

## MODELIZACION DE PROBLEMAS ELASTICOS DE LAMINAS DELGADAS USANDO ELEMENTOS SIN GRADOS DE LIBERTAD ROTACIONALES

**Fernando G. Flores**

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,  
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, [fflores@efn.uncor.edu](mailto:fflores@efn.uncor.edu), <http://www.efn.unc.edu>*

### **Palabras clave:**

Láminas delgadas, membranas, sin rotaciones, arrugas, estabilidad

**Resumen.** En este trabajo se muestran distintas modelizaciones de problemas de láminas delgadas y membranas utilizando elementos de láminas sin grados de libertad de rotación. Estos elementos son “no conformes” y las curvaturas se determinan utilizando una parcela de elementos que incluye al elemento y a los vecinos inmediatos. Dos de las ventajas principales de estos elementos sobre los elementos de lámina que incluyen a las rotaciones como grados de libertad son: a) el número total de grados de libertad se reduce sensiblemente (típicamente a casi la mitad) con el consiguiente ahorro en espacio de almacenamiento y tiempo de procesamiento. b) no es necesario utilizar técnicas especiales para el tratamiento del corte transversal para láminas muy delgadas. Las aplicaciones que aquí se presentan incluyen principalmente problemas de cuasi membranas con una bajísima relación entre el espesor y la dimensión característica de la lámina. Los modelos constitutivos incluyen comportamiento isótropo y ortótropo en pequeñas deformaciones. Las láminas funcionan principalmente en régimen membranar y uno de los objetivos es precisamente mostrar que el excelente comportamiento membranar de uno de los elementos utilizadas (EBST) permite realizar modelos con un número relativamente bajo de grados de libertad que captan las características principales del comportamiento. Por otro lado debido a la baja rigidez flexional, muchas veces resulta necesitar técnicas especiales para resolver estos problemas (por ejemplo integración implícita de las ecuaciones de movimiento), donde los grados de libertad rotacional presentan problemas o condicionan los esquemas de solución

## 1. INTRODUCCIÓN

El uso de membranas construidas con películas delgadas se observa como importante posibilidad para grandes estructuras a ser utilizadas en la exploración espacial. Un aspecto crucial es minimizar las inevitables arrugas que producen una importante pérdida en su eficiencia. Por otro lado, existen enormes dificultades para realizar ensayos a escala natural sobre este tipo de estructuras debido a la gravedad y sólo se han realizado un número limitado de ensayos sobre modelos a escala.

La simulación computacional de este tipo de estructuras está generalmente limitada a modelos membranales, que permiten determinar la zona donde aparecen las arrugas, pero no el número de arrugas, la extensión y la altura de las mismas. Un análisis detallado requiere un modelo que incluya la flexión, lo cual implica un costo computacional significativamente mayor debido a que:

- Existe un mayor número de grados de libertad (GdL) por nudo, dado que el modelo pasa de ser bi-dimensional (2D) a tridimensional (3D), más la inclusión de GdL rotacionales.
- Se requiere una discretización más fina, de tal forma que el modelo pueda considerar arrugas con bajas longitudes de onda.
- El análisis no lineal es mucho más complejo, requiere técnicas refinadas y/o adaptadas para el seguimiento de trayectorias fuertemente no lineales que son altamente inestables.

En este trabajo se intenta disminuir estas dificultades usando los elementos sin grados de libertad de rotación EBST (acrónimo de su denominación en inglés *Enhanced Basic Shell Triangle*) (Flores y Oñate (2005)) y BBST (acrónimo de su denominación en inglés *Branching Basic Shell Triangle*) (Flores y Oñate (2006)) implementados en el código STAMPACK (2006). Esto implica los siguientes aspectos:

- Los elementos no tienen GdL rotacionales, en consecuencia se ahorran casi la mitad de los GdL si se compara con un elemento de lámina estándar
- La formulación utilizada está basada en la teoría de láminas delgadas. Por ello está libre de los problemas potenciales que pueden aparecer debido al tratamiento del corte transversal, como puede ocurrir con elementos basados en la teoría de láminas de Reissner-Mindlin.
- Desde el punto de vista de la discretización, el elemento triangular es más eficiente que el elemento cuadrilátero. Esto permite utilizar un refinamiento racional en las zonas donde potencialmente se produce la mayor densidad de arrugas.
- El comportamiento membranar de los elementos EBST y BBST es similar al triángulo de deformación lineal, que es bastante mejor que cualquier cuadrilátero de cuatro nudos.
- La aproximación pseudo-estática utilizada no es sensible a las inestabilidades y permite obtener la configuración deformada final (aunque no sea única), incluso en presencia de fuertes no linealidades como el auto-contacto

Una segunda aplicación de especial interés en la cual también son de relevancia los aspectos mencionados es el modelado de estructuras de aeronaves. En este tipo de estructuras los distintos elementos estructurales (rigidizadores y recubrimiento) habitualmente se simulan utilizando exclusivamente elementos de láminas. Una característica esencial a considerar es que

una aproximación lineal conduce a resultados erróneos pues buena parte de la estructura (principalmente la piel) funciona en régimen pos-crítico. Esto requiere un especial cuidado no sólo en el uso de un modelo no lineal costoso, sino también en una discretización adecuada para captar los aspectos principales del fenómeno.

En la sección siguiente se presenta un resumen del elemento utilizado en las simulaciones. En las Secciones 3 y 4 se estudia el comportamiento de una membrana sometida a deformación de corte incluyendo materiales isótropos y ortótropos. En la Sección 5 se estudia el caso de una película cuadrada sometida a cargas en sus esquinas. En la Sección 6 se muestra la utilización del elemento en la simulación del comportamiento de un ala. Finalmente se agrupan algunas conclusiones

## 2. ELEMENTO DE LÁMINA UTILIZADO

El elemento finito utilizado es un triángulo de tres nudos cuya configuración está descrita exclusivamente por la posición de la superficie media de sus nudos. No hay referencia alguna a los sistemas locales y no se incluyen derivadas de los desplazamientos como grados de libertad. Una de las características fundamentales de los elementos sin grados de libertad rotacionales es que son *no conformes*. Para introducir en forma discreta la continuidad del giro entre elementos y para la evaluación de las curvaturas se recurre una parcela de elementos que incluye al elemento en consideración y a los elementos adyacentes. La parcela de elementos a partir de la cual se evalúa la curvatura en un elemento se muestra en la Figura 1.a. En ella se indica la numeración local de los nudos, de los elementos que rodean al elemento en cuestión ( $\mathbf{M}$ ) y de los lados. En la Figura 1.b se indica la misma parcela sobre un dominio plano normalizado (elemento maestro). Notar la numeración asignada:

- los nudos del elemento principal van de 1 a 3, el nudo 4 es el opuesto al 1, el 5 al 2 y el 6 al 3.
- el lado  $i$  es el lado opuesto al nudo  $i$  en el elemento principal y el elemento  $i$  es el adyacente al mismo lado
- las conectividades en cada elemento adyacente  $i$  empiezan por el nudo extra ( $i + 3$ ).

### 2.1. Evaluación de las curvaturas en el elemento EBST

El cálculo de las curvaturas en el elemento EBST (Flores y Oñate (2005)), donde se supone que los cuatro elementos de la parcela pertenecen a una superficie suave, resulta de la integral promedio (1.a) y de su correspondiente integral por partes a partir del teorema de la divergencia (1.b)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{{}^oA} \int_{{}^oA} \begin{bmatrix} \varphi'_{11} \cdot \mathbf{t} \\ \varphi'_{22} \cdot \mathbf{t} \\ 2\varphi'_{12} \cdot \mathbf{t} \end{bmatrix} d {}^oA \quad (1a)$$

$$= \frac{-1}{{}^oA} \int_{{}^o\Gamma} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'_{11} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{22} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix} d {}^o\Gamma \quad (1b)$$

donde  ${}^oA$  es el área original del elemento y  ${}^o\Gamma$  el contorno del mismo con normal  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ . Las direcciones 1 y 2 son direcciones cartesianas arbitrariamente elegidas sobre la superficie

