulación se inicia a partir un campo de velocidades interpolado de un caso de flujo turbulento en un canal obtenido mediante un cálculo DNS. El tiempo de simulación requerido para alcanzar el estado estadísticamente estacionario fue de 500 unidades de tiempo y el intervalo de tiempo de integración fue de 400 unidades de tiempo.

| Caso/Referencia | Re_τ | Re_b | $u_{\tau,l}/u_{\tau,avg}$ | $u_c/u_{\tau,l}$ | $u_b/u_{\tau,avg}$ | u_c/u_b |
|-----------------------|-----------|--------|---------------------------|------------------|--------------------|-----------|
| 131 × 131 × 192 (A) | 180 | 2721 | 1.07 | 18.49 | 15.12 | 1.31 |
| 151 × 151 × 192 (B) | 180 | 2726 | 1.07 | 18.54 | 15.14 | 1.31 |
| 131 × 131 × 256 (C) | 180 | 2723 | 1.08 | 18.45 | 15.13 | 1.31 |
| Gavrilakis (1992) | 150 | 2205 | 1.09 | 17.94 | 14.70 | 1.33 |
| Vinuesa et al. (2014) | 180 | 2800 | - | 18.50 | 15.56 | - |
| Owolabi et al. (2016) | 161 | 2230 | - | - | - | 1.31 |

Tabla 3: Comparación de valores obtenidos para distintas grillas y referencias.

En la figura 4 se presenta la comparación entre los valores de flujo medio en la línea vertical $z/h = 1$ de la sección obtenidos y los presentados en por Gavrilakis (1992), Vinuesa et al. (2014) y Owolabi et al. (2016). En el recuadro interior de la misma se exhibe un acercamiento al extremo derecho de este perfil. Los valores se encuentran normalizados con el valor de velocidad de fricción local en la pared inferior ($u_{\tau,l}$). En la zona cercana a la pared, los perfiles de velocidad cumplen con la ley lineal mientras que hacia la mitad de la sección el perfil se acerca a la ley logarítmica. En relación a los perfiles de las referencias consultadas, se puede observar que los resultados numéricos obtenidos para este trabajo presentan un buen acuerdo con los mismos. Del análisis de los resultados obtenidos para las distintas grillas puede observarse que el cálculo es independiente de las mismas.

Las figuras 5(a) y 5(b) presentan, respectivamente, los valores $u_{rms} = \overline{u'^2}^{1/2}$ y el esfuerzo de Reynolds, $-\overline{u'v'}$, en la línea vertical $z/h = 1$ de la sección. La figura 5(a) muestra un buen acuerdo con las referencias presentadas y no se aprecian diferencias entre las grillas analizadas. En el caso de los perfiles de $-\overline{u'v'}$ (figura 5(b)), si bien presentan diferencias muy pequeñas entre los distintos casos de grillas empleadas, exhiben un buen acuerdo con las observaciones experimentales.

De las comparaciones realizadas es posible concluir que el código funciona correctamente. Los datos fueron comparados con varias referencias y se puede observar una coincidencia

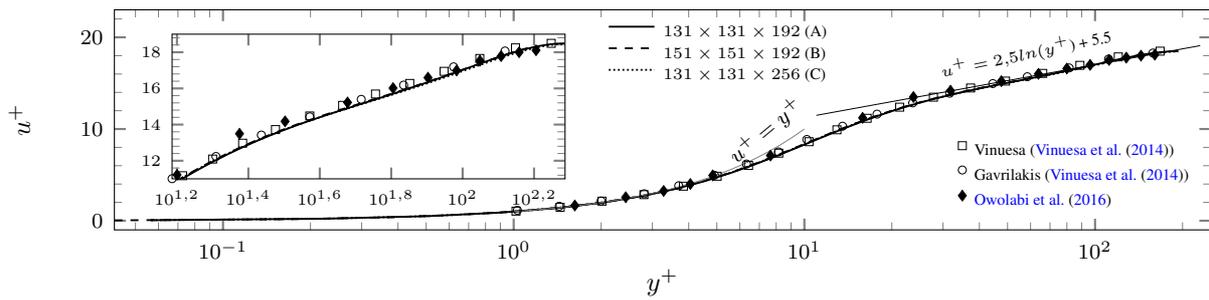


Figura 4: Flujo medio en la línea central vertical normalizado por la velocidad de corte local en la pared inferior en función de la distancia en unidades de pared. Se muestran en líneas los resultados obtenidos para distintos tamaños de grillas analizadas y en símbolos los valores presentados en las referencias. En el recuadro interior se exhibe un acercamiento al extremo derecho del perfil.

