

## PROPIEDADES DE RIGIDEZ SECCIONAL DE UNA VIGA DAÑADA

Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup> y Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada Facultad Regional Bahía Blanca  
Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 445, Bahía Blanca, Argentina,  
[vcortine@frbb.utn.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utn.edu.ar)*

<sup>b</sup>*Dpto. de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina,  
[pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)*

<sup>c</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras clave:** vigas dañadas, rigidez seccional, viga Timoshenko-Vlasov, fisura de fatiga.

**Resumen.** Se desarrolla una metodología para la determinación de las propiedades seccionales de vigas tipo Timoshenko-Vlasov con secciones generales y presentando un patrón de daño arbitrario. Se basa en la formulación de un problema estático particular de una estructura dañada mediante un modelo tridimensional que se resuelve por el método de elementos finitos. Luego, se compatibiliza la cinemática con la de una viga tipo Timoshenko-Vlasov y se determinan a partir de cálculos estáticos las propiedades seccionales equivalentes de la viga dañada. Una vez obtenidas, el modelo unidimensional resultante puede emplearse ventajosamente para el estudio dinámico y su aplicación en la identificación de daños.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las estructuras ingenieriles pueden ser sufrir daño localizado en condiciones operativas debido a situaciones imprevistas tales como sobrecargas accidentales o defectos del material. Dependiendo de la tipología estructural, el material y las condiciones de carga, pueden tener lugar diferentes formas de daño (fluencia localizada o fallas de fatiga en estructuras metálicas, rotura de fibras, falla de la matriz o delaminación en materiales compuestos, etc.). En muchas situaciones, tales defectos localizados constituyen el inicio de procesos mecánicos que, de no ser detectados y reparados a tiempo, pueden conducir a bruscas roturas estructurales globales con las consecuentes pérdidas económicas y eventualmente amenaza a la vida humana.

Por tal motivo, resulta de gran importancia la detección temprana de daños estructurales para su reparación o para prevención de dificultades mayores. De esta manera, se han desarrollado varios métodos localizados para el monitoreo de la salud estructural de diversos sistemas (puentes, ejes rotantes, álabes de turbina, etc.). Entre estos pueden mencionarse la simple inspección visual, el uso de tintas penetrantes, la aplicación de técnicas de ultrasonido, etc.

Sin embargo, la aplicación de las mencionadas metodologías de inspección local puede ser difícil en varias situaciones debido a la inaccesibilidad de algunas porciones de la estructura o la imposibilidad de detener una estructura en condiciones de operación. Además, la auscultación localizada suele ser muy demandante en tiempo. Por los motivos aludidos, ha sido de gran interés el desarrollo de métodos de detección de carácter más global, es decir, que permitan identificar el daño sin necesidad de efectuar mediciones en su misma localización, la cual es generalmente desconocida. En particular, se ha generado un gran interés en métodos basados en la respuesta dinámica ([Dimarogonas, 1996](#)). Ello es así, puesto que los daños estructurales afectan la rigidez y, en consecuencia, la respuesta dinámica. Luego, es posible correlacionar variaciones en respuesta con la aparición de ciertos tipos de defectos.

Varias de tales técnicas hacen uso de un modelo teórico adecuado de la estructura dañada, de manera tal de poder comparar los resultados teóricos (previamente calibrados) de indicadores dinámicos con valores determinados por medición directa. Entonces, la magnitud y ubicación del daño corresponden a aquellas que minimizan la diferencia entre los valores calculados y medidos.

Este tipo de metodologías ha tenido éxito en estructuras esbeltas, en las cuales un daño localizado puede generar cambios apreciables en la respuesta dinámica. Tales estructuras pueden describirse adecuadamente mediante modelos tipo viga (unidimensionales) con diferente grado de refinamiento. La conveniencia de tales modelos respecto a formulaciones tridimensionales es de mucha importancia en este contexto, puesto que la tarea de identificación de daños consiste en un método inverso que involucra el cálculo de la dinámica del sistema una gran cantidad de veces con el consecuente costo computacional.

Muchos estudios sobre vibraciones transversales de vigas dañadas se basaron en la teoría de Bernoulli-Euler ([Narkis, 1994](#); [Shen y Pierre, 1990](#); [Aydin, 2008](#); [Rezaei et al., 2016](#)). En el caso de fisuras por fatiga, el daño se describió como una reducción localizada de la rigidez flexional y también como un resorte de giro interpuesto en la estructura ([Rosales et al., 2009](#)). En este último caso, la rigidez del resorte equivalente se ha determinado a partir de conceptos de la mecánica de fractura ([Binici, 2005](#)).

En casos de vigas poco esbeltas, el modelo de Bernoulli-Euler pierde precisión por lo cual se ha utilizado la teoría de Timoshenko que considera efectos de corte e inercia rotatoria ([Gomes y Flores de Almeida, 2014](#)).

También se han desarrollado modelos refinados de vigas con fisuras de fatiga

reconociendo que el efecto de flexibilidad de éstas no está concentrado sino que se distribuye en una pequeña (pero no despreciable) zona de influencia por lo que se han propuesto modelos continuos de fisuras por fatiga (Chondros et al. 1998; Carneiro e Inman, 2002; Heydari et al., 2014). Para el caso de estructuras esbeltas de hormigón armado se han propuesto teorías que consideran el carácter difuso de la fisuración (Hammed y Frostig, 2004; Dominguez y Cortínez, 2015; Xu y Castel, 2016). Los casos mencionados en general se dirigen al análisis de las vibraciones flexionales. Sin embargo, existen situaciones, como la de ejes rotantes, donde la dinámica acopla movimientos flexionales y torsionales, lo que requiere la utilización de modelos más complejos para la descripción dinámica de la viga y también para la falla. Así, por ejemplo en el caso de ejes rotantes dañados por fatiga se han desarrollado modelos de flexibilidad de fisuras basados en la mecánica de fracturas (Darpe et al., 2004). Otro aspecto de gran interés en la naturaleza de fallas por fatiga es que debido a su delgadez puede abrirse y cerrarse (respirar) durante el movimiento vibratorio (Kisa y Brandon, 2000).

Recientemente se ha estudiado la dinámica de vigas dañadas de pared delgada, que presenta un comportamiento más complejo en el que se acoplan flexión, torsión, alabeo torsional y extensión. Para tales estructuras se ha considerado de manera simplificada daño difuso (Dominguez y Cortínez, 2015) y también fisuras por fatiga (Cortínez y Dominguez, 2015, Dotti et al., 2016; Cortínez y Dotti, 2010; Dei y Talukdar, 2016). No obstante, las investigaciones sobre tales aspectos son escasas a pesar de la gran importancia de esta tipología estructural.

La metodología propuesta por Cortínez y Dotti (2013) y Dotti et al., 2016 es adecuada para representar la flexibilidad asociada con fisuras pequeñas de fatiga aunque no están adecuadamente comprobadas para fisuras de gran desarrollo. Luego, es de interés el desarrollo de un enfoque más robusto

En tal sentido, en este trabajo se desarrolla una metodología para la determinación de las propiedades seccionales de vigas no homogéneas tipo Timoshenko-Vlasov generalizada (Cortínez y Piovan, 2002; Cortínez et al. 2016) con secciones generales y presentando un patrón de daño arbitrario. Este modelo de viga considera efectos acoplados de extensión, flexión, torsión, alabeo torsional y sus efectos de corte e inercia asociados.