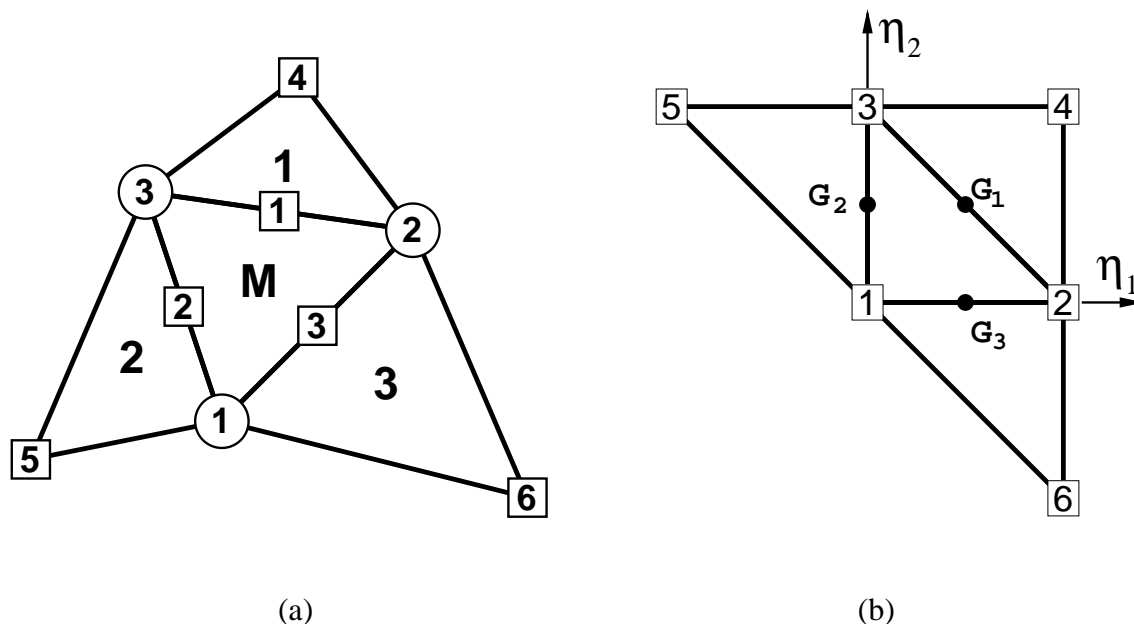


Figura 1: Parcela de elementos triangulares de tres nudos incluyendo el triángulo central (M) y tres elementos adyacentes (1, 2 y 3)

original y  $\mathbf{t}^{(M)}$  es la normal al plano del elemento definido por los tres nudos del elemento. Con un superíndice entre paréntesis se indica, cuando sea necesario, a que elemento de la parcela se refiere el parámetro geométrico correspondiente. Así  $\mathbf{t}^{(M)}$  es la normal al elemento central y  $\mathbf{t}^{(i)}$  es la normal al elemento adyacente opuesto al nudo  $i$  del elemento central.

Para la evaluación de los gradientes en (1.b) se propone una interpolación cuadrática de la geometría en base a los seis nudos involucrados en una parcela normal (ver Figura 1.b)

$$\varphi = \sum_{I=1}^6 N^I(\eta_1, \eta_2) \varphi^I \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} N^1 &= \eta_3 + \eta_1\eta_2 & N^4 &= \frac{\eta_3}{2}(\eta_3 - 1) \\ N^2 &= \eta_1 + \eta_2\eta_3 & N^5 &= \frac{\eta_1}{2}(\eta_1 - 1) \\ N^3 &= \eta_2 + \eta_3\eta_1 & N^6 &= \frac{\eta_2}{2}(\eta_2 - 1) \end{aligned} \quad (3)$$