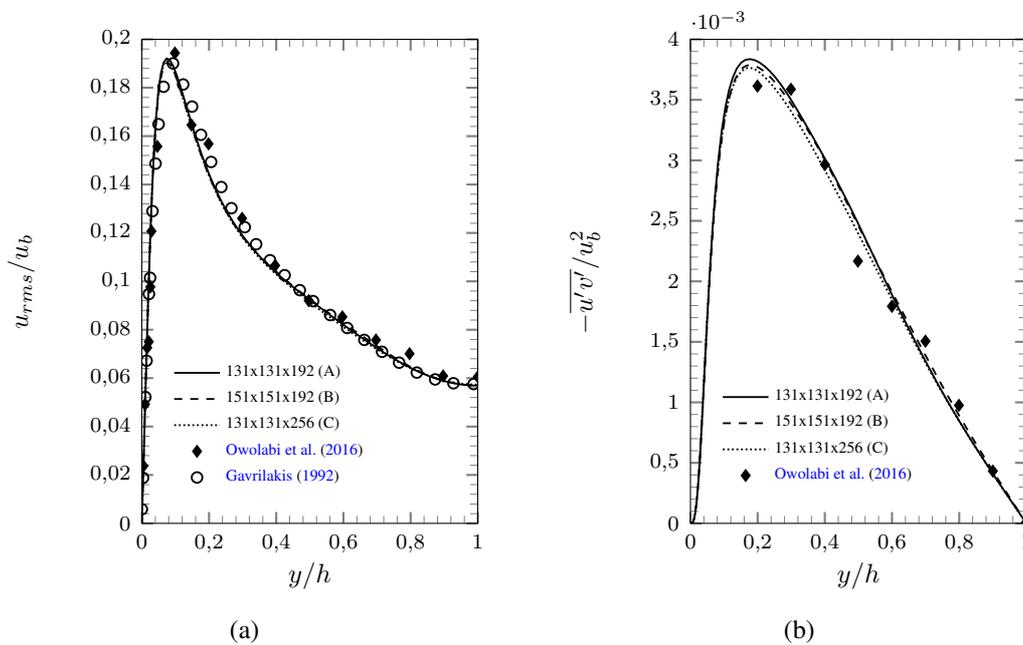


Figura 5: Valores u_{rms} (a) y esfuerzo de Reynolds (b) normalizados con la velocidad media en el centro de la sección en función de la distancia.

razonable entre los mismos. Para los cálculos siguientes de flujo en ductos forzados por gradientes de presión no uniformes en la vertical se utiliza la grilla más gruesa (grilla A) ya que la misma permite obtener resultados aceptables del problema con menor costo computacional con respecto a las restantes.

6. RESULTADOS

En esta sección se presentan resultados de flujos turbulentos en ductos forzados por gradientes de presión no uniformes en la dirección vertical. Se estudiaron variaciones de gradientes de presión lineales (casos CL) en la vertical

$$F_x = -\beta(1 - y) - 2,$$

donde los diferentes valores de los coeficientes β se indican en la tabla 4. Notar que para todos los casos estudiados

$$\int_0^2 -F_x dy = 4$$

y entonces el forzado neto del flujo es el mismo para todos los casos.

| Caso | β | $u_b/u_{\tau,avg}$ | Re_b | $z_{u,max}$ | $u_{\tau,t}$ | $u_{\tau,b}$ | $u_{\tau,h}$ |
|-------|---------|--------------------|--------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| CC | 0.0 | 15.12 | 2721 | 1.00 | 1.072 | 1.072 | 1.072 |
| CL0.5 | 0.5 | 15.10 | 2718 | 0.95 | 1.062 | 1.074 | 1.069 |
| CL1 | 1.0 | 15.10 | 2718 | 0.93 | 1.066 | 1.049 | 1.076 |
| CL2 | 2.0 | 14.72 | 2650 | 0.81 | 1.016 | 0.982 | 1.061 |

Tabla 4: Casos estudiados en este trabajo.

