

ESTUDIO PARAMÉTRICO DE LA INTERFAZ FIBRA-MATRIZ EN COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS CORTAS.

**Bruno Uberti^a, M. Agustina Invaldi^a, Nestor Rossi Cabral^a, Ricardo Barrios D`ambra^a,
Ignacio Iturrioz^b**

^a*Grupo de Mecánica Computacional, Universidad Nacional del Nordeste, Las Heras 727, 3500
Resistencia, Argentina, bru_no8@hotmail.com, <http://ing.unne.edu.ar/mecap/>*

^b*Grupo Mecánica Aplicada, Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Sarmiento Leite 425,
90050170 Porto Alegre, Brasil, ignacio@mecanica.ufrgs.br,
<http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br/~ignacio/>*

Palabras Clave: Método de los Elementos Discretos, Compuestos, Mecánica de Fractura.

Resumen. En la actualidad, las cada vez mayores exigencias en las condiciones de proyecto requiere de materiales nuevos con propiedades superiores y mas económicos a la de los materiales convencionales. Cuando estos son formados por diversos materiales que interactúan física y químicamente estamos en presencia de los llamados materiales compuestos. En estos es posible introducir mejoras en las propiedades mecánicas del conjunto creando una microestructura que relacione a los materiales participantes en forma adecuada. Entre los materiales compuestos utilizados los formados por una matriz reforzada con una segunda fase de fibras tiene muchas aplicaciones en ingeniería. Específicamente la utilización de fibras cortas actuando como segunda fase, embebidas dentro de una matriz, es uno de los mecanismos más efectivos para aumentar el incremento de la tenacidad del compuesto resultante. En este caso la matriz transfiere parte de la tensión aplicada a las fibras, que resisten una porción de la carga. Para lograr que el compuesto fibra-matriz tenga un rendimiento estructural mayor que la matriz aislada, será necesario que la adherencia entre ambos materiales sea alta para evitar el arrancamiento de las fibras. Es por ello que las propiedades mecánicas del material de interface entre matriz y fibra es uno de los puntos determinantes en la correcta performance del compuesto. En este contexto en el presente trabajo se emplea una versión del método de los elementos discreteos formado por barras (DEM) en el estudio paramétrico de las propiedades de la interface fibra matriz. Ensayos de *pullout* son simulados con diferentes leyes de adherencia entre la fibra y la matriz. Conclusiones sobre los resultados obtenidos son presentados destacándose entre ellas las posibilidades de aplicar el DEM como herramienta de análisis en este tipo de problemas.

1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de nuevos materiales está directamente relacionado al aumento constante de la población mundial, y tiene consecuencias directas sobre el medio ambiente. La creciente demanda de productos manufacturados trae como consecuencia un incremento en el consumo de energía, la proliferación de residuos y contaminación. Este escenario expone la necesidad de explorar los materiales en forma segura hasta el límite de sus propiedades, procurando la economía de su utilización para proteger el medio ambiente. De esta forma, la optimización de las propiedades de los materiales así como el desarrollo de nuevos y eficientes procesos de fabricación se convierten en tareas prioritarias y estratégicas para mejorar la calidad de vida de los ciudadanos.

En la construcción civil, la importancia y relevancia destacada de hormigones, morteros y suelos en las obras y construcciones civiles a nivel nacional e internacional es indiscutible. Ellos constituyen, los materiales constructivos más utilizados. Sin embargo, existen en la actualidad desafíos de gran complejidad que requieren urgente solución para permitir que este uso generalizado de hormigones, morteros y suelos esté respaldado por condiciones de seguridad y previsibilidad acordes con las demandas actuales de los diseños Ingenieriles.

La creación de materiales compuestos surge como una respuesta ante las eventuales necesidades aquí mencionadas. Es por esto que en las últimas décadas, la utilización de este nuevo tipo de materiales se generalizó en diversos campos de la ingeniería.

Dentro de los distintos tipos de materiales compuestos que hoy en día se conocen, aquellos reforzados por fibras son los que mayor aplicación y eficiencia presentan. En este tipo de compuestos, la fibra favorece al aumento de la tenacidad del material, mejorando el rendimiento mecánico en gran medida.

El diseño industrial de piezas estructurales realizadas con materiales compuestos requiere formulaciones teóricas y técnicas numéricas que modelen adecuadamente su comportamiento hasta la ruptura.

Uno de los aspectos fundamentales dentro del comportamiento de los materiales compuestos es la capacidad de transmitir los esfuerzos desde la matriz al refuerzo. Aquí radica la importancia en optimizar las condiciones de trabajo del enlace entre las fases que componen el compuesto. Haciendo énfasis en compuestos reforzados por fibras, la capacidad de que ésta absorba tensiones provenientes de la matriz será proporcional al grado de cohesión entre ambos materiales, por esto la región interface fibra-matriz ha sido objeto de estudio por parte de numerosos investigadores.

Beaumont (1979) mediante estudios realizados llegó a la conclusión de que en los compuestos reforzados por fibras, el deslizamiento posterior al despegue entre ambas fases es el fenómeno principal de absorción de energía.

El fenómeno de delaminación resulta ser el mecanismo de falla típico en compuestos reforzados por fibras, y produce una disminución considerable de la resistencia y rigidez en estos materiales. Lo et al (1993) utilizaron la Mecánica de Fractura para modelar este tipo de fenómenos, empleando la “integral J”; mostrando que la importancia de lo supra citado.

Para modelar el fenómeno de delaminación entre fibra y matriz se ha utilizado el método de las interfaces cohesivas originalmente presentado por Neddelman (1987). Como ejemplos de propuestas utilizando esta metodología en el ámbito de las interfaces cohesivas se pueden citar los trabajos de Camacho y Ortiz (1996) y Espinoza et al. (1998).

Otras formas de representar la interface entre la matriz y el refuerzo incluyendo leyes específicas en la interface se pueden encontrar en Agarwal y Bansal (1979) y Len'e y Leguillón (1982).

Por otro lado Cox (1952), Aveston et al. (1971) y Hsueh (1993) proponen modelos basados en la micromecánica para representar el fenómeno de despegue entre fibra y matriz.

Un trabajo más reciente es el de Brighenti et al (2012) que muestra la simulación del proceso de despegue entre una fibra y su interface y el trabajo de Cornetti et al (2012) que presenta una ley de interface que puede ser utilizada en la interface fibra matriz.

Utilizando método de los elementos discretos caracterizado por modelar el sólido con ecuaciones que no precisan verificar la hipótesis del medio continuo también hay algunas propuestas que estudian la interface entre fibra y matriz. Entre ellas podemos citar o trabajo de Brighenti et al (2013) donde una matriz con refuerzo de fibras es simulada buscando prever la falla por fatiga del compuesto.

En el presente trabajo una versión del Método de los Elementos Discretos formado por barras es utilizada en el estudio de las propiedades mecánicas de la interface entre una fibra de acero y una matriz de hormigón.

2 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

2.1 Introducción

En la formulación del método de los elementos discretos empleada en este trabajo (MED), el continuo es representado por medio de un arreglo espacial de barras con masas concentradas en sus nodos. En particular, la estrategia de discretización mostrada en las Figuras 1a y 1b es debida a Nayfeh and Hefzy (1978). La misma usa un módulo básico formado por 20 elementos de barra y 9 nodos dónde los elementos están interconectados. Cada nodo tiene tres grados de libertad de desplazamiento. En el caso de un material elástico isotrópico, la rigidez axial por unidad de longitud de los elementos longitudinales (aquellos que definen las aristas del módulo y los que conectan los nodos localizados en el centro del módulo) en el modelo discreto equivalente, E_l^A , es:

$$E_l^A = A_l E = \phi EL^2, \quad (1)$$

Dónde A_l es el área de la sección transversal del elemento, L es la longitud del módulo cúbico y E es el módulo de Young del sólido que está siendo discretizado. Similarmente, la rigidez axial por unidad de longitud de los elementos diagonales, E_d^A , es

$$E_d^A = A_d E = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \phi EL^2. \quad (2)$$

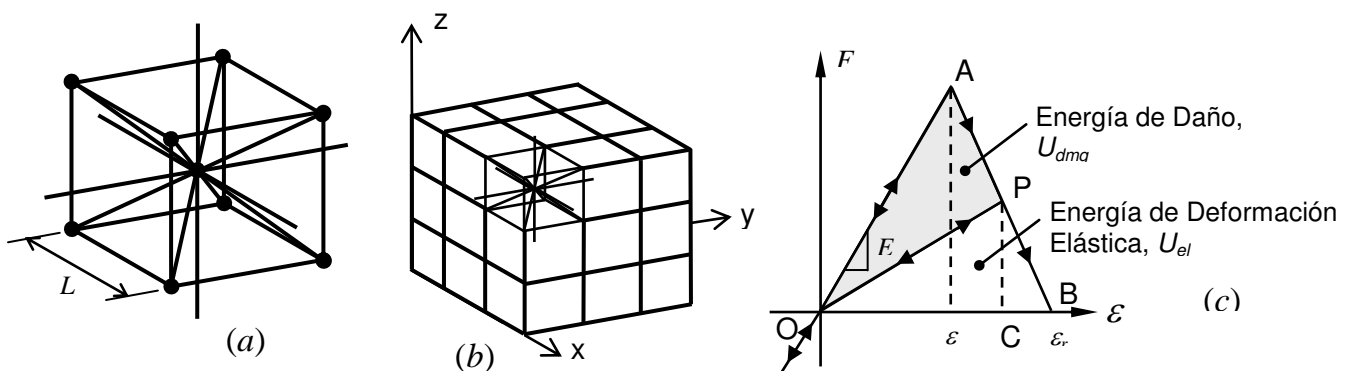


Figura 1: Estrategia de discretización del MED: (a) módulo cúbico básico, (b) generación del cuerpo prismático, (c) relación constitutiva bilineal.