Como se ve en el desarrollo de este elemento (Flores y Oñate (2005)), en cada lado el gradiente queda definido exclusivamente en función de los cuatro nudos asociados a los dos elementos adyacentes al lado  $i$  (el superíndice entre paréntesis indica en este caso evaluado a la mitad del lado  $i$ )

$$\begin{bmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} N_{,1}^1 & N_{,1}^2 & N_{,1}^3 & N_{,1}^{i+3} \\ N_{,2}^1 & N_{,2}^2 & N_{,2}^3 & N_{,2}^{i+3} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \\ \varphi^{i+3} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Evaluando la integral de contorno (1.b) a la mitad de cada lado se tiene (con  ${}^o l_i$  la longitud original de cada lado e indicando con un subíndice  $i$  valores asociados al lado)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{{}^o A} \sum_{i=1}^3 {}^o l_i \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi'_{r1} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \\ \varphi'_{r2} \cdot \mathbf{t}^{(M)} \end{bmatrix}_i \quad (5)$$

Cuando se resuelve este gradiente en las dos direcciones locales ( $\mathbf{n}, \mathbf{s}$ ) al lado, se anula el producto:

$$\varphi'_{r_s}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} = 0$$

pues

$$\varphi'_{r_s}^{(i)} = \frac{1}{{}^o l_s} (\varphi^K - \varphi^J)$$

Si además se introducen las derivadas de las funciones de forma  $L^i$  del triángulo lineal

$$\begin{bmatrix} L'_{r1} \\ L'_{r2} \end{bmatrix} = -\frac{{}^o l_i}{2 {}^o A} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_i = -\frac{1}{{}^o h_i} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_i \quad (6)$$

Puede utilizarse la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 4 {}^o A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{{}^o l_i} \begin{bmatrix} -(L^i_{r1})^2 \\ -(L^i_{r2})^2 \\ 2L^i_{r1} L^i_{r2} \end{bmatrix} (\varphi'_{r_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}) \quad (7)$$

Para el tratamiento de quiebres y ramificaciones, donde el ángulo entre las normales a dos elementos adyacentes puede ser grande, resulta necesario modificar la definición (7), utilizando efectivamente el ángulo entre normales y no su seno. Con este objetivo si  $2\gamma_i$  es el ángulo entre la normal al elemento y la normal al elemento adyacente la proyección  $\varphi'_{r_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)}$  puede interpretarse alternativamente como

$$\begin{aligned} \varphi'_{r_n}^{(i)} \cdot \mathbf{t}^{(M)} &= \lambda_n^{(i)} \sin(\mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{t}^{(M)}) = \lambda_n^{(i)} \sin 2\gamma_i \\ &\cong \lambda_n^{(i)} 2\gamma_i \equiv \lambda_{n_i}^{(M)} 2\gamma_i \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\mathbf{n}^{(i)}$  es la normal al lado  $i$  en el plano del elemento adyacente ( $i$ ) en la configuración deformada y  $\lambda_n^{(i)}$  es el estiramiento de la lámina en dicha dirección. Se tiene una mejor aproximación numérica de la curvatura del elemento

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{12} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = 2 {}^o A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{{}^o l_i} \begin{bmatrix} (L^i_{r1})^2 \\ (L^i_{r2})^2 \\ -2L^i_{r1} L^i_{r2} \end{bmatrix} \lambda_{n_i}^{(M)} 2\gamma_i \quad (9)$$

Esta definición de la curvatura del elemento puede ser extendida al tratamiento de superficies no suaves, con discontinuidades en el material y/o espesor e incluso al tratamiento de superficies ramificadas (Flores y Oñate (2006)).