Los gradientes de presión en función de la vertical se muestran en la figura 6(a). En la figura 6(b) se presentan las velocidades en la dirección del flujo en la sección vertical central del ducto para los casos estudiados. Se puede observar que el valor máximo de velocidad se desplaza hacia la pared inferior con respecto al caso CC. Esta diferencia es muy pequeña para los casos CL0.5 y CL1 pero es notoria en el caso CL2. La ubicación de los valores máximos ($z_{u,max}$) para cada caso se exhibe en la tabla 4.

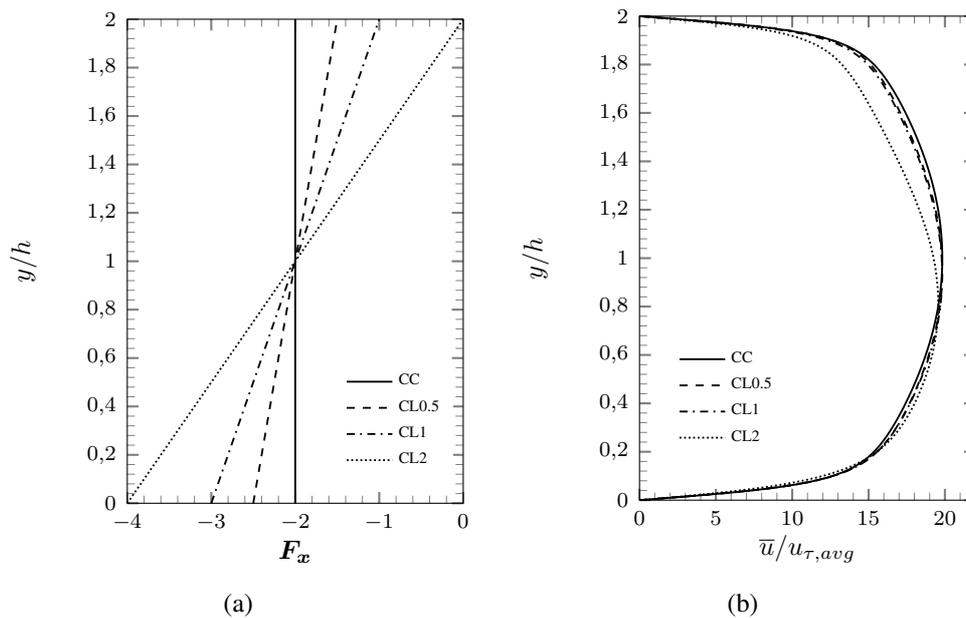


Figura 6: Perfiles en función de la altura del ducto. (a) Gradientes de presión en función de la vertical. (b) Velocidad en la dirección del flujo en el centro de la sección.

La estadística del flujo medio se obtuvo promediando en el tiempo y en la dirección del flujo los valores instantáneos. Para los casos CL el promediado se realizó además, entre las dos mitades verticales de la sección aprovechando la simetría del problema.

Los valores de velocidad de corte en el centro de las paredes horizontales (inferior $u_{\tau,b}$ y superior $u_{\tau,t}$) y de las paredes verticales ($u_{\tau,h}$) se presentan en la tabla 4. Se puede observar que, respecto al caso base (CC), los valores de velocidad de corte en las paredes horizontales disminuyen.

En las figuras 7 y 8 se muestran las velocidades secundarias v y w en líneas verticales y horizontales respectivamente. Para los casos CL0.5 y CL1, a pesar de la similitud entre las velocidades en la dirección del flujo para ambos casos con respecto al caso CC (figura 6(b)), las velocidades secundarias presentan claras diferencias con respecto al caso CC, lo que muestra el efecto del gradiente de presión no uniforme sobre el flujo secundario. Para el caso CL2 las diferencias son más importantes. En la línea central (figura 7(b)), se produce un gran incremento de la magnitud de la velocidad en los dos tercios inferiores de la sección mientras que el perfil en $z/h = 0,51$ (figura 7(a)) muestra un aumento de la velocidad positiva en la zona central y un cambio de signo en el tercio inferior de la sección con respecto al signo del caso CC.