El coeficiente $2/\sqrt{3}$ en ecuación (2) tiene en cuenta la diferencia de longitud entre los elementos longitudinales y diagonales, esto es, $L = 2/\sqrt{3} \cdot L_d$. Para sólidos aproximadamente isotrópicos, $\phi = (9 + 8\delta)/(18 + 24\delta)$ y $\delta = 9\nu/(4 - 8\nu)$, donde ν es el coeficiente de Poisson del sólido.

Es importante puntualizar que para $\nu=0.25$, la correspondencia entre el sólido equivalente discreto y el continuo isotrópico es completa. Por otro lado, para valores de $\nu \neq 0.25$ aparecen discrepancias en los términos de corte. O sea que para $\nu \neq 0.25$ la configuración cubica no puede representar un material isotrópico, pero sobre este particular puede argumentarse que en las aplicaciones ingenieriles prácticas no existen continuos localmente isotrópicos. La isotropía en sólidos es una propiedad volumétrica que refleja la distribución aleatoria de la orientación de los elementos constituyentes.

Detalles acerca del cálculo de la rigidez axial de la sección transversal equivalente para los elementos longitudinales y diagonales dadas en las ecuaciones (1) y (2) pueden encontrarse en los trabajos de [Nayfeh and Hefzy \(1978\)](#) y [Dalguer et al \(2001\)](#).

Con la discretización espacial propuesta es posible llegar a la ecuación de movimiento presentada a continuación:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(t) - \mathbf{P}(t) = 0 \quad (3)$$

Dónde \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$ son los vectores conteniendo los desplazamientos nodales, velocidades y aceleraciones; y \mathbf{M} y \mathbf{C} son las matrices de masa y amortiguamiento, respectivamente. Los vectores $\mathbf{F}(t)$ y $\mathbf{P}(t)$ contienen las cargas nodales internas y externas.

Como \mathbf{M} y \mathbf{C} son diagonales, las ecuaciones en la expresión (3) son no acopladas, y pueden ser fácilmente integradas en el dominio del tiempo usando un esquema de diferencias finitas explícito.

Vale la pena señalar que como las coordenadas son actualizadas en cada paso de tiempo, y como los nodos están articulados en sus extremos la posibilidad de modelar problemas con grandes desplazamientos es considerada naturalmente.

La estabilidad del esquema de integración es asegurada con la siguiente limitación en el incremento de tiempo

$$\Delta t \leq \frac{0.6L}{C_p} \quad (4)$$

Dónde C_p es la velocidad de propagación de la onda longitudinal,

$$C_p = \sqrt{E/\rho} \quad (5)$$

La convergencia del MED para elasticidad lineal e inestabilidad elástica fue verificada por [Hayashi \(1982\)](#).

2.2 Modelo constitutivo no lineal para daño del material

[Rocha et al \(1991\)](#) extendieron el MED para resolver problemas de fractura frágil mediante la introducción de la relación constitutiva bilineal (RCE) ilustrada en la [Figura 2c](#). Esta ley constitutiva tiene como objetivo capturar los efectos irreversibles de la nucleación y propagación, por lo tanto, tiene en cuenta la reducción de la capacidad de carga del elemento. El área bajo la curva fuerza vs. deformación (el área bajo el triángulo OAB en [Figura 2c](#) es la densidad de energía de deformación necesaria para fracturar el área de influencia del elemento. Así, para un punto P dado en la curva fuerza vs. desplazamiento, el área del triángulo OPC representa la densidad de energía elástica reversible almacenada en el

elemento, mientras que el área del triángulo OAP es la densidad de energía de fractura disipada. Una vez que la densidad de energía de daño disipada iguala a la energía de fractura, el elemento falla y pierde su capacidad de carga. Por otro lado, en el caso de cargas de compresión el material se comporta como elástico lineal. Así, la falla en compresión es inducida por tracción indirecta.

Los parámetros constitutivos y símbolos introducidos en la [Figura 2c](#) son (ver [Rocha et al, 1991](#); y [Riera and Rocha, 1989](#)):

- Fuerza, F : fuerza axial en el elemento, función de la deformación longitudinal ε .
- Rigidez Elemental, E_i^A : dependiendo de si es considerado un elemento longitudinal o diagonal se adoptan los valores para E_l^A o E_d^A , ver ecuaciones 1 y 2.
- Longitud del Módulo del MED, L .
- Energía específica de fractura, G_f : energía de fractura del material por unidad de área, el cuál es coincidente con la energía de fractura del material, G_c .
- Área del Elemento; A : dependiendo de si es considerado un elemento longitudinal o diagonal los valores de A_l o A_d , deberían ser adoptados.
- Área de fractura Equivalente, A_i^f : el valor de este parámetro impone que la condición de energía disipada por la fractura del material continuo y su representación discreta sean equivalentes. Con este propósito la fractura de una muestra cúbica del material de dimensiones $L \times L \times L$ es considerada.

La energía disipada por la fractura de una muestra continua del material debida a una fisura paralela a una de sus caras es

$$\Gamma = G_f \Delta = G_f L^2, \quad (6)$$

Dónde Δ es el área de fractura real. Por otra lado, la energía disipada cuando el módulo del MED de dimensiones $L \times L \times L$ se fractura en dos partes tiene en cuenta la contribución de cinco elementos longitudinales (cuatro coincidentes con las aristas del módulo y una interna y cuatro elementos diagonales, ver [Figura 2a](#). Entonces, la energía disipada por el módulo del MED puede escribirse como sigue:

$$\Gamma_{\text{MED}} = G_f \left(4 \cdot 0.25 \cdot c_A + c_A + 4 \cdot c_A \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2, \quad (7)$$

Dónde el primer término en la suma tiene en cuenta los cuatro elementos del borde (el coeficiente 0.25 es debido al hecho de que cada elemento es compartido por cuatro módulos), el segundo término tiene en cuenta el elemento interno longitudinal, y el tercer término considera la contribución de los cuatro elementos diagonales. El coeficiente c_A es un parámetro de escala usado para hacer cumplir la equivalencia entre Γ y Γ_{MED} . Así, igualando las expresiones 6 y 7 resulta

$$G_f L^2 = G_f \left(\frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (8)$$

A partir de la cual puede deducirse fácilmente que $c_A = 3/22$ para establecer la equivalencia entre Γ y Γ_{MED} . Finalmente, el área de fractura transversal equivalente de los elementos longitudinales es

$$A_i^f = (3/22)L^2, \quad (9)$$

Mientras que para los elementos diagonales son definidos por

$$A_d^f = (4/22)L^2. \quad (10)$$

- Deformación crítica de falla (ε_p): la máxima deformación alcanzada por el elemento antes de la iniciación del daño (punto A en [Figura 2c](#)). La relación entre ε_p y la energía específica de fractura, G_f , es dada en términos de los conceptos de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica. Esto es

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E(1-\nu^2)}} \quad (11)$$

Dónde R_f es el denominado factor de falla, el cual tiene en cuenta la presencia de un defecto intrínseco de tamaño d . De esta forma R_f es definido como

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{d}} \quad (12)$$

Dónde Y es un parámetro adimensional que depende de las geometrías del espécimen y de la fisura.

- Deformación Límite (ε_r): el valor de deformación para el cual el elemento pierde su capacidad de carga (Punto C en la [Figura 2c](#)). Este valor debe ser establecido para satisfacer la condición que, luego de la falla del elemento, la densidad de energía disipada iguala el producto del área de influencia del elemento, A_i^f , por la energía específica de fractura, G_f , dividida por la longitud del elemento. Esto es

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_c \cdot A_i^f}{L_i} = \frac{K_r \cdot \varepsilon_p^2 \cdot E \cdot A_i}{2} = \frac{K_r \cdot \varepsilon_p^2 \cdot E_i^A}{2} \quad (13)$$

Dónde los subíndices i tienen que ser especializados para ser l o d dependiendo si el elemento en consideración es longitudinal o diagonal, respectivamente. El coeficiente K_r es una función de las propiedades del material y de la longitud del elemento, L_i , como sigue:

$$K_r = \left(\frac{G_f}{E\varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \left(\frac{2}{L_i} \right) \quad (14)$$

Para garantizar la estabilidad del algoritmo, debe ser satisfecha la condición $K_r \geq 1$ (Riera and Rocha, 1991). En este sentido es interesante definir la longitud de elemento crítica.

$$L_{cr} = 2 \left(\frac{G_f}{E\varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \quad (15)$$

El coeficiente $\left(\frac{A_i^f}{A_i} \right)$ en ecuación (15) es $\left(\frac{A_l^f}{A_l} \right) = \frac{3}{22\phi}$ y $\left(\frac{A_d^f}{A_d} \right) = \frac{\sqrt{3}}{11\delta\phi}$ para los

elementos longitudinales y diagonales respectivamente (ver ecuaciones 1, 2, 9 y 10). En el caso especial de un continuo isotrópico con $\nu=0.25$, los valores de las funciones $\delta=1.125$ y $\alpha=0.4$, que resulta en $\left(\frac{A_i^f}{A_i}\right) = \left(\frac{A_d^f}{A_d}\right) \approx 0.34$. Así, para propósitos prácticos se puede utilizar un sólo valor para la longitud de elemento crítica tanto para los elementos diagonales como longitudinales. Por consiguiente, la condición de estabilidad anterior puede ser expresada como

$$K_r = \frac{L_{cr}}{L_i} \geq 1 \Rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad (16)$$

que es la máxima longitud del elemento para la cual se preserva la estabilidad de la RCE. Finalmente, la expresión para la deformación límite es

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (17)$$

Es interesante ver a partir de las expresiones dadas más arriba, que dependiendo de su naturaleza, los parámetros usados para definir la RCE son propiedades del material, dependiendo sólo de la discretización, o dependiendo de ambos, el material y la discretización. En esta forma ε_r , E , R_{fc} y G_f son propiedades del material, A_i^f y L dependen sólo de la discretización del modelo, y E_i^A y ε_r dependen tanto de las propiedades del material como de la discretización del modelo.