Se basa en la formulación de un problema estático particular (estructura en voladizo) de una estructura dañada mediante un modelo tridimensional que se resuelve por el método de elementos finitos. Luego, se compatibiliza la cinemática con la de una viga tipo Timoshenko-Vlasov y se determinan a partir de cálculos estáticos las propiedades seccionales equivalentes de la viga dañada. Se proponen dos métodos para realizar tal compatibilización: la equivalencia energética y la determinación directa de los coeficientes de flexibilidad.

Una vez obtenidos los coeficientes de rigidez seccional de la viga dañada equivalente, es posible utilizar ventajosamente el modelo unidimensional resultante para analizar la respuesta dinámica para cualquier tipo de cargas externas, condiciones de borde o ubicación del daño.

El enfoque tiene similitud al usado en ingeniería estructural de álabes de aerogeneradores, contexto en el cual se han usado modelos tridimensionales para situaciones simples de carga a fin de identificar propiedades seccionales de vigas equivalentes para ser aplicados en estudios aeroelásticos no lineales complejos (Wang et al. 2014; Hill y Weaver, 2001). Sin embargo, el enfoque aquí propuesto es más general que éstos ya que también se tiene en cuenta el alabeo torsional y sus efectos de corte asociados.

Los autores consideran que la metodología presentada puede utilizarse ventajosamente asociada con técnicas de identificación de daño en diversas situaciones de interés práctico.

En la sección 2 se describe el modelo estructural de viga de acuerdo a la teoría generalizada de Timoshenko-Vlasov, en la sección 3 se presenta el método para la

determinación de la rigidez estructural de la porción dañada de la viga, en la sección 4 se presentan algunos ejemplos numéricos a fin de ilustrar sobre las posibilidades del método propuesto y en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

## 2 MODELO ESTRUCTURAL

Se considera la dinámica del elemento estructural mostrado en la [Figura 1](#). Se trata de una viga de sección transversal no homogénea de forma arbitraria (pudiendo comprender secciones de pared gruesa o delgada) que posee una zona dañada de carácter general. En particular podría tratarse de una fisura de fatiga como se muestra en la [Figura 1b](#).

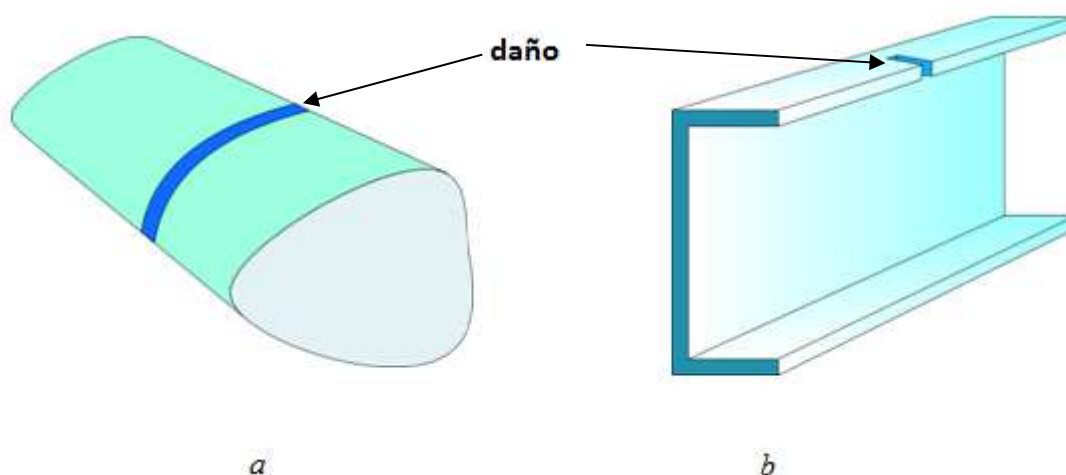


Figura 1. Elemento estructural dañado.

Para el desarrollo teórico se adopta un sistema doble de referencia ([Figura 2](#)):  $x$  corresponde al eje longitudinal,  $y, z$  son ejes transversales con origen en el centro elástico de la sección (sana),  $\tilde{y}, \tilde{z}$  son ejes transversales con origen en el centro de corte elástico cuyas coordenadas respecto al primer sistema vienen dadas por  $y_s$  y  $z_s$  ([Cortínez et al., 2016](#)). En este trabajo centro elástico y centro de corte elástico corresponden a la generalización de los conceptos de centroide y centro de corte para secciones de varios materiales.

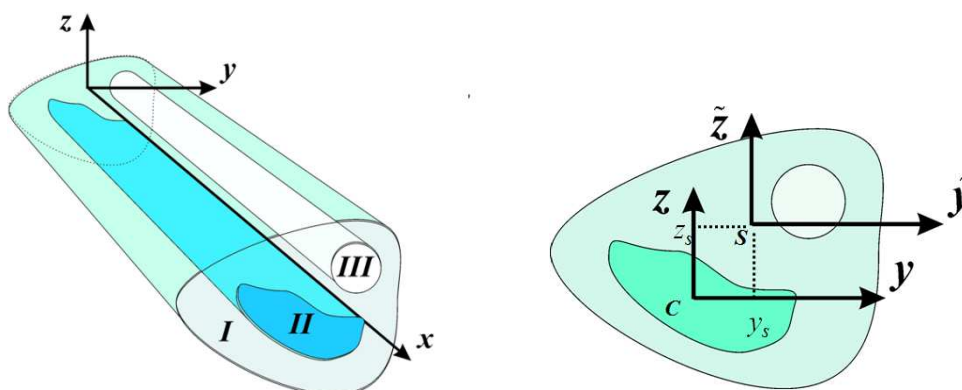


Figura 2. Elemento estructural analizado. Sistemas de coordenadas.

## 2.1 Ecuaciones de movimiento

El modelo teórico está basado en la siguiente expresión del campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned} u &\cong u_0(x,t) - \theta_z(x,t)y - \theta_y(x,t)z + \theta(x,t)\omega(y,z) \\ v &\cong v_s(x,t) - \tilde{z}\phi(x,t) \\ w &\cong w_s(x,t) + \tilde{y}\phi(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $u_0$  es el desplazamiento axial del centro elástico  $C$ ,  $v_s$  y  $w_s$  son los desplazamientos transversales del centro de corte elástico  $S$ , y  $\phi$  es la rotación torsional. Por otra parte,  $\omega$  es la función de alabeo torsional de Saint Venant para vigas no homogéneas (Cortínez et al., 2016).  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  y  $\theta$  son rotaciones flexionales con respecto a  $y$  y a  $z$  y una función que mide la intensidad de alabeo, respectivamente.