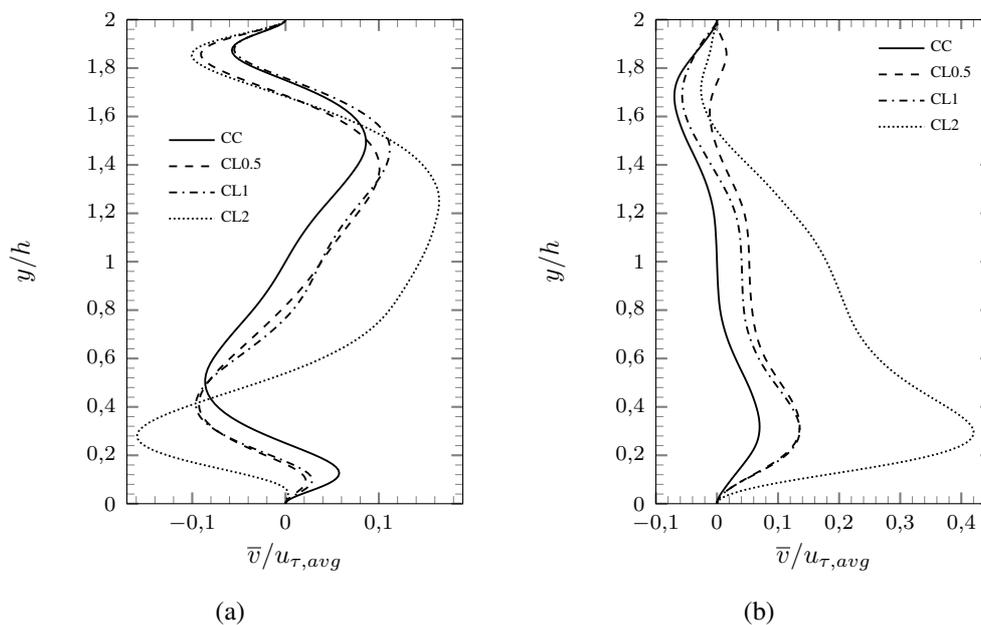


Figura 7: Perfiles de velocidad vertical en función de la vertical (a) En $z/h = 0,51$. (b) En $z/h = 1$.

Con respecto a la velocidad horizontal w , se presentan tres líneas horizontales de la sección del ducto. En el tercio superior de la sección (figura 8(a)) los perfiles de w poseen una forma similar a la del caso CC. En los tres casos analizados los valores máximos crecen y, para el caso CL2, los cambios de signo de w que ocurren en el caso CC cerca de las paredes verticales, no se producen. En la línea horizontal central de la sección (figura 8(b)), los casos CL0.5 y CL1 se comportan de manera muy similar al caso CC, mientras que para el caso CL2 aparecen componentes de w de signos opuestos a los signos del caso CC. En la mitad inferior de la sección (figura 8(c)), los perfiles se asemejan al correspondiente para el caso CC. Se mantienen los cambios de signo de w con respecto a los del caso CC pero crecen los valores máximos, sobre todo en el caso CL2.

En la figura 9 se presentan los perfiles de esfuerzo de corte total adimensional (figura 9(a)),

$$\tau_{tot} = -\overline{u'v'} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

el esfuerzo de Reynolds, (figura 9(b)) y el esfuerzo viscoso (figura 9(c)) normalizados con la velocidad de corte local en la pared inferior en la línea vertical central de la sección ($z/h = 1$) para los casos analizados. A diferencia de lo que ocurre en un canal (Kim et al., 1987), para el