Por otra parte, vale la pena señalar que, aunque el MED utiliza una ley de daño escalar para describir el comportamiento de los elementos, el modelo global tiene en cuenta el daño anisotrópico ya que posee elementos orientados en diferentes direcciones espaciales.

Más información sobre la fundamentación teórica de la versión del MED presentada además de otras aplicaciones se pueden encontrar en [Iturrioz \(1995\)](#), dónde se estudia el comportamiento de materiales frágiles como hormigón y hormigón armado. La simulación del comportamiento de suelos frente a cargas explosivas pueden encontrarse en [Riera e Iturrioz \(1998\)](#), el estudio de propagación dinámica de fisuras en [Spellmeyer et al. \(2001\)](#), así como problemas de impacto en materiales compuestos poliméricos en [Barrios D'Ambra et al. \(2002\)](#) y comportamiento en mecánica de Rocas en [Dalguer et al. \(2003\)](#); [Miguel et al. \(2008\)](#), [Iturrioz et al. \(2009\)](#). Aplicaciones del Método de Elementos Discretos en Mecánica de Fractura Estática y Dinámica en [Kosteski \(2008\)](#), [Kosteski et al. \(2008\)](#) y [Barrios D'Ambra et al. \(2007\)](#), [Kosteski et al. \(2012\)](#). Estudios de efectos de tamaño y de la independencia de la malla en [Ríos y Riera \(2004\)](#) y [Miguel et al. \(2010\)](#). Simulación de ensayos de Emisión acústica en [Iturrioz et al. \(2013a, 2013b\)](#).

En [Miguel \(2005\)](#) se estudian criterios constitutivos para el deslizamiento con fricción a lo largo de fallas sísmicas.

3 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA LEY DE ADHERENCIA FIBRA MATRIZ EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS.

3.1 descripción del problema a ser analizado

Se presenta a continuación un estudio que tiene como objetivo explorar la ley de adherencia fibra matriz de un compuesto utilizando una versión del Método de los Elementos Discretos

presentado en la sección 2. Se considera aquí una configuración geométrica simple formada por una matriz de hormigón rectangular separada por una fisura en su parte central, la unión entre estas dos partes se realiza por una fibra de acero. En la Figura 2 se muestra la configuración geométrica del modelo descrito, indicando las condiciones de contorno aplicadas. En los bordes superiores e inferiores de la placa, se aplican desplazamientos prescritos (v') en la dirección normal al plano de la fisura.

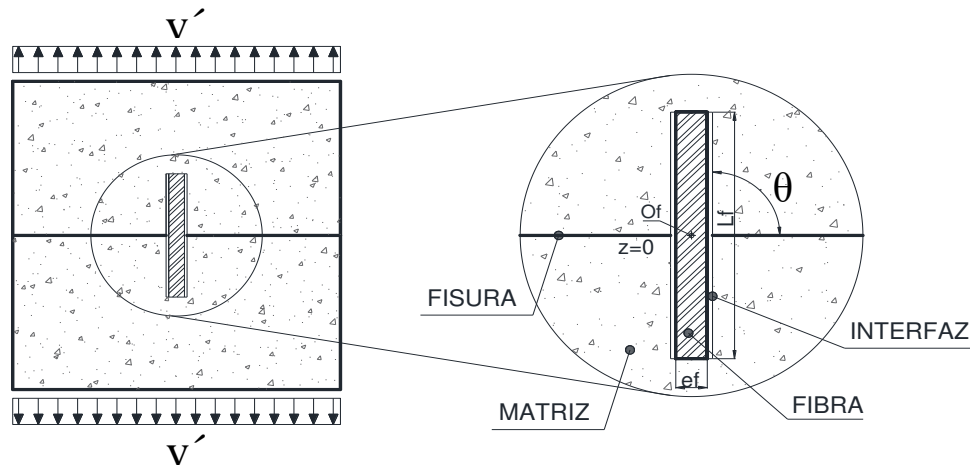


Figura 2: Configuración geométrica del problema estudiado.

En la dirección del espesor el problema será considerado como estado plano de deformaciones.

La equivalencia entre el área de contacto considerada en este caso y en el caso tridimensional es descrito en detalle en Uberti et al (2016).

Los parámetros que serán estudiados en el análisis de las propiedades mecánicas de la región de interface son el módulo de elasticidad, la tenacidad y la deformación crítica de dicho material.

3.2 Implementación del modelo en MED

Utilizando el Método de los Elementos Discretos, se construyó el modelo presentado en la Fig. 3, en dicha figura se presentan las dimensiones consideradas. La implementación del estado plano de deformaciones en el MED es realizado considerando sólo un módulo de espesor restringiendo el movimiento de los nodos fuera del plano en el cual el modelo se desarrolla. La longitud del módulo cúbico considerado fue de $L_{co}=0.25mm$. Cada fibra tiene una longitud $L_f=10mm$ y un espesor $ef=0,5mm$. En esta figura se puede identificar con claridad la región de la fibra, de la matriz y la región de interface fibra matriz. También es indicada la forma en que las condiciones de contorno que excitan la placa son aplicadas.

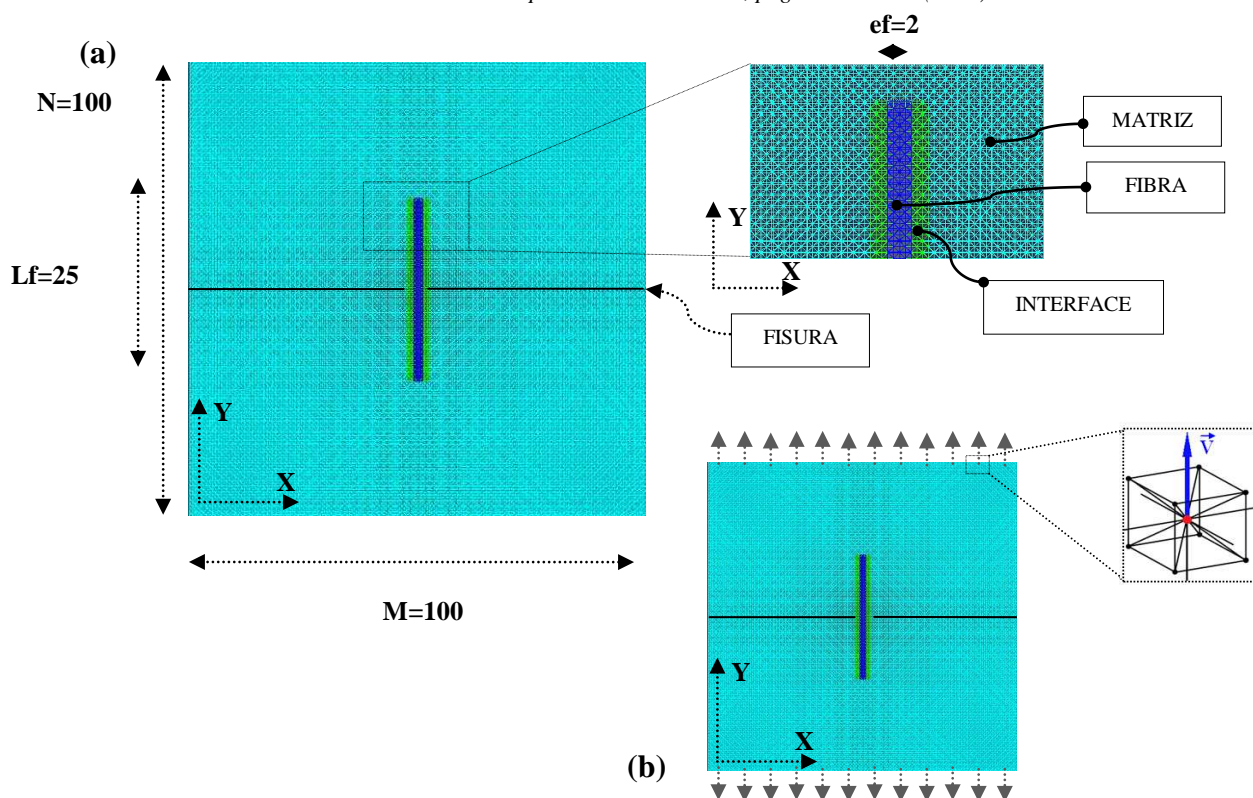


Figura 3 (a) Disposición de la fibra dentro de la matriz fisurada, indicando la discretización adoptada en el modelo de DEM. (b) Esquema de aplicación de desplazamientos prescriptos (v). Dimensiones en coordenadas modulares ($1x\text{módulo}=lco=0.25\text{mm}$).

Para modelar la fisura en el MED los nudos centrales de los módulos cúbicos a uno y otro lado del plano de la fisura son duplicados y se debilitan las barras que unen dichos nudos. En [Kosteski et al. \(2008\)](#) se puede encontrar más información del procedimiento sobre como generar estas fisuras.

En la [Tabla 1](#) se indican los parámetros utilizados en la simulación, para la región de la fibra y de la matriz. Las propiedades en la región de interface entre fibra y matriz adoptadas son discutidas en la próxima sección. Cabe aclarar que los valores de energía de fractura introducidos para la matriz, la fibra y la interface fueron considerados como un campo aleatorio, con un valor medio indicado en la tabla para los tres tipos de materiales estudiados, con un coeficiente de variabilidad de 50% y con una densidad de probabilidades de Weibull. Otro parámetro a ser considerado es la longitud de correlación del campo aleatorio que en este caso fue considerado igual a la longitud del módulo. El considerar que introducimos el G_f como un campo aleatorio implica que la ley constitutiva uniaxial presentada en la [Figura 1c](#) varía de elemento a elemento cambiando su valor de deformación crítica. Mayores detalles sobre las características aleatorias de los parámetros de entrada son discutidos en [Kosteski et al 2011](#).