## 2.2. Comportamiento membranar

La geometría de la superficie media está descrita por la aproximación cuadrática (2). El gradiente de deformación evaluado a la mitad de cada lado (4), utilizado para el cálculo de las curvaturas (7), es ahora utilizado para calcular el tensor métrico  $a_{\alpha\beta}^{(i)}$  en los mismos puntos, estos tensores métricos se promedian en el centro del elemento:

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_{\alpha\beta}^{(i)} \quad (10)$$

y permiten calcular el tensor de deformaciones de Green-Lagrange sobre la superficie media u otra medida de deformación conveniente. En la Referencia (Flores (2006)) se realiza una evaluación detallada de esta aproximación para problemas 2-D en tanto que en las Referencias (Flores y Oñate (2005), Oñate y Flores (2005) y Flores y Oñate (2006)) se muestran distintas aplicaciones en láminas delgadas tridimensionales

La interpolación cuadrática es sensible a la posición de los nudos que ocupan la parcela, por ello en su utilización para el cálculo de las deformaciones membranarales es necesario limitar el ángulo que forman entre sí los elementos de la parcela. Esto ocurre en problemas con nula o muy baja rigidez flexional (membranas o cuasi membranas) donde pueden producirse arrugas o pliegues muy pronunciados. Una posible solución es realizar a la mitad de cada lado un cambio gradual de formulación desde la aproximación cuadrática (4) a una aproximación lineal (Triángulo de Deformación Constante TDC) en función del ángulo de las normales entre los elementos adyacentes. Por otro lado en aquellos elementos con un elemento adyacente inexistente (contorno), o con un lado sobre una línea de quiebre o ramificación, ha dado buenos resultados utilizar como contribución del lado al promedio (10) el tensor métrico del triángulo lineal obtenido a partir de TDC.

## 3. PELÍCULA DELGADA CUADRADA SUJETA A UNA DEFORMACIÓN DE CORTE EN SU PLANO

Este ejemplo ha sido previamente analizado por (Tessler et al. (2005)) usando el código comercial ABAQUS/Standard (2002). Se dispone además de datos experimentales (Leifer et al. (2003)). El problema consiste en una membrana cuadrada (ver Figura 2) de lado  $a = 229mm$  construida con una película de Mylar de espesor  $h = 0,0762mm$ , cuyas propiedades mecánicas son  $E = 3790N/mm^2$  y  $\nu = 0,38$ . Los bordes superior e inferior se consideran empotrados y los laterales libres. El borde superior se desplaza  $\Delta = 1mm$  en su plano.

Los datos de geometría, material y condiciones de borde son los indicados por (Tessler et al. (2005)). Se ha incluido además la acción de la gravedad ( $\delta = 1000 [kg/m^3]$ ) actuando en la dirección negativa del eje  $z$ . El objetivo de esta última es: 1) evitar incluir una imperfección inicial (o una velocidad inicial), 2) inducir desplazamientos negativos en los bordes libres.

Se consideraron tres mallas estructuradas uniformes con  $26 \times 26$ ,  $51 \times 51$  y  $101 \times 101$  nudos, y 1250, 5000 y 20000 elementos triangulares respectivamente. En lo que sigue estas mallas se referenciarán como malla 25, 50 y 100, asociado al número de subdivisiones a lo largo de cada lado.

En la Figura 4 se han graficado los desplazamientos normales a la superficie con la malla más gruesa (25) para las dos posibles orientaciones de la malla (ver Figura 3). La figura izquierda corresponde a la orientación "natural" para el presente problema, donde cada cuadrado es dividido en dos triángulos usando la diagonal traccionada. Claramente esta última resulta

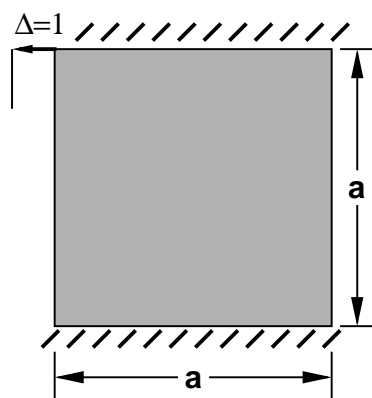


Figura 2: Membrana delgada cuadrada sujeta a corte en su plano.