Obteniendo las deformaciones específicas a partir de la expresión anterior y las relaciones cinemáticas de elasticidad y sustituyendo éstas en el principio de trabajos virtuales se determinan, luego de aplicar cálculo variacional, las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N}{\partial x} + \overline{\rho A \ddot{u}_0} - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_y} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_z} + \ddot{\theta} \overline{\rho S_\omega} &= q_x \\ \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q_y - \ddot{u}_0 \overline{\rho S_z} + \overline{\rho I_z \ddot{\theta}_z} + \overline{\rho I_{yz} \ddot{\theta}_y} - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega y}} &= -m_z \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z - \ddot{u}_0 \overline{\rho S_y} + \overline{\rho I_y \ddot{\theta}_y} + \overline{\rho I_{yz} \ddot{\theta}_z} - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega z}} &= -m_y \\ -\frac{\partial Q_y}{\partial x} + (\ddot{v}_s \overline{\rho A} - \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\tilde{y}}}) &= q_y \\ -\frac{\partial Q_z}{\partial x} + (\ddot{w}_s \overline{\rho A} + \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\tilde{z}}}) &= q_z \\ -\frac{\partial B}{\partial x} - T_w + \ddot{u}_0 \overline{\rho S_\omega} - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_{\omega z}} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_{\omega y}} + \overline{\rho C_w \ddot{\theta}} &= b \\ -\frac{\partial (T_{sv} + T_w)}{\partial x} - \ddot{v}_s \overline{\rho S_{\tilde{y}}} + \ddot{w}_s \overline{\rho S_{\tilde{z}}} + \overline{\rho I_s \ddot{\phi}} &= m_x \end{aligned} \quad (2a)$$

y las correspondientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
N - N_L &= 0 & o & \delta u_0 = 0 \\
-M_z + M_{zL} &= 0 & o & \delta \theta_z = 0 \\
-M_y + M_{yL} &= 0 & o & \delta \theta_y = 0 \\
Q_z - Q_{zL} &= 0 & o & \delta w = 0 \\
Q_y - Q_{yL} &= 0 & o & \delta v = 0 \\
B - B_L &= 0 & o & \delta \theta = 0 \\
T_{sv} + T_w - (T_{svL} + T_{wL}) &= 0 & o & \delta \phi = 0
\end{aligned} \tag{2b}$$

donde  $N_L, M_{yL}, M_{zL}, B_L, Q_{yL}, Q_{zL}, T_{svL}$  y  $T_{wL}$  son esfuerzos seccionales externos aplicados en los extremos de la viga considerada, mientras que se han definido las siguientes expresiones para los esfuerzos seccionales internos, las cargas aplicadas por unidad de longitud y las propiedades inerciales respectivamente:

$$\begin{aligned}
N &= \int_A \sigma_x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA, \\
B &= \int_A \sigma_x \omega dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$T_{sv} = \int_A \left( \tau_{xy} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) \right) dA, \quad T_w = - \int_A \left( \tau_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA$$

$$\begin{aligned}
q_x &= \int_A f_x dA, \quad q_y = \int_A f_y dA, \quad q_z = \int_A f_z dA, \\
m_y &= \int_A f_x z dA, \quad m_z = \int_A f_x y dA, \quad m_x = \int_A (f_y \tilde{z} + f_z \tilde{y}) dA
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho A} &= \int_A \rho dA, \quad \overline{\rho C_w} = \int_A \rho \omega^2 dA, \quad \overline{\rho I_s} = \int_A \rho (\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2) dA, \quad \overline{\rho I_z} = \int_A \rho y^2 dA, \\
\overline{\rho I_y} &= \int_A \rho z^2 dA, \quad \overline{\rho I_{yz}} = \int_A \rho yz dA, \quad \overline{\rho S_y} = \int_A \rho z dA, \quad \overline{\rho S_z} = \int_A \rho y dA, \\
\overline{\rho S_\omega} &= \int_A \rho \omega dA, \quad \overline{\rho S_{\omega y}} = \int_A \rho \omega y dA, \quad \overline{\rho S_{\omega z}} = \int_A \rho \omega z dA, \quad \overline{\rho S_{\tilde{z}}} = \int_A \rho \tilde{y} dA, \quad \overline{\rho S_{\tilde{y}}} = \int_A \rho \tilde{z} dA
\end{aligned} \tag{5}$$

En las expresiones anteriores,  $N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_{sv}$  y  $T_w$  corresponden al esfuerzo normal, momentos flectores con respecto a  $y$  y a  $z$ , bi-momento, esfuerzos de corte en las direcciones  $y, z$ , momento torsor de Saint Venant y momento torsor de alabeo respectivamente. Por otra parte,  $q_x(x,t), q_y(x,t)$  y  $q_z(x,t)$  son fuerzas distribuidas por unidad de longitud,  $m_x(x,t)$  es el momento torsor externo respecto al centro de corte por unidad de longitud, y  $m_y(x,t)$  y  $m_z(x,t)$  momentos por unidad de longitud con respecto a los ejes centroidales elásticos y  $b$  el bi-momento externo por unidad de longitud. Asimismo,  $\overline{\rho A}, \overline{\rho I_y},$

$\overline{\rho I_z}$ ,  $\overline{\rho I_{yz}}$ ,  $\overline{\rho I_s}$ ,  $\overline{\rho C_w}$ ,  $\overline{\rho S_\omega}$ ,  $\overline{\rho S_{\omega y}}$ ,  $\overline{\rho S_{\omega z}}$ ,  $\overline{\rho S_{\tilde{y}}}$  y  $\overline{\rho S_{\tilde{z}}}$  las propiedades inerciales seccionales.

## 2.2 Rigidez seccional de la viga sana

El material considerado verifica la ley de Hooke por lo cual, despreciando las tensiones y las deformaciones transversales, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (6)$$

Obteniendo, en consecuencia, las deformaciones específicas utilizando el campo de desplazamientos (1) y las correspondientes relaciones cinemáticas, sustituyendo en (6) y el resultado en (3) se obtienen las siguientes relaciones constitutivas para las fuerzas seccionales:

$$\begin{aligned} N &= \overline{EA}u_0' \\ M_y &= -\overline{EI}_y\theta_y' - \overline{EI}_{yz}\theta_z' \\ M_z &= -\overline{EI}_{yz}\theta_y' - \overline{EI}_z\theta_z' \\ B &= \overline{EC}_w\theta' \\ Q_y &= \overline{GA}_y(v_s' - \theta_z) \\ Q_z &= \overline{GA}_z(w_s' - \theta_y) \\ T_{sv} &= \overline{GJ}\phi' \\ T_w &= \overline{GD}(\phi' - \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

donde se han definido las siguientes rigideces seccionales:

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \int_A E dA, \quad \overline{GA}_y = \int_A k_y G dA, \quad \overline{GA}_z = \int_A k_z G dA, \quad \overline{EI}_z = \int_A E y^2 dA, \\ \overline{EI}_y &= \int_A E z^2 dA, \quad \overline{EI}_{yz} = \int_A E y z dA, \quad \overline{EC}_w = \int_A E \omega^2 dA, \\ \overline{GD} &= \int_A k_\omega G \left( \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right) dA, \quad \overline{GJ} = \int_A G \left( \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tilde{y} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA \end{aligned} \quad (8)$$

Las rigideces asociadas a los esfuerzos de corte  $\overline{GA}_y$ ,  $\overline{GA}_z$  y al momento torsional  $\overline{GD}$  se obtienen de acuerdo al procedimiento descrito con los valores  $k_y = k_z = k_\omega = 1$ . Sin embargo, es posible determinar expresiones de mayor precisión para las ecuaciones constitutivas (7) si se corrigen tales rigideces contemplando los coeficientes aludidos ( $k_y, k_z, k_\omega$ ) de manera adecuada. La discusión completa así como los enfoques de cálculo adecuados pueden consultarse en la referencia Cortínez et al. (2016). Debe observarse que los dos primeros,  $k_y$  y  $k_z$ , corresponden a los bien conocidos factores de corte de Timoshenko.

La teoría descripta contempla efectos de alabeo torsional, flexibilidad de corte asociada tanto a la flexión como al alabeo torsional y se denomina aquí teoría de Timoshenko-Vlasov.