Longitud de Fibra L_f	10 mm
Diámetro de Fibra d_f	0.5 mm
Coefficiente de Poisson [ν]	0.25
Masa específica de Matriz [ρ_m]	2000 kg/m ³
Módulo de Young de Matriz [E_m]	30 GPa
Deformación Crítica de Matriz, ϵ_{pm}	1.22×10^{-3}

Energía específica de fractura de Matriz [G_{fm}]	24 N/m
Masa específica de Fibra [ρ_f]	7800 kg/m ³
Módulo de Young de Fibra [E_f]	200 GPa
Deformación Crítica de Fibra, ϵ_{pf}	2.10 x 10 ⁻³
Energía específica de fractura de Fibra [G_{ff}]	21780 N/m

Tabla 2: Parámetros utilizados en el modelo del DEM, considerando una discretización de $L_{co}=0,1\text{mm}$

3.3 Comparación de la ley de adherencia propuesta por Fantilli y Valini (2007) y los resultados obtenidos con el DEM.

Según Fantilli y Vallini (2007), para barras de acero liso embebidas dentro de una matriz de mortero de cemento, el ablandamiento post-pico se debe a la influencia del diámetro de la fibra en la resistencia de la unión. La rama ascendente y la etapa post-pico de la relación entre la resistencia y el deslizamiento de la región de adherencia entre fibra y matriz se definen según las siguientes ecuaciones:

$$\tau = \tau_{m\acute{a}x} \left(\frac{s}{s_1} \right)^{0.5} \quad \text{Si: } s \leq s_1 \quad (18)$$

$$\tau = \tau_{fin} + (\tau_{m\acute{a}x} - \tau_{fin}) e^{k(s_1-s)} \quad \text{Si: } s > s_1 \quad (19)$$

Dónde $\tau_{m\acute{a}x}$ = tensión tangencial en la zona de interface, s_1 = deslizamiento en la región de interface, τ_{fin} = valor asintótico de la tensión tangencial en interface y k = coeficiente.

La máxima tensión de contacto entre fibra y matriz es considerada como función del diámetro de la fibra según se propone en Bazant et al. (1995), según la siguiente fórmula:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \left(\frac{1.572}{\sqrt{12.5 + \phi}} \right) \sqrt{f_c} \quad (20)$$

Siendo ϕ = diámetro de la fibra y f_c = tensión de compresión de la matriz.

De esta manera, para fibras de acero laminadas en caliente, los parámetros que definen la ley propuesta por Fantilli y Vallini (2007) son:

- $\tau_{m\acute{a}x} = 2.60 \text{ Mpa}$
- $\tau_{fin} = 0.61 \text{ MPa}$
- $s_1 = 0.1\text{mm}$

En la Figura 5 se muestra la ley de adherencia obtenida por los autores citados considerando una fibra de acero liso de diámetro $\phi = 0.5\text{mm}$.

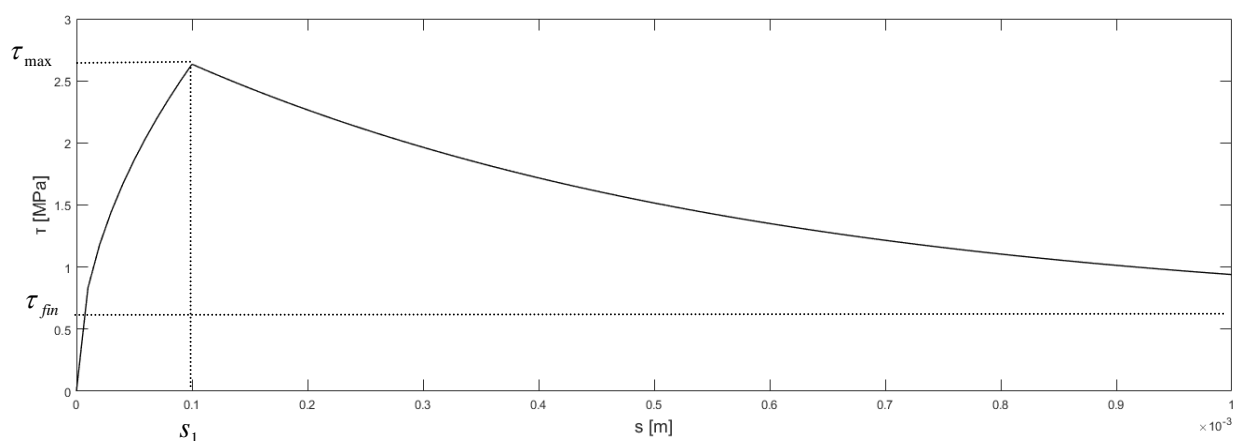


Figura 5: Curva tensión tangencial-deslizamiento (“ $\tau - s$ ”) de la región de interface propuesta por Fantilli y Vallini (2007) para barras de acero liso laminadas.

$$\tau_{m\acute{a}x} = 2.60 \text{ Mpa}, \tau_{fin} = 0.61 \text{ MPa y } s_1 = 0.1\text{mm}.$$

Fue realizado el ajuste de esta curva de adherencia con el Método de los Elementos Discretos empleando las propiedades para la fibra y la matriz indicadas en la [Tabla 2](#), y para la interface las propiedades indicadas en la [Tabla 3](#). Dichos parámetros permiten que la interface aquí modelada produzca un comportamiento similar al propuesto por los autores [Fantilli y Vallini \(2007\)](#) en la primera parte de la curva.

Masa específica de Interface [ρ_i]	5200 kg/m ³
Módulo de Young de Interface [E_i]	0.11 GPa
Deformación Crítica de Interface, ε_{pi}	2.04×10^{-2}
Energía específica de fractura de Interface [G_{fi}]	80000 N/m

Tabla 3: Parámetros utilizados en el modelo del DEM, para simular el comportamiento del material de interface entre fibra y matriz.

En la [Figura 6](#) se presenta la curva de adherencia “Tau –s” de la región de interface resultado de la simulación del compuesto con el DEM. También se grafica la curva que rige el comportamiento de la interface al adoptar la ley cohesiva propuesta por la [Fantilli y Vallini \(2007\)](#).

En el modelo de elementos discretos aquí utilizado, la tensión tangencial en la interface es computada como la fuerza de puente resistida por la fibra a lo largo de toda el área de contacto entre fibra y matriz. Dicha fuerza de puente se obtiene como la suma de las reacciones en uno de los extremos de los dos bloques que simulan la matriz. Luego, los desplazamientos “s” de la interface son obtenidos como el promedio de los desplazamientos de los puntos intermedios de la interface en uno de los bloques que simulan la matriz.

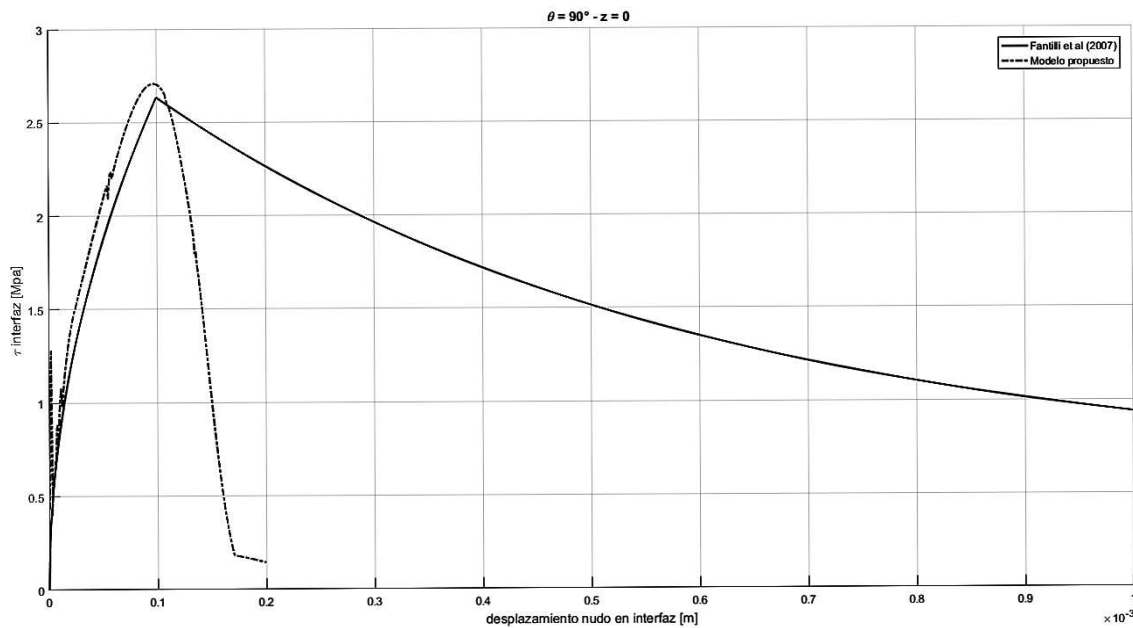


Figura 6: Comparación entre las curvas tensión tangencial-deslizamiento (“ $\tau - s$ ”) propuesta por Fantilli y Vallini (2007) y propuesta en este trabajo.

En la comparación entre ambas curvas se observa similitud en el valor de tensión tangencial máxima y en el valor de deslizamiento entre la fibra y la matriz donde acontece la máxima tensión de corte.

También es posible percibir que la rama de softening de la curva analítica propuesta por Fantilli y Vallini (2007) es mucho más extendida que la obtenida con el modelado de MED. De esta forma después de alcanzar la tensión de corte máxima la disipación adicional de energía propuesta por Fantilli y Vallini (2007) no puede ser capturada con el modelo numérico propuesto.

3.4 Estudio paramétrico de las variables que gobiernan la adherencia entre fibra y matriz.

En este estudio paramétrico será analizada la influencia de modificar el módulo de elasticidad, la tenacidad y la deformación crítica del material de la interface fibra matriz. Las características de estos parámetros fueron explicadas en la sección 2 en la presentación del modelo.

En la Tabla 4 se presentan los parámetros que fueron cambiados en la interface. Se considerará como modelo patrón los datos presentados en las Tablas 2 y 3, siendo que fueron propuestos valores mayores y menores para cada uno de los parámetros indicados modificando uno por vez (E , G_f , deformación crítica).