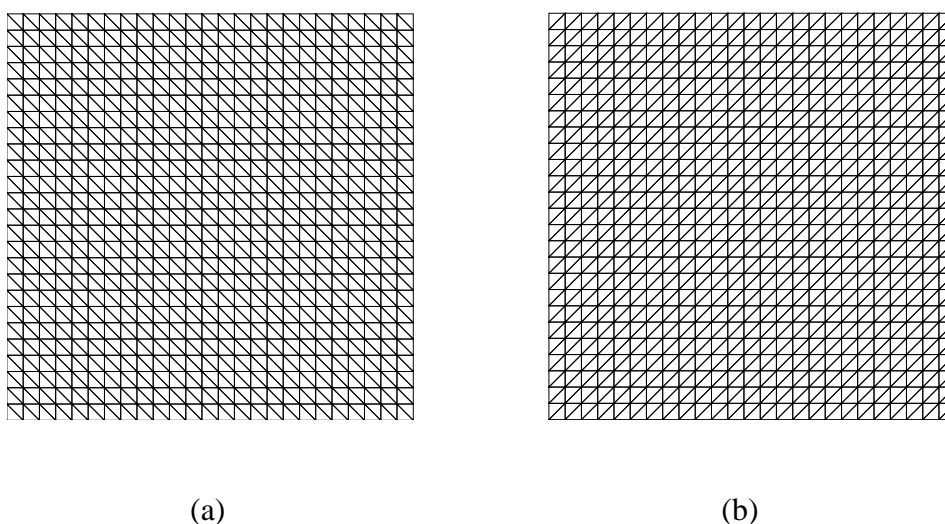


Figura 3: Membrana delgada cuadrada sujeta a corte en su plano. Tipos de mallas utilizadas (malla más gruesa). (a) orientación natural (b) orientación a lo largo de la diagonal comprimida.

más flexible y convergerá más rápidamente a la solución buscada. Por ello en lo sucesivo se utilizará solo esta orientación. Es necesario remarcar que la orientación en la dirección de la diagonal comprimida también convergerá a la solución correcta pero requerirá mallas mucho más densas.

En la Figura 5 se muestran dos perfiles del desplazamiento normal a lo largo del centro del cuadrado en ambas direcciones cartesianas. El gráfico de la izquierda corresponde a  $y = 114,5$  [mm] y el gráfico de la derecha a  $x = 114,5$  [mm]. Se incluyen los resultados para las tres mallas (orientación natural). Estas configuraciones deformadas son similares a las experimentales y coinciden con los numéricos (Tessler et al. (2005)) obtenidos con el programa ABAQUS/Standard (2002) usando el elemento cuadrilátero S4R5. En la referencia se usó la malla 100, la necesaria según sus propios estudios de convergencia, en tanto que los resultados obtenidos aquí para las mallas 50 y 100 son casi idénticos y que la malla 25 logra captar con bastante detalle la forma convergida, es decir los aspectos principales del problema. Esto está asociado