Utilizando las expresiones cinemáticas (1), la definición de deformaciones específicas, la ley de Hooke (6) y la definición de esfuerzos seccionales (3), se llega a la siguiente expresión para la tensión normal:

$$\sigma_x = N \frac{E}{EA} + M_y \left( E \frac{z \overline{EI}_z - y \overline{EI}_{yz}}{EI_y \overline{EI}_z - \overline{EI}_{yz}^2} \right) + M_z \left( E \frac{-z \overline{EI}_{yz} + y \overline{EI}_y}{EI_y \overline{EI}_z - \overline{EI}_{yz}^2} \right) + B \frac{E\omega}{EC_w} \quad (9)$$

Asimismo, sustituyendo la expresión (9) en la ecuación diferencial de equilibrio de la teoría de elasticidad siguiendo el procedimiento explicado en Cortínez et al. (2016) se obtienen las siguientes expresiones de las tensiones de corte (para ver las expresiones explícitas de las  $\psi_{ij}$  consultar la referencia citada):

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= Q_y \psi_{yy} + Q_z \psi_{zy} + T_w \psi_{wy} + T_{sv} \psi_{svy} \\ \tau_{xz} &= Q_y \psi_{yz} + Q_z \psi_{zz} + T_w \psi_{wz} + T_{sv} \psi_{svz} \end{aligned} \quad (10)$$

### 3 RIGIDEZ ESTRUCTURAL DE LA VIGA DAÑADA

Se tiene en cuenta a continuación la existencia de algún tipo de daño en una pequeña porción de longitud  $l_c$  de la viga. El efecto general del daño en el elemento mencionado corresponde a un aumento de su flexibilidad, por lo tanto, se pretende efectuar la modelización del tramo afectado considerándola como una viga con propiedades seccionales modificadas. Obviamente, el valor de los correspondientes coeficientes de rigidez depende del tipo de daño considerado. Si bien el enfoque no se restringe a una tipología específica de daño, se asume, para fijar ideas, que se trata de una fisura de fatiga perpendicular a la sección transversal, ubicada en la mitad del elemento de longitud  $l_c$  y que se desarrolla desde el borde de la sección (Figura 1b).

Desde el punto de vista de la teoría de vigas el daño puede suponerse, en primera aproximación, como una modificación (reducción) desconocida de la correspondiente sección transversal. Consecuentemente, para el elemento dañado, la correspondiente ecuación constitutiva correspondiente a las fuerzas seccionales puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (11)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T \\ \mathbf{d} &= \{u_0', -\theta_y', -\theta_z', \theta', v_s' - \theta_y, w_s' - \theta_z, \phi' - \theta, \phi'\}^T \end{aligned} \quad (12)$$

Para la viga sana, de acuerdo a (7),  $\mathbf{K}$  se expresa de la siguiente manera:



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{EI}_y & \overline{EI}_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{EI}_{yz} & \overline{EI}_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{EC}_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{GA}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{GA}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{GD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{GJ} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Para el caso de la porción dañada, los elementos de la matriz (simétrica) de rigidez  $\mathbf{K}_c$  son desconocidos. Si para este caso se invierte la expresión (11) se obtiene:

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}\mathbf{F}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{K}_c^{-1} \quad (14)$$

### 3.1 Método 1: Equivalencia Energética

Para la determinación de las propiedades seccionales de la viga dañada se sigue la siguiente idea general: la energía de deformación del elemento dañado debe ser la misma ya sea que se calcule mediante la teoría tridimensional de la elasticidad o usando un modelo de viga (equivalente).

Es posible utilizar la matriz de flexibilidad  $\mathbf{L}$  del elemento de viga dañado para expresar la energía complementaria de deformación de la siguiente manera:

$$E_{cv} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \int_{x_1}^{x_2} F_i F_j L_{ij} dx \quad (15)$$

Se considera a continuación en forma explícita una expresión simplificada de (15) dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{cv} = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} & (N^2 L_{11} + M_y^2 L_{22} + M_z^2 L_{33} + B^2 L_{44} + 2NM_y L_{12} + 2NM_z L_{13} + 2NBL_{14} + \\ & + 2M_y M_z L_{23} + 2M_y BL_{24} + 2M_z BL_{34} + Q_y^2 L_{55} + Q_z^2 L_{66} + T_w^2 L_{77} + T_{sv}^2 L_{88}) dx \end{aligned} \quad (16)$$

La simplificación consiste en la omisión de los términos de acoplamiento con esfuerzos de corte por considerarlos de menor importancia, de acuerdo a diversos estudios (Cortínez y Dotti, 2013, Gomes y Flores de Almeida, 2016).

Por otro lado, desde el punto de vista de la teoría tridimensional de la elasticidad, la correspondiente expresión de la energía complementaria de deformación viene dada por:

$$E_c = \int_{V_d} \left( -\frac{\mu}{2E} (\sigma_{ii})^2 + \frac{1}{4G} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right) dV \quad (17)$$

donde  $\sigma_{ij}$  corresponde al tensor de tensiones,  $\mu$  al coeficiente de Poisson y  $V_d$  a la región dañada.

Para determinar los coeficientes de flexibilidad  $L_{ij}$  se considera en primer lugar, una estructura en voladizo conteniendo un elemento dañado de longitud  $l_c$  en una zona alejada de los extremos (Figura 3). Luego, es necesario igualar las expresiones (16) y (17) correspondientes a la zona dañada para diferentes estados de carga. Sin embargo, considerando el carácter isostático de la estructura descrita es conveniente aplicar separadamente cargas en el extremo libre que generen estados axiales y flexionales puros que permitan la determinación de los coeficientes diagonales de flexibilidad asociados (Figura 4).

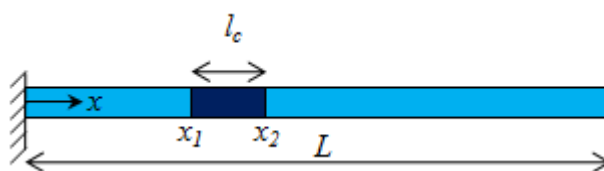


Figura 3: Esquema estructural básico para la determinación de los coeficientes de flexibilidad.

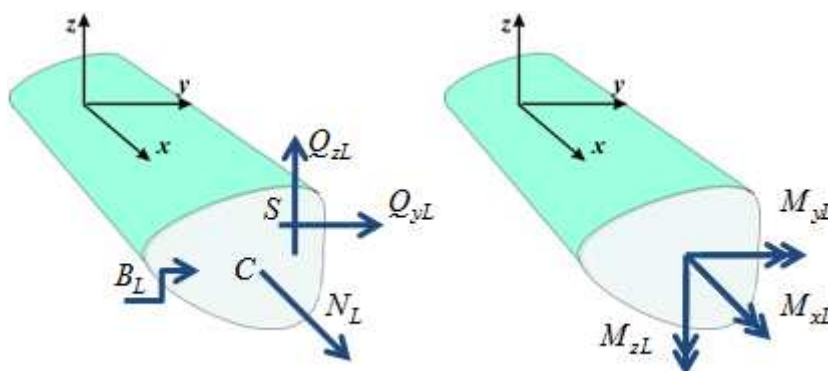


Figura 4: Estados de carga básicos para la determinación de los coeficientes de flexibilidad.