MODELO patrón	
Masa específica de Interface [ρ_i]	5200 kg/m ³
Módulo de Young de Interface [E_i]	0.11 GPa
Deformación Crítica de Interface, ϵ_{pi}	2.04×10^{-2}
Energía específica de fractura de Interface [G_{fi}]	80000 N/m
Módulo de Young de Interface [E_i] (Modelo E-)	0.0219 GPa
Módulo de Young de Interface [E_i] (Modelo E+)	0.55 GPa
Energía específica de fractura de Interface [G_{fi}] (Gc-)	53.33 N/m
Energía específica de fractura de Interface [G_{fi}] (Gc+)	120000000 N/m
Deformación Crítica de Interface, ϵ_{pi} (ϵ_{p-})	4.08×10^{-3}
Deformación Crítica de Interface, ϵ_{pi} (ϵ_{p+})	1.02×10^{-1}

Tabla 4: Parámetros utilizados en el DEM, para simular el comportamiento del material de interface entre fibra y matriz variando módulo de elasticidad, tenacidad y deformación crítica.

Se pretende con este estudio demostrar cómo influyen los parámetros mencionados en el comportamiento de la interface dentro del material compuesto, así como también cuál es el grado de adherencia que se produce entre fibra y matriz, lo que se traduce en una mayor o menor transmisión de cargas desde la matriz hacia la fibra.

3.4.1 Influencia del Módulo de Elasticidad de Interface (E-i)

Se realiza el estudio de cómo interviene el valor del módulo de Elasticidad de la interface en el comportamiento del compuesto analizado.

En la Figura 7 se presentan, resultados en términos de tensión tangencial vs desplazamiento de interface “s”, los resultados obtenidos de la simulación con el MED de los modelos E+ y E-, descritos en Tabla 4 y en los cuales se modifica el módulo de elasticidad de la región de interface, tomando como base el modelo patrón.

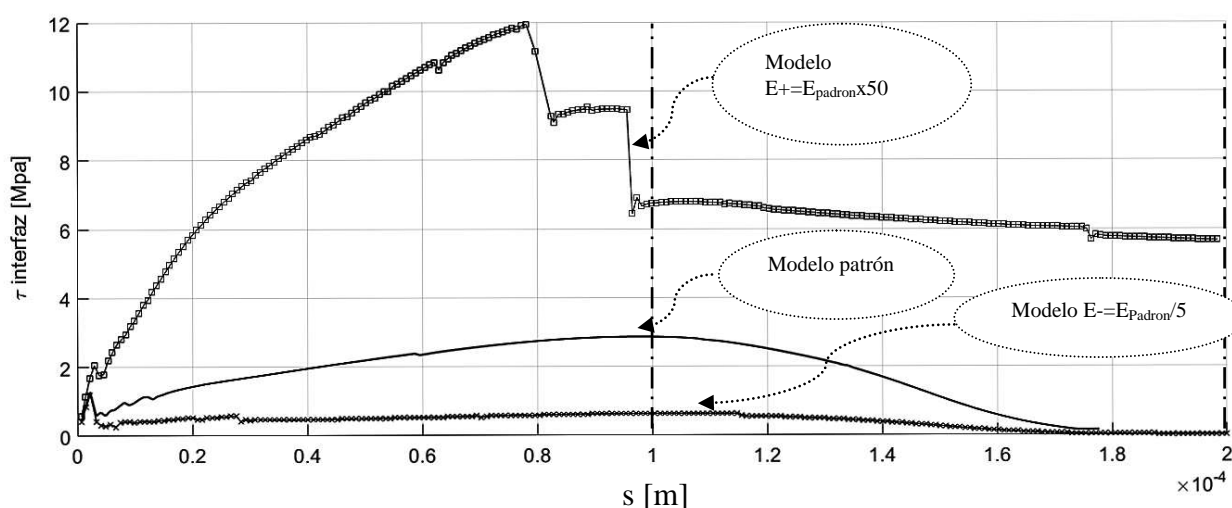


Figura 6: Comparación entre las curvas tensión tangencial vs. deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz “s” (“ $\tau - s$ ”) de los modelos E+, E- y modelo patrón, simulados con MED.

A continuación, en la [Figura 7](#), se presentan los resultados en términos de energía elástica y energía de daño en todo el modelo. Se presenta también la evolución de la energía disipada por daño en la región de la interface.

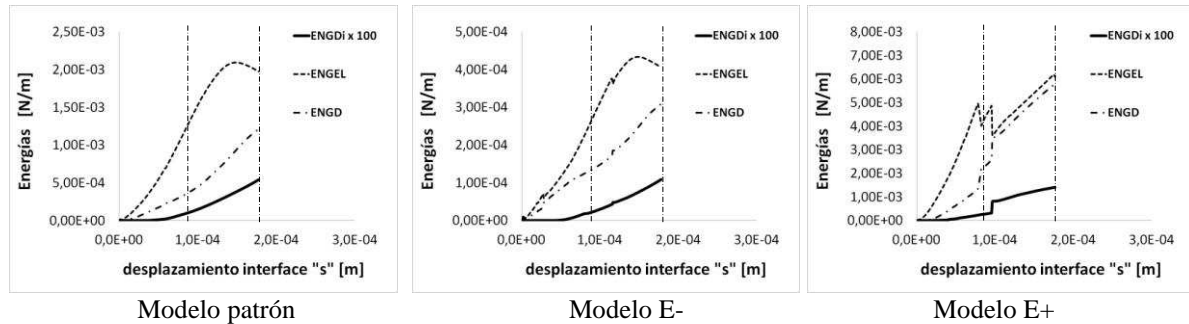
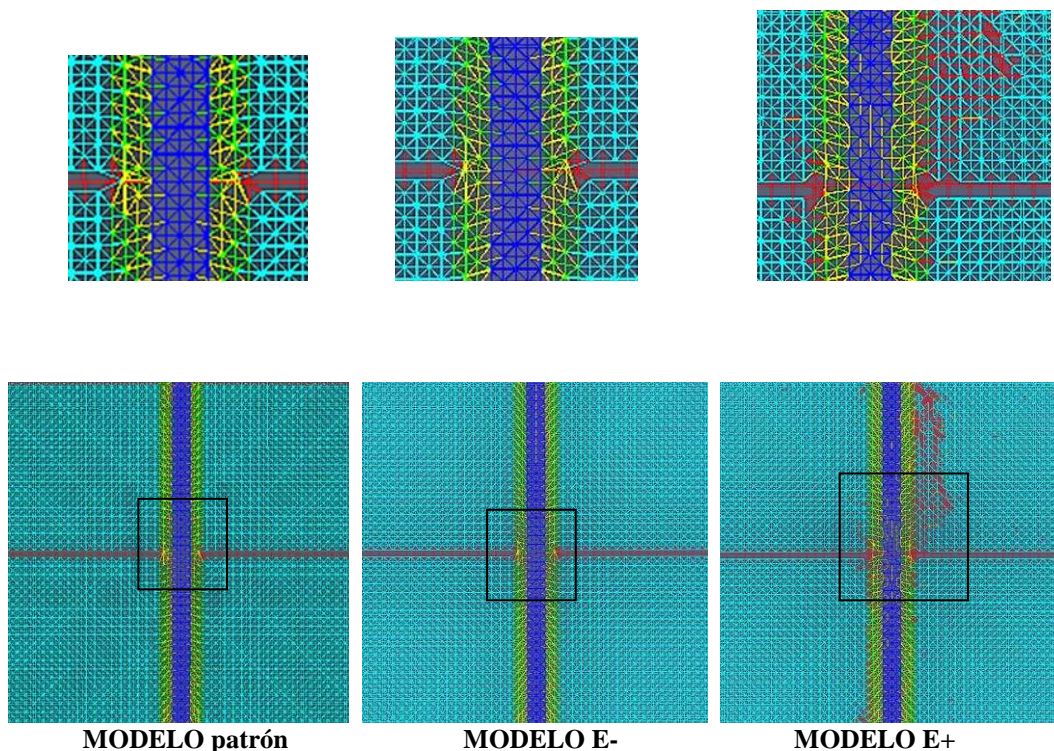


Figura 7: Energía elástica total (ENGEL), energía de daño disipada total (ENGD) y energía de daño disipada en la interface (ENGDi) de los modelos analizados.

Por último en la [Figura 8](#) se presentan configuraciones de ruptura para los niveles de desplazamiento de la interface $s=1e-4$ m y $s=2e-4$ m para los tres valores de módulo de elasticidad de la interface modelados. Estos valores de desplazamientos son indicados también con líneas verticales en las curvas de las [Figuras 6 y 7](#).

$$s = 1.00 \text{ e-4m}$$



$$s = 2.00 \text{ e-4m}$$

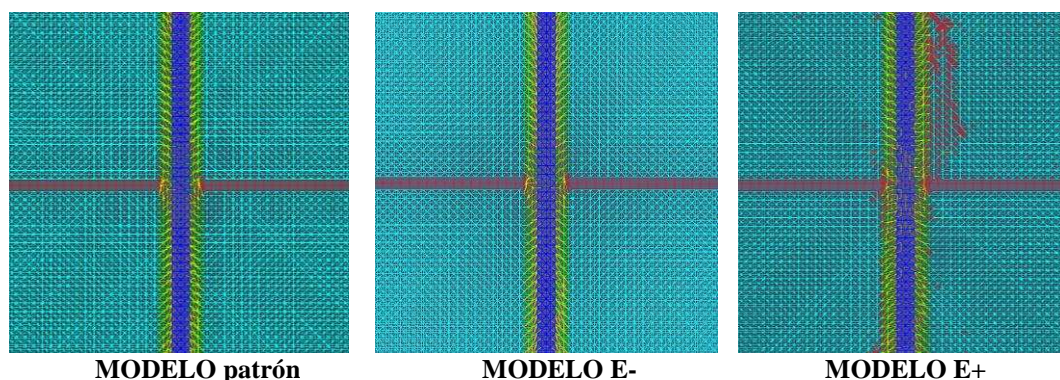


Figura 8: Proceso de ruptura del compuesto para los tres modelos de interface analizados, en distintos instantes de tiempo. En color amarillo se indican las barras dañadas y en rojo las barras rotas. En la parte superior de la figura se han colocado algunos detalles de c/u de las configuraciones graficadas para el desplazamiento $s=1\text{e-4m}$.