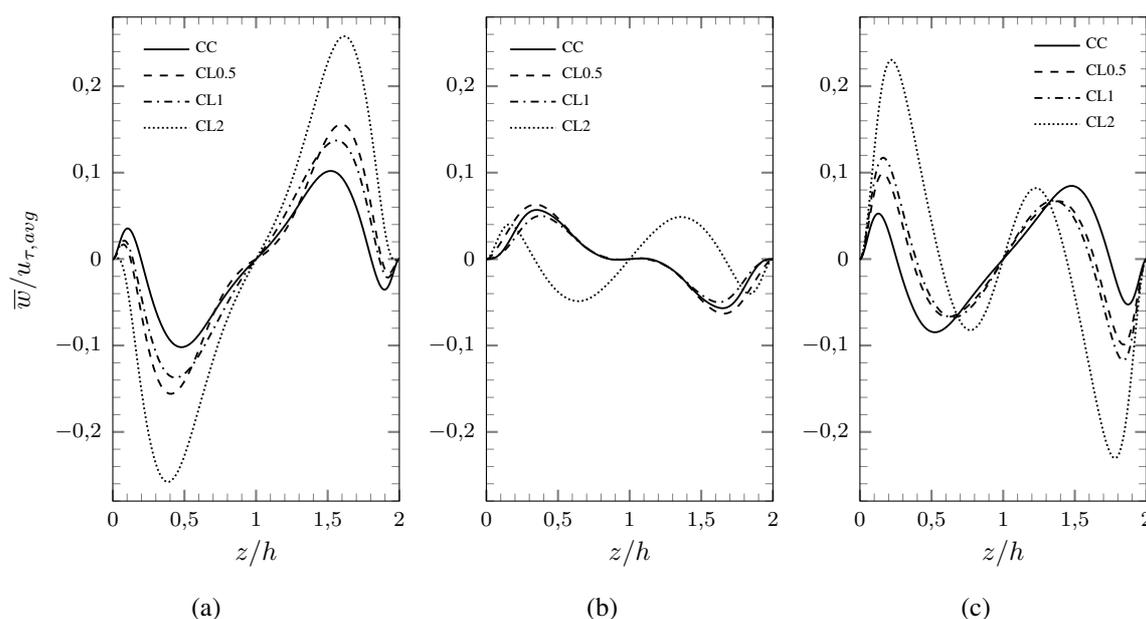


Figura 8: Perfiles de velocidad horizontal en función de la horizontal (a) En $y/h = 1,51$. (b) En $y/h = 1,00$. (c) En $y/h = 0,51$.

caso del ducto τ_{tot} no es lineal. La ecuación de momento en la dirección del flujo para un ducto con flujo completamente desarrollado y promediado en la dirección x y en el tiempo es

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{dF_x(y)}{dx} + \frac{1}{Re_\tau} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \quad (17)$$

Los términos del lado izquierdo de la ecuación (17) representan la convección del flujo en la dirección principal por el flujo secundario, el primer término del lado derecho es el gradiente de presión constante en la dirección x , el segundo término es la difusión viscosa y los dos últimos términos son componentes del tensor de Reynolds. En la línea central vertical del ducto $z/h = 1$, $\bar{w} = 0$ por lo que la ecuación (17) queda

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{dF_x(y)}{dx} + \frac{\partial \tau_{tot}}{\partial y} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Para el caso CC donde F_x es constante en la vertical, la integración términos de la ecuación (18) no conduce a un perfil lineal para τ_{tot} .

Los perfiles de esfuerzo de corte total (figura 9(a)) pierden la simetría vertical con respecto al caso CC ya que el punto donde τ_{tot} se anula se desplaza hacia la pared inferior. Los perfiles en la mitad superior de la sección se separan con respecto al caso CC, disminuyendo su valor (aumentando su magnitud). Los casos CL0.5 y CL1 presentan un comportamiento muy similar entre sí. Para el caso CL2 el valor máximo de τ_{tot} no ocurre en la pared superior sino dentro de la sección. La variación del gradiente de velocidad principal en la dirección vertical entre los distintos casos es prácticamente nula (figura 9(c)), por lo que la modificación del esfuerzo de corte total se produce principalmente por la modificación de la tensión de Reynolds $\overline{u'v'}$ (figura 9(b)). Los valores de los perfiles en la mitad superior de la sección crecen en magnitud con respecto al caso inicial, mientras que en la mitad inferior, la ubicación de los valores máximos se mantiene igual para los casos CL0.5 y CL1 y disminuye su valor en el caso CL2. La posición del cambio de signo de $\overline{u'v'}$, también decrece con respecto al caso CC.