Para la materialización de los estados de cargas mencionados debe aplicarse sobre la sección extrema de la viga considerada un estado de cargas dado por la expresión (9) para los valores adoptados de los correspondientes esfuerzos. Luego, combinando estos estados de carga (tomados de a 2 simultáneamente) se obtienen los elementos fuera de la diagonal. Así quedan determinados  $L_{ij}$  con  $i, j=1$  hasta 3. Posteriormente, se aplican fuerzas de corte en el extremo (en el centro de corte), lo cual genera además momentos flectores fácilmente obtenibles por una ecuación de equilibrio global, lo que da lugar a la obtención de los elementos  $L_{55}$  y  $L_{66}$ .

A partir de la aplicación de dos estados de carga dados por un bi-momento unitario y un momento torsor unitario respectivamente, aplicados en el extremo, es posible obtener las flexibilidades  $L_{44}$ ,  $L_{77}$  y  $L_{88}$  asociadas a la torsión y al alabeo torsional. Sin embargo, la determinación de estas tres últimas magnitudes requiere de una explicación más detallada que se da más adelante.

Finalmente, los coeficientes de flexibilidad asociados a acoplamientos entre el bi-momento con el esfuerzo normal y los momentos flectores se obtienen inmediatamente a partir de los estados de carga previamente considerados y la equivalencia energética.

El procedimiento explicado junto con las correspondientes fuerzas seccionales en la zona dañada y los coeficientes de flexibilidad se muestran en la [Tabla 1](#). Todos los cálculos tridimensionales se realizan mediante el método de Elementos Finitos.

Caso	Estados de carga	Fuerzas aplicadas	Esfuerzos nulos	Coefficientes de flexibilidad
A	1	$N_L = 1$	$N = 1$	$L_{11} = \frac{2E_{c1}}{l_c}$
B	2	$M_{yL} = 1$	$M_y = 1$	$L_{22} = \frac{2E_{c2}}{l_c}$
C	3	$M_{zL} = 1$	$M_z = 1$	$L_{33} = \frac{2E_{c3}}{l_c}$
D	1 + 2	$N_L = 1$ $M_{yL} = 1$	$N = 1$ $M_y = 1$	$L_{12} = \frac{E_{c12}}{l_c} - \frac{L_{11} + L_{22}}{2}$
E	1 + 3	$N_L = 1$ $M_{zL} = 1$	$N = 1$ $M_z = 1$	$L_{13} = \frac{E_{c13}}{l_c} - \frac{L_{11} + L_{33}}{2}$
F	2 + 3	$M_{yL} = 1$ $M_{zL} = 1$	$M_y = 1$ $M_z = 1$	$L_{23} = \frac{E_{c23}}{l_c} - \frac{L_{22} + L_{33}}{2}$
G	4	$Q_{yL} = 1$	$Q_y = 1$ $M_z = -(L-x)$	$L_{55} = \frac{2E_{c55} - L_{33} \int_{x_1}^{x_2} (x-L)^2 dx}{l_c}$
H	5	$Q_{zL} = 1$	$Q_z = 1$ $M_y = -(L-x)$	$L_{66} = \frac{2E_{c66} - L_{22} \int_{x_1}^{x_2} (x-L)^2 dx}{l_c}$
I	6	$B_L = 1$	$B_6, T_{sv6}, T_{w6}$	$L_{44}, L_{77}$ y $L_{88}$ : ver expresiones (19) a (25)
J	7	$M_x = 1$	$B_7, T_{sv7}, T_{w7}$	
K	1 + 6	$N_L = 1$ $B_L = 1$	$N = 1$ $B_6, T_{sv6}, T_{w6}$	ver expresión (26)
L	2 + 6	$M_{yL} = 1$ $B_L = 1$	$M_y = 1$ $B_6, T_{sv6}, T_{w6}$	ver expresión (27)
M	3+6	$M_{zL} = 1$ $B_L = 1$	$M_z = 1$ $B_6, T_{sv6}, T_{w6}$	ver expresión (28)

Tabla 1: Procedimiento para la determinación de los coeficientes de flexibilidad.

La determinación de  $L_{44}$ ,  $L_{77}$  y  $L_{88}$  requiere un tratamiento distinto ya que no es posible determinar, mediante una ecuación de equilibrio global,  $T_{sv}$ ,  $T_w$  y  $B$  a partir del conocimiento de un momento torsor unitario (o un bi-momento unitario) aplicado en el extremo.

El mismo consiste en obtener, a partir de los desplazamientos del modelo tridimensional, los ángulos de torsión  $\phi$ , la variable de alabeo  $\theta$  y su derivada  $\theta'$  en las secciones izquierda

y derecha del elemento dañado. Para ello se aplican las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\int_A (w_{3D}y - v_{3D}z) dA}{I_y + I_z} \\ \theta &= \frac{\int_A u_{3D} \omega dA}{C_w} \\ \theta' &= \frac{\int_A \frac{\partial u_{3D}}{\partial x} \omega dA}{C_w}\end{aligned}\quad (18)$$

donde  $u_{3D}$ ,  $v_{3D}$  y  $w_{3D}$  corresponden a los desplazamientos obtenidos mediante el modelo tridimensional. Debe observarse que tales expresiones surgen de interpretar los desplazamientos tridimensionales con las expresiones (1). Luego, para las secciones izquierda y derecha aludidas del elemento dañado se tiene:

$$\begin{aligned}\phi_I &= \phi(x_1), \quad \phi_D = \phi(x_2) \\ \theta_I &= \theta(x_1), \quad \theta_D = \theta(x_2) \\ \theta'_I &= \theta'(x_1), \quad \theta'_D = \theta'(x_2)\end{aligned}\quad (19)$$

Luego, es posible calcular de manera aproximada los siguientes desplazamientos generalizados torsionales para el elemento dañado:

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{\phi_D - \phi_I}{l_c} \\ \bar{\theta} &= \frac{\theta_D + \theta_I}{2}\end{aligned}\quad x \in (x_1, x_2) \quad (20)$$

A partir de estas expresiones y considerando el carácter desacoplado de  $T_{sv}$  y  $T_w$  en la zona dañada es posible expresar estas últimas como:

$$\begin{aligned}T_{svc} &= \overline{GJ}_c \phi' \\ T_{wc} &= \overline{GD}_c (\phi' - \bar{\theta})\end{aligned}\quad (21)$$

Asimismo, considerando que a la izquierda de  $x_1$  y a la derecha de  $x_2$ , la estructura se comporta como una sin daño, valen las relaciones constitutivas (7). Luego, es posible determinar el bi-momento en las secciones izquierda y derecha como:

$$B_I = \overline{EC}_w \theta'_I \quad B_D = \overline{EC}_w \theta'_D \quad (22)$$

A partir de estas expresiones se puede aproximar el bi-momento en el elemento dañado en la forma:

$$B = B_I + \frac{B_D - B_I}{l_c} (x - x_I) \quad x \in (x_1, x_2) \quad (23)$$

Luego, es posible escribir la equivalencia energética para los estados de carga 6 y 7 como:

$$\overline{GJ}_c \phi_6'^2 + \overline{GD}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6' - \theta_6)^2 dx + L_{44} \int_{x_1}^{x_2} B_6^2 dx = \frac{2E_{c6}}{l_c} \quad (24)$$

$$\overline{GJ}_c \phi_7'^2 + \overline{GD}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_7' - \theta_7)^2 dx + L_{44} \int_{x_1}^{x_2} B_7^2 dx = \frac{2E_{c7}}{l_c}$$

Por otra parte, para el estado de carga 7,  $T_{wc}$  y  $T_{svc}$  deben cumplir la ecuación de equilibrio global torsional que, de acuerdo a (21), puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\overline{GJ}_c \phi' + \overline{GD}_c (\phi' - \bar{\theta}) = M_x = 1 \quad (25)$$

De estas últimas 3 ecuaciones es posible obtener  $L_{44}$ ,  $\overline{GD}_c$  ( $1/L_{77}$ ) y  $\overline{GJ}_c$  ( $1/L_{88}$ ).