Discusión de los resultados: Se observa en la Figura 6 que a medida que el Módulo de Elasticidad de la interfaz aumenta la rigidez de la respuesta en términos de tensión de interface vs desplazamiento aumenta. En el caso de E+ esta situación permite que la ruptura acontezca en la matriz (ver configuración de ruptura de la Figura 8) permitiendo llegar a una tensión de la interface mucho mayor aunque la rigidez de la matriz sea 6 veces mayor que la rigidez de la interface. Probablemente si continuamos aumentando la rigidez de la interface se podría comprobar que esto no influirá en aumentar considerablemente la resistencia del compuesto. En los otros dos casos $E_{\text{patrón}}$ y E-, vemos que la configuración de ruptura muestra que la ruptura acontece en la interface siendo que no hay cambios sustanciales en la resistencia del compuesto en estos dos casos. Vemos también que cuando la ruptura acontece en la interface la curva tensión de adherencia vs desplazamiento es suave, siendo que cuando la ruptura acontece en la matriz, la ruptura es espasmódica mostrando claramente este patrón la Figura 6. Probablemente este patrón diferenciado cuando la ruptura es en la matriz o en la región de interface pueda ser determinado claramente realizando ensayos de emisión acústica. En la Figura 7 es posible observar en los balances de energía de los tres casos estudiados que hay un comportamiento sensiblemente diferente en el caso de E+ y en los otros dos casos simulados. Es posible ver que para el caso de E+ la disipación por daño es bien mayor que en los otros dos casos lo cual muestra como haciendo más rígida la unión entre la matriz y la fibra implica en tornar el compuesto más tenaz.

Haciendo énfasis en la energía de deformación total de cada uno de los modelos analizados, aquí se observan características destacables en el comportamiento de cada uno de ellos. El modelo E+ refleja mayor desarrollo de energía de deformación en los primeros instantes de carga, pero la elevada rigidez de la interface provoca la ruptura temprana del modelo, limitando así el aumento en la tenacidad del compuesto. El modelo E-, en cambio, presenta una adherencia entre fibra y matriz muy débil impidiendo la correcta transferencia de las tensiones entre ambas fases, fenómeno que también implica una limitante en el eficiente aumento de la tenacidad que generaría el aporte de la fibra dentro de la matriz.

La condición más favorable se observa en el modelo elegido como patrón, en el que se desarrolla en el compuesto buena cantidad de energía de deformación, permitiendo la correcta transmisión de las tensiones desde la matriz hacia la fibra durante todo el proceso de apertura

de la fisura. Esto genera que la incorporación de la fibra dentro de la matriz con un material de adherencia de las características del modelo patrón cumpla su objetivo primordial de aumento de la tenacidad de la matriz.

3.4.2 Influencia de la Energía Específica de Fractura de la interfaz (G_c -i)

Se procede al estudio paramétrico de cómo interviene el valor de la Energía Específica de Fractura de la interface en el comportamiento del material compuesto analizado, evaluando los resultados obtenidos de la simulación con el DEM de los modelos G_c+ y G_c- , en los cuales dejando fijos los parámetros de módulo de elasticidad y de deformación específica del modelo patrón, se procede variar el valor de la energía específica de fractura de la interface.

En la [Figura 9](#) se muestran los resultados obtenidos en la simulación cuando cambiamos la tenacidad en la región de la interface. En la [Figura 10](#) se presentan las configuraciones obtenidas durante la simulación en los tres casos, y finalmente las curvas obtenidas en términos de valores de energía durante el proceso simulado. Donde la energía elástica y energía disipada por daño en todo el modelo y específicamente en la región de la interface es presentada.

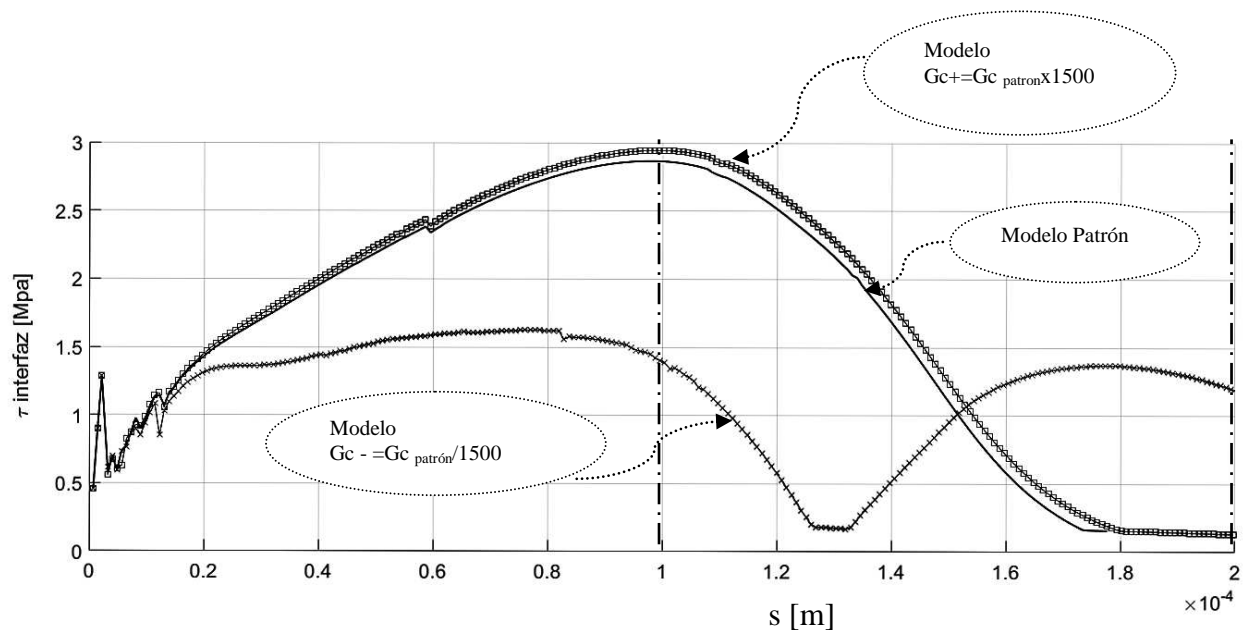
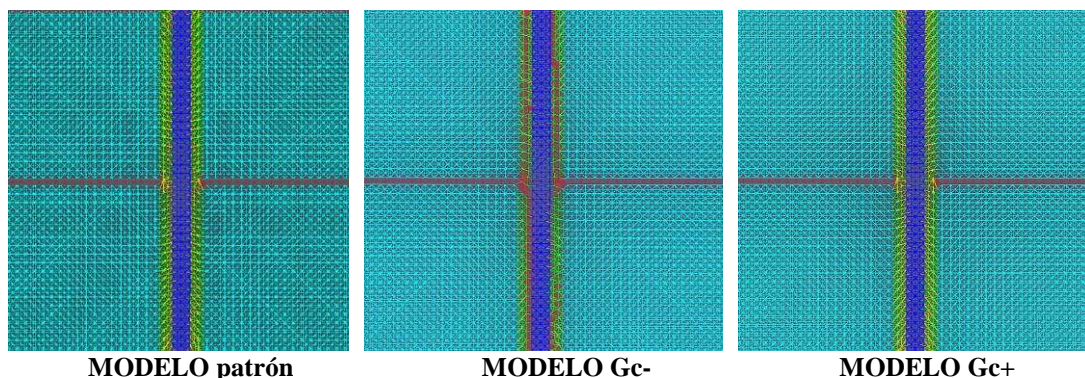


Figura 9: Comparación entre las curvas tensión tangencial vs deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz “s” (“ $\tau - s$ ”) de los tres modelos analizados con MED, variando la energía Específica de fractura.

$$s = 1.00 \text{ e-}4\text{m}$$



$$s = 2.00 \text{ e-}4\text{m}$$

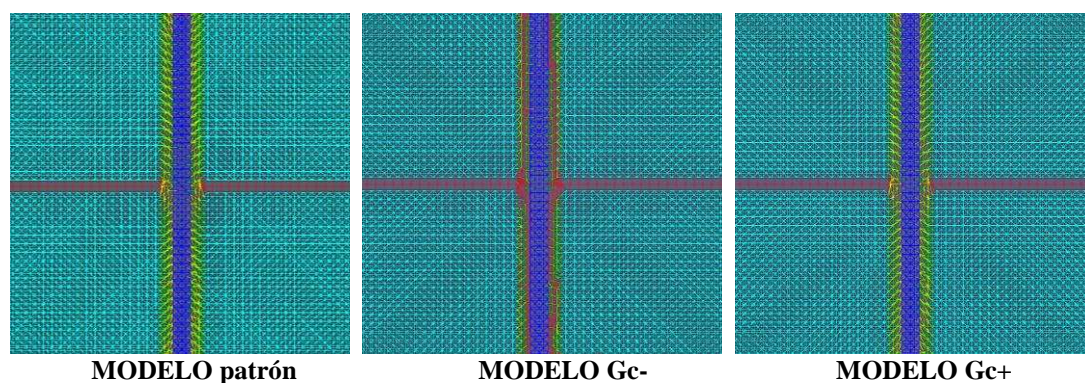


Figura 10: Proceso de ruptura del compuesto para los tres modelos de interface analizados, en distintos instantes de tiempo. En color amarillo se indican las barras dañadas y en rojo las barras rotas.

Discusión de los resultados: Se observa que partiendo del modelo adoptado como patrón, el aumento del parámetro G_c no genera una diferencia de comportamiento apreciable en el pico de la curva “ $\tau - s$ ” de la interface. No sucede lo mismo al disminuir el valor de G_c . En este caso, el pico de la curva disminuye, cayendo la tensión máxima absorbida por la interface. La disminución de la energía específica de fractura de la interface genera un debilitamiento del material de adherencia entre fibra y matriz provocando el despegue entre ambas fases del compuesto para desplazamientos de la interface cada vez menores.