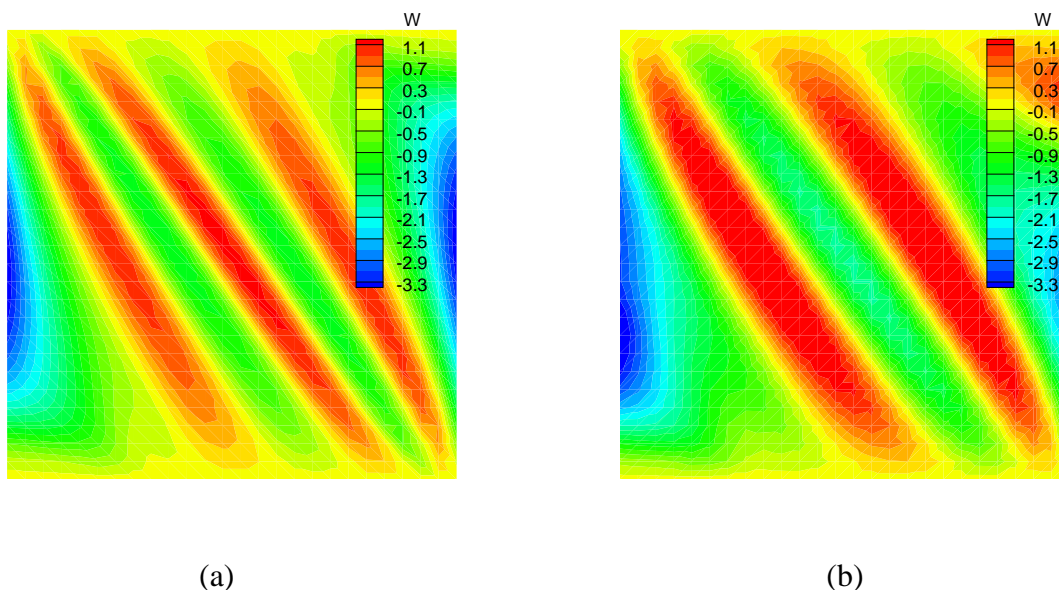


Figura 4: Membrana delgada cuadrada sujeta a corte en su plano. Desplazamientos normales para la malla más gruesa. (a) orientación natural (b) orientación a lo largo de la diagonal comprimida.

al mejor comportamiento membranar del triángulo en deformaciones impuestas sobre el cuadrilátero.

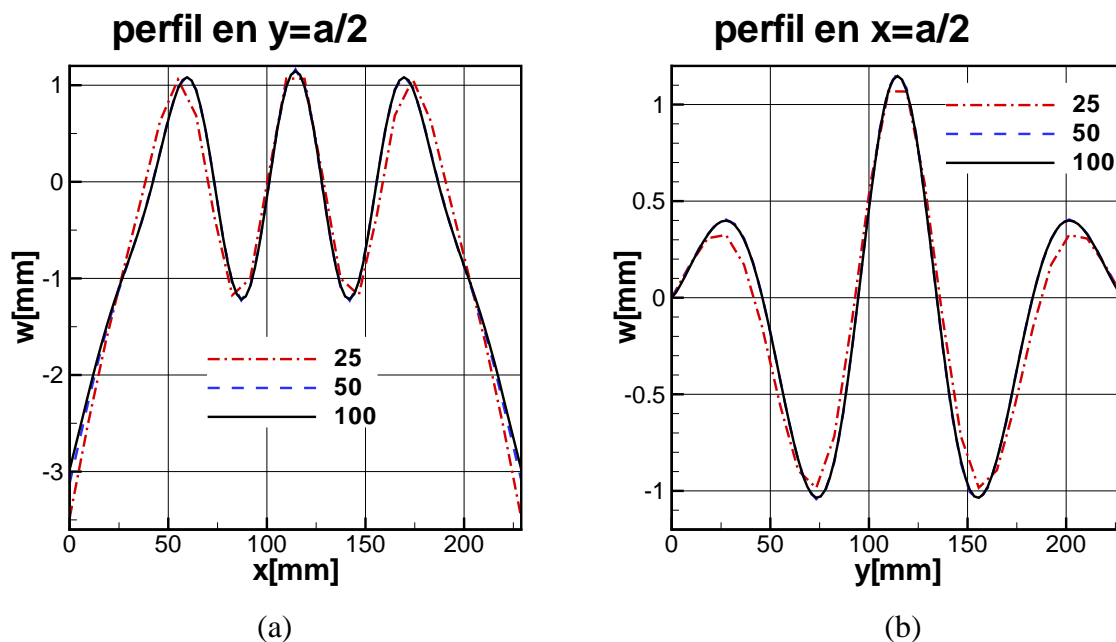


Figura 5: Membrana delgada cuadrada sujeta a corte en su plano. Perfiles de desplazamiento normal a lo largo del centro del cuadrado. (a)  $y = a/2$  (b)  $x = a/2$ .

Finalmente la Figura 6 muestra las configuraciones deformadas para la malla más gruesa y más fina (magnificadas por 5 en los desplazamientos normales). Puede observarse la excelente aproximación que se obtiene con la malla más gruesa que incluye sólo 1872 GdL comparado con la malla utilizada en (Tessler et al. (2005)) que implica unos 50.000 GdL.