Luego, es posible determinar los términos de acoplamiento entre el esfuerzo normal y los momentos flectores respecto al bi-momento a partir de la ecuación de equivalencia energética, es decir,

$$L_{14} = \frac{2E_{c16} - \left( l_c L_{11} + L_{44} \int_{x_1}^{x_2} B_6^2 dx + \overline{GD}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6' - \theta_6)^2 dx + \overline{GJ}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6')^2 dx \right)}{2 \int_{x_1}^{x_2} B_6 dx} \quad (26)$$

$$L_{24} = \frac{2E_{c26} - \left( l_c L_{22} + L_{44} \int_{x_1}^{x_2} B_6^2 dx + \overline{GD}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6' - \theta_6)^2 dx + \overline{GJ}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6')^2 dx \right)}{2 \int_{x_1}^{x_2} B_6 dx} \quad (27)$$

$$L_{34} = \frac{2E_{c36} - \left( l_c L_{33} + L_{44} \int_{x_1}^{x_2} B_6^2 dx + \overline{GD}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6' - \theta_6)^2 dx + \overline{GJ}_c \int_{x_1}^{x_2} (\phi_6')^2 dx \right)}{2 \int_{x_1}^{x_2} B_6 dx} \quad (28)$$

De esta manera, la matriz de flexibilidad se ha obtenido de manera completa. Luego, invirtiendo ésta, se llega a la matriz de rigidez del elemento dañado. Debe observarse que para esta estimación deben ser resueltos siete problemas estáticos tridimensionales.

### 3.2 Método 2: Determinación directa de la matriz de flexibilidad

Una segunda metodología es la determinación directa de los elementos de la matriz de flexibilidad  $\mathbf{L}$  utilizando la expresión (14) de manera similar al método de Hill y Weaver (2001) aunque extendiendo la metodología para contemplar bi-momento y momento torsor de

alabeo. Para las flexibilidades asociadas a los momentos torsores de Saint Venant, de alabeo y el bi-momento, se sigue un procedimiento similar al descrito en las expresiones (18) a (25).

#### 4 EJEMPLOS

A efectos de ilustrar la aplicabilidad del método propuesto se considera el ejemplo simple mostrado en la Figura 5, consistente en una viga plana de longitud  $L=1\text{m}$ , altura  $h=0,1\text{m}$  y una fisura de fatiga de profundidad  $h_c=0,05\text{m}$  y ancho  $e_c=L/200$ , ubicada en la coordenada  $x_c$ .

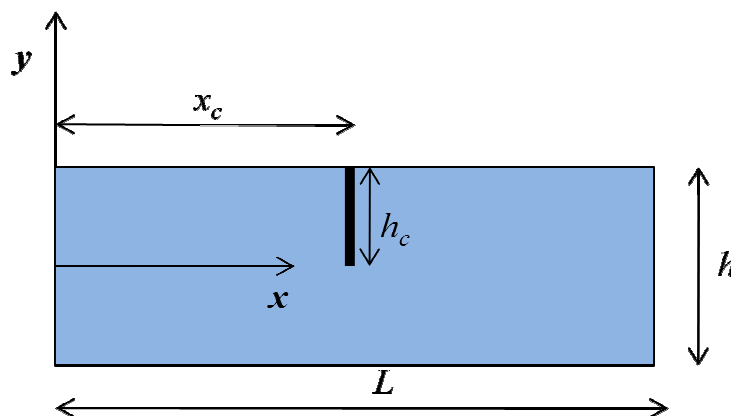


Figura 5: Viga fisurada por fatiga.

Si se considera carga en el plano, la estructura puede modelarse de acuerdo a la teoría de elasticidad plana (estado plano de tensión) y alternativamente como una viga Timoshenko (caso particular del modelo propuesto). Debe observarse que en tal caso los esfuerzos involucrados no nulos son  $N$ ,  $M_y$  y  $Q_z$ . Los resultados numéricos o unidimensionales se obtienen mediante el método de los elementos finitos con el software FlexPDE® (2015).

En primer lugar, se comprueba que el método brinde valores adecuados para la estructura no dañada. Una comparación entre los valores de rigidez seccional obtenidos mediante la presente metodología y el enfoque clásico de Timoshenko adoptando un factor de corte  $k_z=0.833$  se muestra a continuación.

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} 2,10E10 & 0 & 0 \\ 0 & 1,75E07 & 0 \\ 0 & 0 & 6,73E09 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 2,10E10 & 0 & 0 \\ 0 & 1,75E07 & 0 \\ 0 & 0 & 6,65E09 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{K}_T$  y  $\mathbf{K}_p$  corresponden a las matrices de rigidez seccionales de la teoría de Timoshenko y la determinada mediante el presente enfoque, respectivamente. Puede apreciarse que los valores son prácticamente coincidentes. Además, debe notarse que el factor de corte queda automáticamente obtenido con el presente procedimiento.

Para obtener el elemento de viga dañado equivalente es necesario adoptar su longitud  $l_c$  de manera tal de asegurar que fuera del mismo el comportamiento mecánico no se vea mayormente afectado por el daño, es decir su comportamiento estructural puede determinarse con la teoría de vigas sanas. Para el caso de fisuras de fatiga de desarrollo aproximadamente perpendicular al eje de la viga se tiene como límite de longitud la altura de la viga  $h$ . Luego, se espera que el orden de magnitud de la influencia longitudinal de tal tipo de daño sea justamente la altura de la viga. En este trabajo, éste es el valor que se asigna explícitamente al elemento dañado. Para comprobar que, fuera de los límites de esta longitud, la fisura no tiene

efecto se han efectuado comparaciones de las distribuciones de tensiones y desplazamientos dentro y fuera de tal elemento. Éstas, han demostrado que fuera de esta longitud se recupera el comportamiento normal de una viga sana. A manera de ejemplo, en la Figura 6 se muestran las distribuciones de tensiones normales a lo largo de la altura en una ubicación interna al elemento (en azul) y en otra externa (en rojo).