Lo mencionado en el párrafo anterior se observa con claridad en la [Figura 10](#), donde se muestran distintas configuraciones de ruptura para los niveles de desplazamiento de la interface $s=1\text{e-}4\text{m}$ y $s=2\text{e-}4\text{m}$ de la simulación con MED.

En la [Figura 11](#) es posible constatar lo dicho anteriormente. La mayor diferencia se presenta en el comportamiento del modelo G_{c-} en el que la curva que representa la energía de daño disipada en la región de interface toma valores constantes para valores de desplazamiento de la interface menores, evidenciando la ruptura para bajos valores de deformación de todo el compuesto.

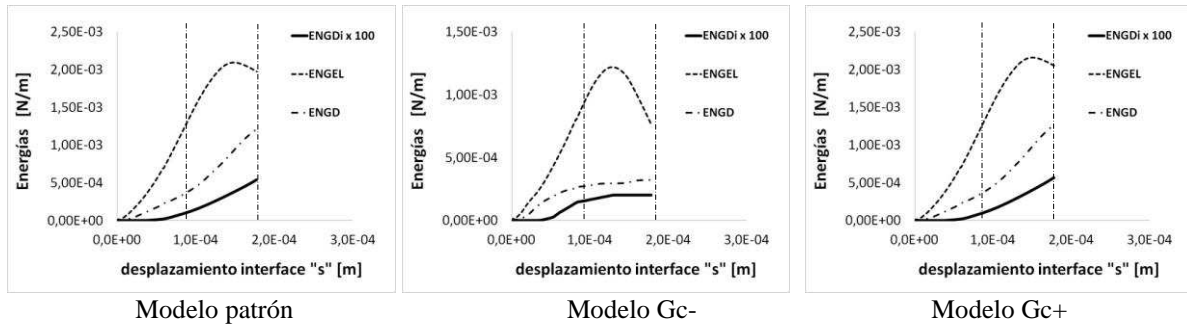


Figura 11: Energía elástica total (ENGEL), energía de daño disipada total (ENGD) y energía de daño disipada en la interface (ENGDi) de los modelos analizados.

3.4.3 Influencia del valor de la Deformación Específica de interfaz (ϵ_p -i)

Adoptando como base el modelo patrón, se dejan fijos los valores de módulo de elasticidad y energía específica de fractura de la interface, variando el valor de la deformación específica ϵ_p . En la Figura 12 se muestran los resultados obtenidos de la simulación con MED de los modelos ϵ_p+ y ϵ_p- contrastados con los resultados obtenidos en el modelo patrón.

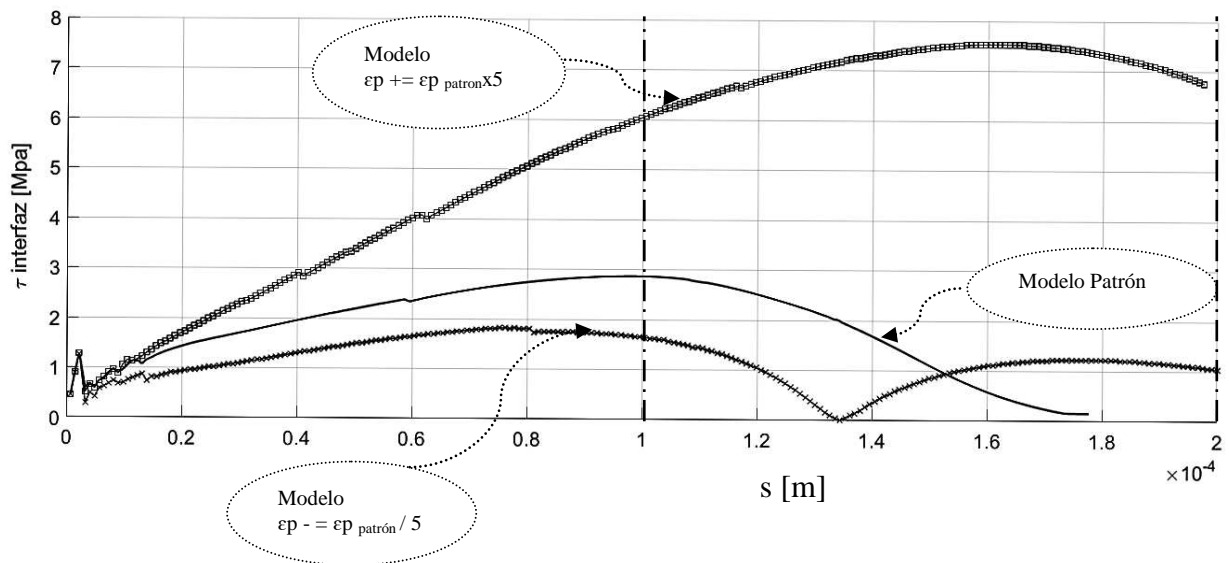
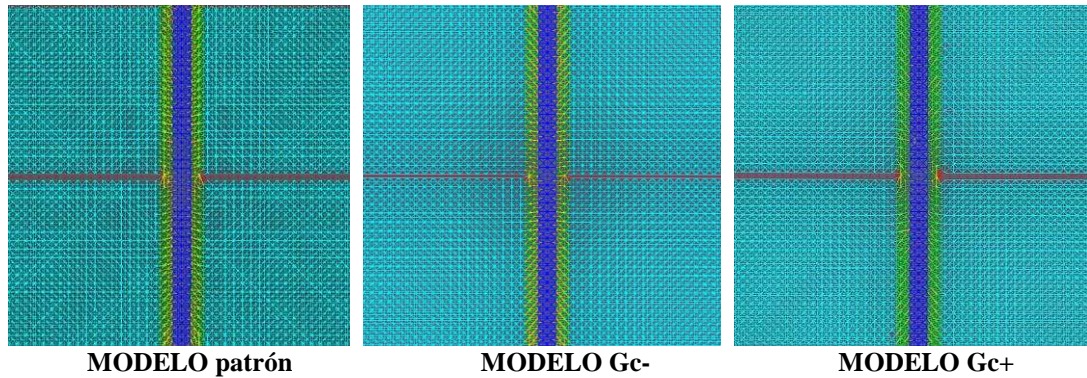


Figura 12: Comparación entre las curvas tensión tangencial vs deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz “s” (“ $\tau - s$ ”) de los tres modelos analizados con MED, variando la Deformación específica (ϵ_p) de interface.

En la Figura 13, se muestran distintas configuraciones de ruptura para los niveles de desplazamiento de la interface $s=1e-4m$ y $s=2e-4m$ de la simulación con MED. Luego en Figura 14 son presentados los balances de energía de los tres modelos analizados.

$s = 1.00 \text{ e-}4\text{m}$



$s = 2.00 \text{ e-}4\text{m}$

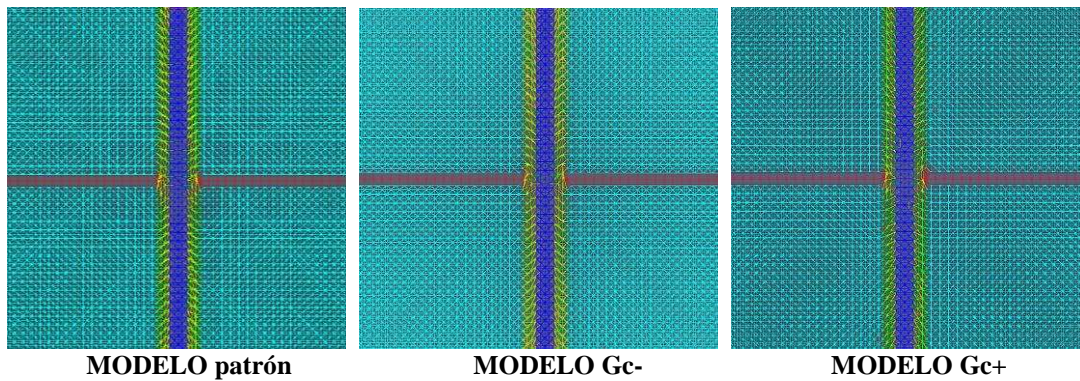


Figura 13: Proceso de ruptura del compuesto para los tres modelos de interface analizados, en distintos instantes de tiempo. En color amarillo se indican las barras dañadas y en rojo las barras rotas.

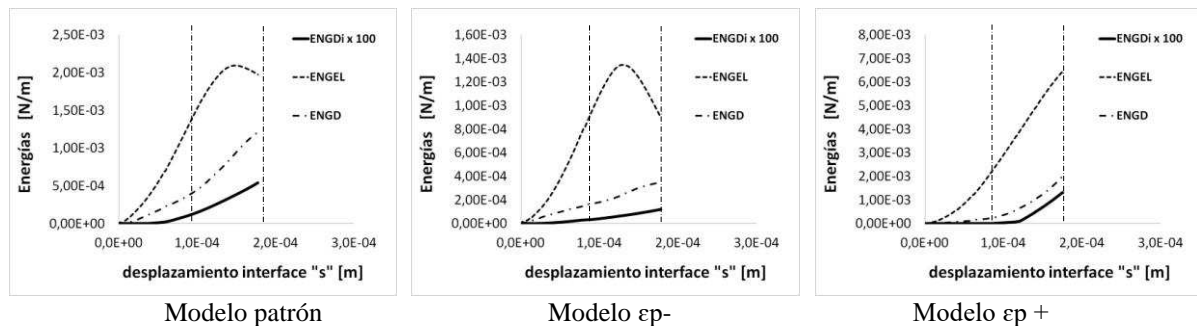


Figura 14: Energía elástica total (ENGEL), energía de daño disipada total (ENGDI) y energía de daño disipada en la interface (ENGDI) de los modelos analizados.