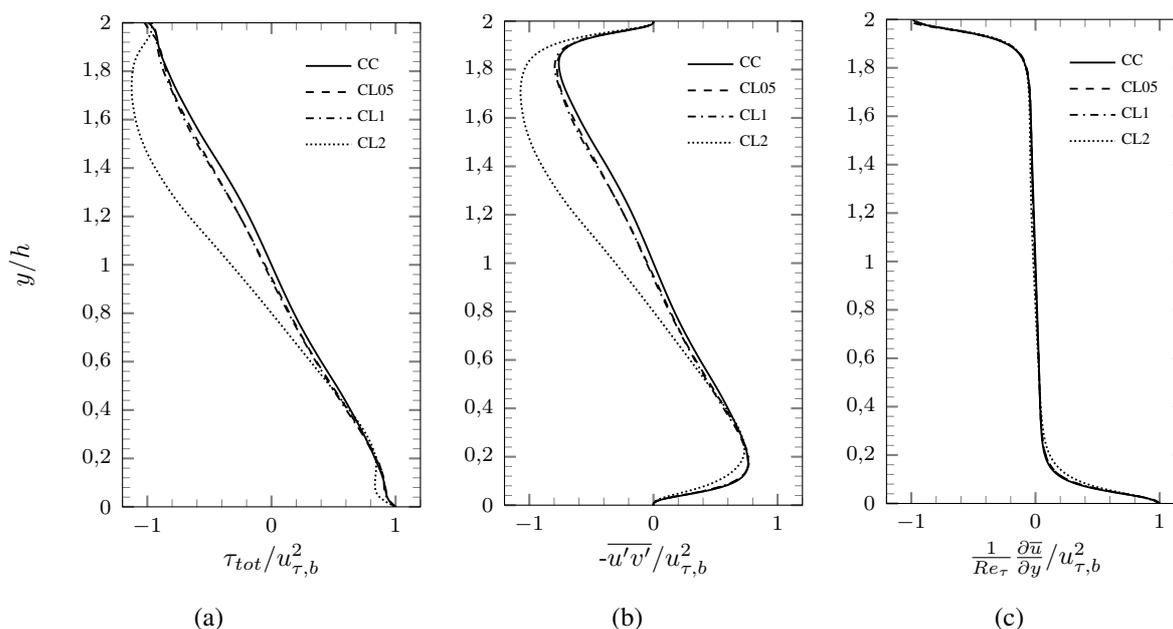


Figura 9: Esfuerzos en la línea vertical central normalizados con el valor de velocidad corte en la pared inferior. (a) Esfuerzo de corte total. (b) Esfuerzo de Reynolds $-\overline{u'v'}$. (c) Gradiente de velocidad $\frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$.

Los valores $u_{rms} = \overline{u'^2}^{1/2}$, $v_{rms} = \overline{v'^2}^{1/2}$ y $w_{rms} = \overline{w'^2}^{1/2}$ en la línea vertical media se muestran en la figura 10 mientras que estos perfiles en la línea horizontal media se presentan en la figura 11. Los perfiles verticales están adimensionalizados con la velocidad de corte local en la pared inferior mientras que los perfiles horizontales se normalizan con la velocidad de corte local en el centro de las paredes verticales. El valor u_{rms} (figura 10(a)) no presenta grandes variaciones en los casos CL0.5 y CL1 con respecto al caso CC. Para el caso CL2, en cambio, se observa un incremento de los valores en la mitad superior de la sección pero los valores máximos cercanos a las paredes no varían con respecto al caso CC. Los perfiles v_{rms} y w_{rms} (figuras 10(b) y 10(c) respectivamente) para los casos CL0.5 y CL1 tampoco muestran variaciones importantes frente al caso de referencia, pero para el caso CL2 ambos exhiben incrementos en los dos tercios superiores de la sección.

Las diferencias que presenta el perfil u_{rms} en la línea horizontal central (figura 11(a)) con respecto al caso inicial solamente son significativas en el caso CL2 y estas variaciones se producen en el centro de la sección. Los casos CL0.5 y CL1 también muestran perfiles similares para los valores v_{rms} (figura 11(b)) y w_{rms} (figura 11(c)) frente al caso CC. El caso CL2 sin embargo, presenta un incremento en ambos valores a lo largo de la dirección horizontal.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó la metodología de cálculo de un código pseudo-espectral paralelo que realiza simulaciones directas de turbulencia. Se validaron los resultados obtenidos por medio de la comparación de éstos con dos casos ampliamente estudiados. Se mostró que el código funciona correctamente.

Se llevó a cabo el análisis del flujo secundario en flujos forzados por gradientes de presión lineales en la dirección vertical. De los tres casos analizados, los casos CL0.5 y CL1 presentan distribuciones de las variables analizadas similares al caso CC mientras que el caso CL2 exhibe diferencias significativas.