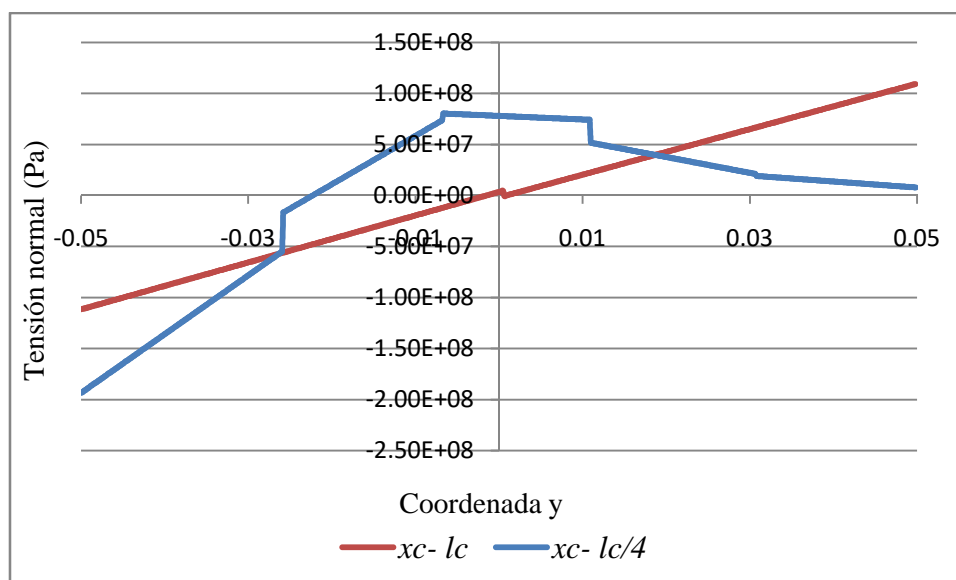


Figura 6: Distribución de tensiones normales fuera y dentro del elemento dañado.

A continuación, se realiza la identificación de la rigidez seccional de la viga dañada de acuerdo al procedimiento propuesto (método 1). Los valores obtenidos son los siguientes:

$$K_c = \begin{bmatrix} 1,21E10 & -2,52E8 & 0 \\ -2,52E8 & 9,06E6 & 0 \\ 0 & 0 & 5,43E9 \end{bmatrix}$$

Con estas rigideces para el elemento dañado se calculan las frecuencias naturales de vibración de vigas con una fisura de profundidad  $h/2$  ubicada en el centro de la longitud para tres condiciones de vinculación diferentes. Los resultados se comparan con aquellos determinados mediante un modelo bidimensional. Los valores numéricos se muestran en la Tabla 2. También se consignan en la misma los valores determinados mediante un modelo de viga dañada cuyas propiedades seccionales han sido obtenidas mediante el Método 2 considerando también los términos fuera de la diagonal. El error medio es ligeramente mayor al 1%.

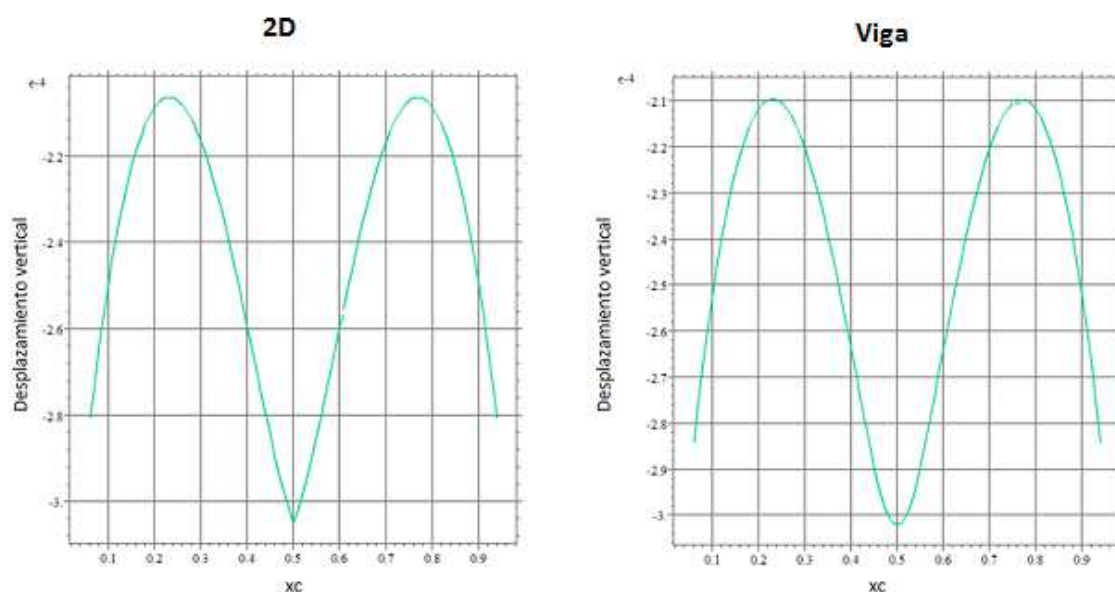
Empotrada-Libre	2D	Método 1	Método 2
$f_1$	76,00	76,24	75,87
$f_2$	388,28	398,23	393,90
$f_3$	1175,37	1178,44	1175,92
$f_4$	1292,98	1330,17	1320,61
Empotrada-Articulada			
$f_1$	297,98	300,25	297,99
$f_2$	1031,00	1048,67	1042,37
$f_3$	1178,38	1183,41	1178,80
$f_4$	1859,00	1948,46	1940,51
Empotrada-Empotrada			
$f_1$	437,46	439,93	438,19
$f_2$	1266,46	1274,71	1266,46
$f_3$	2019,34	2128,78	2120,31
$f_4$	2572,10	2553,25	2552,71

Tabla 2: Frecuencias naturales de vigas dañadas (Hz).

Se analizan ahora, las vibraciones forzadas de vigas fisuradas de longitud  $L=1\text{m}$ , altura  $h=0,1\text{m}$  para las condiciones de borde Empotrada-Empotrada y Empotrada-Libre sujetas a una carga distribuida  $q_z = 1e6 \cos(\omega t)$ , donde  $\omega$  es mitad de la correspondiente frecuencia fundamental, considerando diferentes posiciones de fisura de profundidad  $h_c=0,05\text{m}$ .

En el modelo unidimensional, la influencia del elemento de la fisura se considera mediante el segmento de viga equivalente previamente obtenido.

En la Figura 7 se muestran los desplazamientos verticales en la mitad de la estructura empotrada-empotrada para diferentes posiciones de la fisura ( $x_c$ ) determinados mediante el modelo de viga dañada y el modelo bidimensional.

Figura 7: Desplazamientos verticales en  $L/2$  para diferentes posiciones  $x_c$  de la fisura. Viga E-E.



En la **Figura 8** se muestran resultados similares para el desplazamiento vertical en el extremo libre de la estructura en voladizo.

Como es posible observar, en ambas figuras los resultados determinados mediante el modelo unidimensional son prácticamente coincidentes.

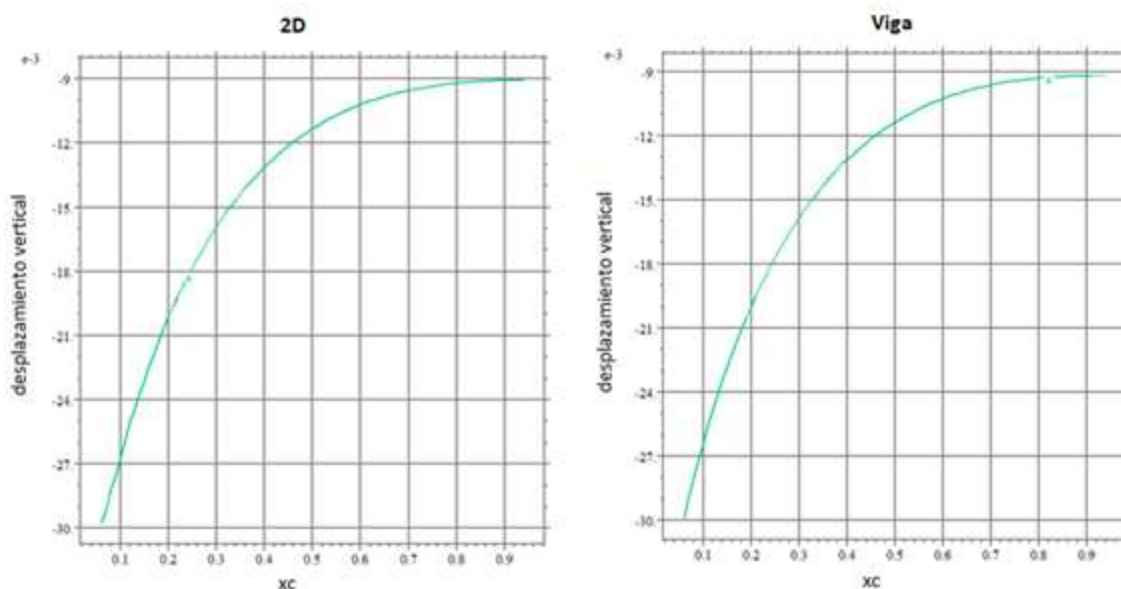


Figura 8: Desplazamientos verticales en el extremo libre de la viga en voladizo para diferentes posiciones  $x_c$  de la fisura.