Discusión de Resultados: Se destaca que a mayor valor de deformación específica se posibilitan mayores aperturas de fisura acompañado de un mejor rendimiento en la transmisión de tensiones entre la fibra y la matriz. Se observa en [Figura 14](#), que el aumento en el valor de ϵ_p de la región interface permite que dicho material posibilite la mejor transferencia de las tensiones provenientes de la matriz hacia la fibra experimentando daño para valores de deformación mayores que en los otros dos modelos analizados, lo que

complementado con [Figura 12](#) revela lo mencionado al inicio de este párrafo. Así, mediante la implementación del modelo ϵ_{p+} , el compuesto experimenta un comportamiento mucho más favorable frente a las sollicitaciones externas.

De manera inversa, la disminución en la deformación específica de este material de contacto entre fibra y matriz, generará condiciones desfavorables en el compuesto, ocasionando una ruptura más temprana. Esta misma tendencia se evidencia en la [Figura 14](#) donde son presentados los resultados en términos del balance de energía.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo, se presenta una versión del Método de los Elementos Discretos (MED) como una herramienta efectiva para estudiar materiales compuestos de matriz frágil y reforzados por fibras cortas, que se encuentran seccionados por una macrofisura.

Se han analizado los parámetros fundamentales a tener en cuenta a la hora de intervenir en las propiedades de la región de contacto (o interface) entre fibra y matriz. Este estudio preliminar ilustra la potencialidad de este tipo de metodología en el estudio paramétrico de factores que influyen en el comportamiento del compuesto. Creándose varias posibilidades en aprovechar esta herramienta en trabajos futuros combinándola con optimización para buscar parámetros del compuesto óptimos. O combinando la misma con el método de los elementos finitos lo que permitiría una mayor flexibilidad para generar geometrías más complejas.

5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agarwal, B D y Bansal, R K. Effect on an interfacial layer on the properties of fibrous composites: a theoretical analysis. *Fibre Sci. Technol.*, vol5, p. 129-141, 1979.
- Aveston, J, Cooper, G A y Kelly, A. Single and multiple fracture. In Conference Proceedings of the National Physical Laboratory: Properties of Fiber Composites. 1971.
- Barrios D'ambra, Ricardo; Iturrioz, I. ; Coceres, Hector ; Kostaski, Luis ; Tech, Tomas ; Cisilino, Adrian . Cálculo Del Factor De Intensidad De Tensiones Utilizando El Método De Los Elementos Discretos. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, v. 4, p. 1-22, 2007.
- Bazant, Z. P., Li, Z. y Thoma, M. Identification of stress-slip law for bar or fiber pullout by size effect tests. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, v. 121 (5), p. 620 – 625, 1995.
- Beaumont, P. W. R. Fracture mechanics in fibrous composites. In R. A. Smith (Ed.), *Fracture Mechanics, Current Status, Fracture Prospects*, pp 211 – 233. Pergamon Press.
- Brighenti R., Carpinteri A., Spagnoli A., Scorza D. Continuous and lattice models to describe crack paths in brittle-matrix composites with random and unidirectional fibres. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 108, p. 170–182, 2013.
- Brighenti, R., Carpinteri A., Spagnoli, A., Scorza, D.: “Cracking behaviour of fibre-reinforced cementitious composites: A comparison between a continuous and discrete computational approach”. *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 103:103–114.
- Brighenti, R., Carpinteri A., Spagnoli, A., Scorza, D.: “Continuous and lattice models to describe crack paths in brittle-matrix composites with random and unidirectional fibres”. *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 108:170–182.
- Brighenti R., Carpinteri A., Scorza D. Fracture mechanics approach for a partially debonded cylindrical fibre. *Composites: Part B*, v. 53, p. 169–178, 2013.
- Camacho, G T y Ortiz M. Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International journal of Solid and Structures*. 33 (20 22), p. 2899 – 2938, 1996.
- Cornetti, P., Mantic, V., Carpinteri, A. Finite Fracture Mechanics at elastic interfaces.

- International Journal of Solids and Structures*, v. 49, p. 1022–1032, 2012.
- Cox, H L. The elasticity and the strength of paper and other fibrous materials. *Br. J. Appl. Phys.*, v. 3, p. 72-79, 1952.
- Dalguer L.A., Irikura K., Riera J.D., y Chiu H.C. The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 chi-chi, taiwan, earthquake: brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91, 2001.
- Dalguer, A., Irikura, K., and Riera J. D., Generations of New Cracks Accompanied by Dynamic Shear Rupture Propagation of the 2000 Tottori (Japan), Earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 93, pp. 2236-2252, 2003.
- Espinosa, H D, Zavattieri, P D y Dwivedi, S. A finite deformation continuum-discrete model for the description of fragmentation and damage in brittle materials. *Submitted to the Special Issue of Journal of mechanics and Physics of Solids*, 1998.
- Hayashi, Y., Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982.
- Fantilli, A. P. y Vallini, P. A cohesive interface model for the pullout of inclined steel fibers in cementitious matrixes. *Journal of Advanced Concrete Technology*, v. 5, nro. 2, p. 247-258, 2007.
- Hsueh, C H. Evaluation of Interfacial properties of fiber-reinforced ceramic composites using a mechanical properties microprobe. *J. Am. Ceram. Soc.*, v. 76, p. 3041-3050, 1993.
- Iturrioz, I. ; Riera, Jorge Daniel . Discrete Elements dynamic response of elastoplastic subjected to impulsive loadings. *Communications in Numerical Methods in Engineering* , v. II, p. 1-10, 1995.
- Iturrioz, I. ; Riera, Jorge Daniel . Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete Plates and Shells. *International Journal Of Nuclear Engineering And Design*, v. 1, p. 1-10, 1998.
- Iturrioz, I. ; Miguel, Leticia F F ; Riera, Jorge Daniel . Dynamic fracture analysis of concrete or rock plates by means of the Discrete Element method. *Latin American Journal of Solids and Structures (Impresso)* , v. 6, p. 229-246, 2009.
- Iturrioz, I. ; G. Lacidogna ; A. Carpinteri . Acoustic emission detection in concrete specimens: Experimental analysis and lattice model simulations. *International Journal of Damage Mechanics* , v. 8, p. 1-44, 2013.
- Iturrioz, I. ; Lacidogna, G. ; Carpinteri, A. . Experimental analysis and truss-like discrete element model simulation of concrete specimens under uniaxial compression. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 110, p. 81-98, 2013.
- Kosteski, Luis ; D´ambra, Ricardo Barrios ; Iturrioz, I. . Determinación de parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos utilizando el Método de los Elementos Discretos compuestos por barras. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* , v. 24, p. 323-343, 2008.
- Kosteski, L., Aplicaciones del Método de Elementos Discretos en Mecánica de Fractura Estática y Dinámica. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Nordeste, Resistencia – Chaco, 2008.
- Kosteski, L. E.; Iturrioz, I.; Batista, R. G., Cisilino, A. P. The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics. *Engineering Computations* , v. 28 (6), p. 765-787, 2011.
- Kosteski, L. E. ; Barrios D Ambra, Ricardo ; Iturrioz, I. . Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. *International Journal of Fracture (Print)* , v.

- 174, p. 139-161, 2012.
- Lené, F y Leguillon, D. Homogenized constitutive law for a partially cohesive composite material. *Int. J. Solids Structures*, v. 18, p. 443-458, 1982.
- Li Victor. C.; WANG, Youjiang.; BACKER, Stanley. A micromechanical model of tension softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *J. Mech Phys. Solids*, 1991; 39[5]:607- 625.
- Lo, C.Y., Nakamura, T. y Kushner, A. S. Dynamic failure analysis along interfaces in composite materials. In A. S. of Mechanical Engineers (Ed.), *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, v. 180, p. 115-224, 1993. American Society of Mechanical engineers.
- Maccaferri.; Empresa do Grupo Industrial Maccaferri. *Maccaferri América Latina*. 2002-2007.
- Miguel L.F.F. Critério constitutivo para o deslizamento com atrito ao longo da falha sísmica. Dissertação doutorado., Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, 2005.
- Miguel, Leticia F F ; Riera, Jorge Daniel ; Iturrioz, I. . Influence of size on the constitutive equations of concrete or rock dowels. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* , v. 1, p. 699, 2008.
- Miguel, Leticia F F ; Iturrioz, I. ; Riera, Jorge Daniel . Size Effects and Mesh Independence in Dynamic Fracture Analysis of Brittle Materials. *Computer Modeling in Engineering & Sciences* , v. 56, p. 1-16, 2010.
- Nayfeh A.H. y Hefzy M.S. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. *AIAA Journal*, 16:779–787, 1978.
- Needleman, A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J Appl Mech*, v. 54, p. 525–531, 1987
- Pavan, Alcione R. Modelagem Matemática de tenacificação de materiais cerâmicos através da adição de microfibras. 2006. 155 f. *Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí* 2006.
- Piaceski, Neiva F. Modelagem matemática do efeito de spalling à tenacificação de materiais compostos reforçados por fibras. 2009. 155 f. *Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí* 2009.
- Rios R.D. y Riera J.D. Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. *Engineering Structures*., 26:1115–1125, 2004.
- Rocha, M.M., Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil. Porto Alegre. *Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul*, 1989.
- Rocha M.M., Riera J.D., y Krutzik N.J. Extension of a model that aptly describes fracture of plain concrete to the impact analysis of reinforced concrete. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A*, 61:1096–1101, 1991.
- Spellmeyer, T., Barrios D'Ambra, R., e Iturrioz, I., Simulación numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos. *ENIEF XII, Córdoba, Argentina (2001). Mecánica Computacional*. Vol 20 pp.506-513, 2001.
- Uberti, B, Rossi Cabral, N, Invaldi M A, Barrios D`ambra, R J, Iturrioz, Ignacio. Short fiber reinforced composites: ANALYSIS USING LATTICE MODEL. *XXXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, 2016
- William, D.; Callister, Jr. Ciência e engenharia de materiais: uma introdução. 5ª ed. LTC. Rio de Janeiro, 2002.