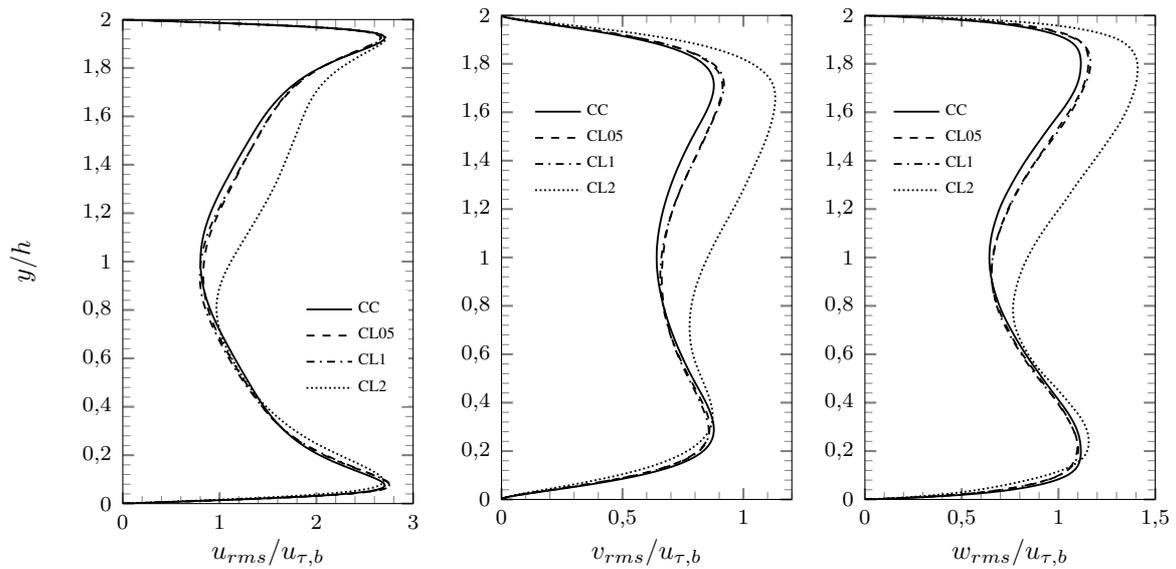


Figura 10: Perfiles u_{rms} (a), v_{rms} (b), y w_{rms} (c) en la línea central vertical normalizados con el valor de velocidad corte en la pared inferior.

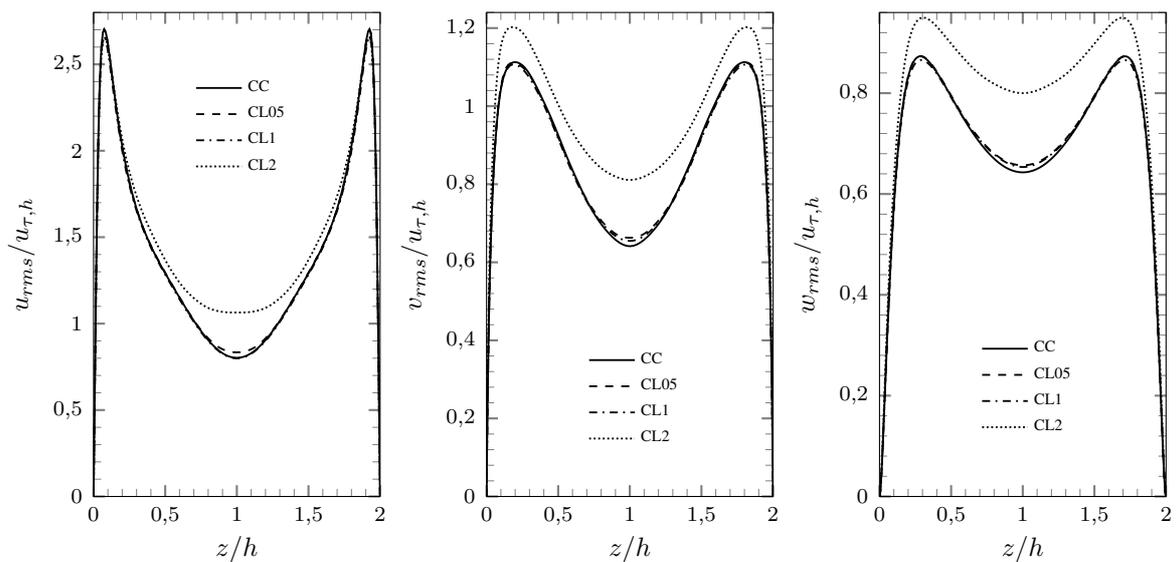


Figura 11: Perfiles u_{rms} (a), v_{rms} (b), y w_{rms} (c) en la línea central horizontal normalizados con el valor de velocidad corte en la pared vertical.