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo computacional para la determinación de las propiedades de rigidez seccional de una viga dañada modelada mediante la teoría de Timoshenko-Vlasov generalizada. El modelo es aplicable a cualquier tipo de daño, en particular se lo ha ejemplificado como una figura de fatiga. El enfoque se basa en la determinación de problemas estáticos tridimensionales para algunos casos simples y su compatibilización en el elemento afectado a la teoría de vigas mencionada. Para su utilización en la identificación de daño el cálculo de las propiedades de rigidez de la sección dañada debe ser realizado para varios de los parámetros asociados. En particular, en el caso de la fisura considerada, los cálculos deben desarrollarse para distintas profundidades  $h_c$ , lo que permite posteriormente, utilizando fórmulas de interpolación, conocer las rigideces en función de la profundidad de la fisura. Una vez realizados tales cálculos, es posible utilizar el modelo de viga dañada establecido para estudiar la dinámica de la estructura con una ubicación y una profundidad arbitrarias.

Debe observarse que el método requiere solamente el cálculo de siete problemas tridimensionales estáticos para cada elección de parámetros de daño, independientemente de su posición. Éste es un procedimiento de bajo costo computacional. No obstante, se podría realizar de una manera más eficiente aún, efectuando los cálculos tridimensionales solamente para el elemento dañado, lo que podría ser de utilidad si la metodología de caracterización seccional se desea formular conjuntamente con la identificación de daño en el problema inverso.

Se ha ilustrado la aplicabilidad de esta metodología en un problema simple que puede modelarse mediante la teoría de elasticidad plana. Se está llevando a cabo la investigación considerando casos más complejos y diferentes tipos de daño.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es parte del proyecto “Mecánica estructural no lineal: diseño óptimo e identificación de fallas estructurales” (SeCyT, Universidad Tecnológica Nacional) y del proyecto “Problemas de optimización en Ingeniería Civil” (Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur). Los autores agradecen a la ingeniera Laura González de Paz la colaboración en los cálculos preliminares.

## REFERENCIAS

- Aydin, K. Vibratory characteristics of Euler-Bernoulli beams with an arbitrary number of cracks subjected to axial load. *Journal of Vibration and Control* 14(4), 485-510, 2008.
- Binici, B. Vibrations of a beam with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration* 287, 277-295, 2005.
- Carneiro, S.H. e Inman, D. J. Continuous model for the transverse vibration of cracked Timoshenko beams. *Journal of Vibration and Acoustics*. 124, 310-320, 2002.
- Chondros, T.G., Dimarogonas A. D. y Yao, J. A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration* 215, 17-34, 1998
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. Identification of fatigue cracks in thin-walled beams subjected to initial loads by means of the non-linear dynamic analysis. *Proceedings XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, PUC, Río de Janeiro, 2015.
- Cortínez, V.H., Dominguez, P.N. y Bender, N.G. Una generalización del modelo Timoshenko-Vlasov para el análisis dinámico de vigas no homogéneas. *Mecánica Computacional* 35, 2016.
- Cortínez, V.H. y Dotti, F.E. Un modelo numérico para la dinámica de vigas de pared delgada fracturadas por fatiga. Aplicación a la identificación de daños. *Mecánica Computacional* 29, 431-448, 2010
- Cortínez, V.H. y Dotti, F.E. Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled open beams. *Engineering Fracture Mechanics* 110, 249–257, 2013.
- Cortínez, V.H. y Piovan, M.T. Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701–723, 2002.
- Darpe, A. K.; Gupta, K. y Chawla, A. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor. *Journal of Sound and Vibration* 269, 33–60, 2004.
- Dey, P. y Talukdar, S. Modal characteristics of cracked thin walled unsymmetrical cross-sectional steel beams curved in plan. *Thin-Walled Structures* 108, 75-92, 2016.
- Dimarogonas, A.D. Vibration of cracked structures- a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55 (5), 831-857, 1996.
- Dominguez, P.N. y Cortínez, V.H. Vibration-based damage identification in thin-walled beams with diffused cracking. *Proceedings XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, PUC, Río de Janeiro, 2015.
- Dotti, F.E.; Cortínez, V.H. y Reguera, F. Non-linear dynamic response to simple harmonic excitation of a thin-walled beams with a breathing crack. *Applied Mathematical Modelling* 40, 451-467, 2016.
- FlexPDE PDE Solutions Inc. [www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com), 2015.
- Gomes, H.M. y Flores de Almeida, F.J. An analytical dynamic model for single-cracked beams including bending, axial stiffness, rotational inertia, shear deformation and coupling effects. *Applied Mathematical Modelling* 38, 938-948, 2014.
- Hammed, E. y Frostig, Y. Free vibrations of cracked prestressed concrete beams. *Engineering Structures* 26, 1611-1621, 2004.

- Hill, G.F. y Weaver, P.M. Analysis of arbitrary beam sections with non-homogeneous anisotropic material properties. *International Committee of Composite materials ICCM 13*, 2001.
- Heydari, M.; Ebrahimi, A. y Behzad, M. Forced vibration analysis of a Timoshenko cracked beam using a continuous model for the crack. *Engineering Science and Technology, an International Journal* 17, 194-204, 2014.
- Kisa, M. y Brandon, J.A. The effects of closure of cracks on the dynamics of a cracked cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration* 238 (1), 1-18, 2000.
- Narkis, Y., Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *Journal of Sound and Vibration* 172 (4), 549-558, 1994.
- Rezaei, M. M.; Behzad, M.; Moradi, H. y Haddadpour, H. Modal-based damage identification for the nonlinear model of modern wind turbine blade. *Renewable Energy* 94, 391-4089, 2016.
- Rosales, M.B.; Filipich, C.P.; Buezas, F.S. Crack detection in beam-like structures. *Engineering Structures* 31, 2257-2264, 2009.
- Shen, C. y Pierre, C. Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks. *Journal of Sound and Vibration* 138, 115-134, 1990.
- Wang, L.; Liu, X.; Guo, L.; Renevier, N. y Stables, M. A mathematical model for calculating cross-sectional properties of modern wind turbine composite blades. *Renewable Energy* 64, 52-60, 2014.
- Xu, T. y Castel, A. Modeling the dynamic stiffness of cracked reinforced concrete beams under low-amplitude vibration loads. *Journal of Sound and Vibration* 368, 135-147, 2016.