En todos los casos, se observó que el gradiente no uniforme provoca el descenso del máximo de la velocidad en la dirección principal y la variación de las velocidades secundarias. Estas variaciones son pequeñas en los casos CL0.5 y CL1 pero considerables en el caso CL2. La redistribución del flujo secundario en este caso incluye variaciones relevantes de magnitud y cambios de dirección de las velocidades secundarias. Con respecto al esfuerzo de Reynolds $-\overline{u'v'}$, se observó una disminución significativa del mismo solamente en el caso CL2 en la parte superior de la sección. Los valores rms de las velocidades también presentan diferencias importantes para este caso, mostrando incrementos con respecto al caso CC.

REFERENCIAS

- Abad J.D., Frias C.E., Buscaglia G.C., y Garcia M.H. Modulation of the flow structure by progressive bedforms in the Kinoshita meandering channel. *Earth Surface Processes and Landforms*, 38:1612–1622, 2013.
- Breuer M. y Rodi W. Direct and large eddy simulation I. páginas 273–285. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- Brundrett E. y Baines W.D. The production and diffusion of vorticity in a square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 19:375–394, 1964.
- Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., y Zang T. *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Springer-verlag, 1988.
- Dorrell R.M., Darby S.E., Peakall J., Summer E.J., Parsons D.R., y Wynn R.B. Superelevation and overspill control secondary flow dynamics in submarine channels. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 118:3895–3915, 2013.
- Gavrilakis S. Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 244:101–129, 1992.
- Ghia U., Ghia N., y Shin C.T. High-re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- Huser A. y Biringen S. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 257:65–95, 1993.
- Kassem A. y Imran J. Three-dimensional modeling of density current. ii. flow in sinuous confined and unconfined channels. *Journal of Hydraulic Research*, 6:591–602, 2004.
- Kawahara G., Ayukawa K., Ochi J., Ono F., y Kamada E. Wall shear stress and Reynolds stresses in a low Reynolds number turbulent square duct flow. *Trans. JSME B*, 66(641):95–102, 2000.
- Kim J. y Moin P. Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59:308–323, 1985.
- Kim J., Moin P., y Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177:133–166, 1987.
- Launder B.E. y Ying W.M. Secondary flows in ducts of square cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*, 54:289–295, 1972.
- Madabhushi R.K. y Vanka S.P. Large eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in a square duct. *Journal of Physics Fluids*, A3 11:2734–2744, 1991.
- Melling A. y Whitelaw J. Turbulent flow in a rectangular duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 78:289–315, 1976.
- Owolabi B.E., Poole R.J., y Dennis D.J.C. Experiments in low-reynolds-number turbulent flow through a square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 798:398–410, 2016.
- Pinelli A., Uhlmann M., Sekimoto A., y Kawahara G. Reynolds number dependence of mean flow structure in square duct turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 644:107–122, 2010.
- Prandtl L. Über die ausgebildete turbulenz. *Verh. 2nd Intl Kong. für Tech. Mech., Zurich (English transl.) NACA Tech. Memo 62, 435*, 1926.
- Simpson J.E. *Gravity Currents in the environment and the laboratory*. Cambridge University Press, 1997.
- Vinuesa R., Noorani A., Lozano-Durán A., El Khoury G.K., Schlatter P., Fischer P.F., y Nagib H.M. Aspect ratio effects in turbulent duct flows studied through direct numerical simulation. *Journal of Turbulence*, 15:677–706, 2014.

Yao J., Zhao Y., y Fairweather M. Numerical simulation of turbulent flow through a straight square duct. *Applied Thermal Engineering*, 91:800–811, 2015.

Zhang H., Trias F.X., Gorobets A., Tan Y., y Oliva A. Direct numerical simulation of a fully developed turbulent square duct flow up to Re_τ . *Journal of Heat and Fluid Flow*, 54:258–267, 2015.