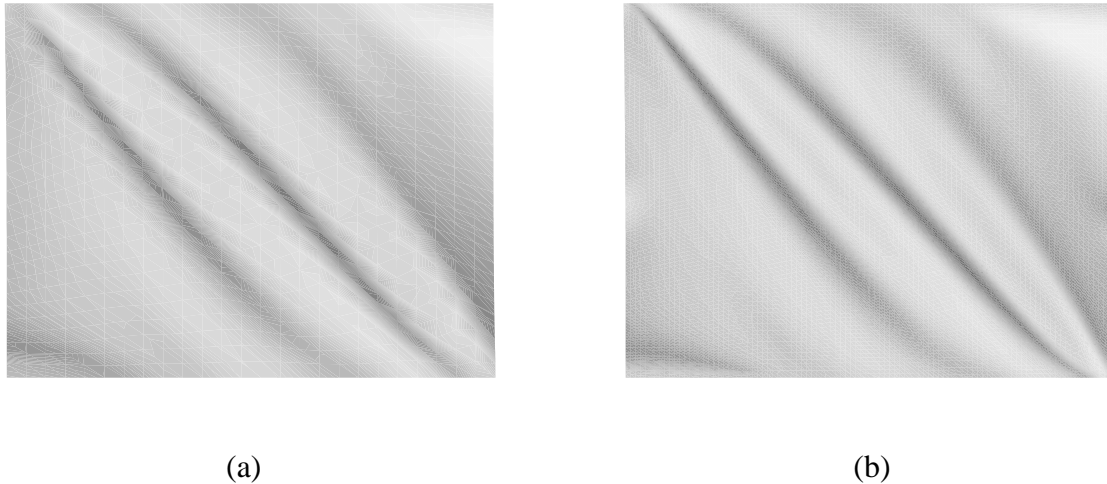


Figura 6: Membrana delgada cuadrada sujeta a corte en su plano. Configuraciones deformadas (5X en Z) (a) malla gruesa 25 (b) malla fina 100.

#### 4. MEMBRANA RECTANGULAR ANISÓTROPA SOMETIDA A TRACCIÓN Y CORTE

Este ejemplo ha sido estudiado por (Raible et al. (2005)) usando elementos de sólido como referencia para evaluar un algoritmo para la determinación de arrugas. Consiste en un dominio rectangular como se muestra en la Figura 7 de ancho 200 mm y altura 100 mm. La membrana está tomada de los bordes mas largos y está libre en los mas cortos.

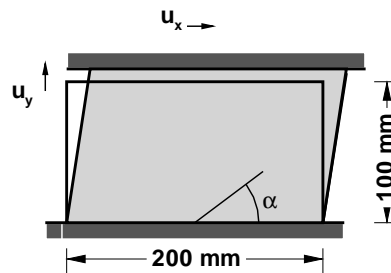


Figura 7: Membrana rectangular ortótropa.

Primero se estira la membrana en la dirección más corta ( $u_y = 1mm$ ) y luego se desplaza el borde superior produciendo una deformación de corte ( $u_x = 10mm$ ). La membrana tiene un espesor  $h = 0,2mm$  y está compuesto de una material con propiedades ortótropas. La matriz que relaciona tensiones y deformaciones (tensión plana) asociada a las direcciones principales del material es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112,375 & 25,480 & 0,000 \\ 25,480 & 112,375 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 11,32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} MPa$$

en el presente ejemplo esas direcciones forman un ángulo  $\alpha$  de 30 grados con el sistema global

$x - y$ . Por razones idénticas al ejemplo anterior se incluye además la acción gravitatoria en la dirección negativa del eje global  $z$ .

Se han considerado 5 mallas, todas estructuradas con idéntico paso en ambas direcciones, es decir con el doble número de elementos en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$  y con los triángulos orientados en la dirección de la diagonal traccionada. Estas mallas se identifican con la cantidad de divisiones por lado (por ejemplo  $24 \times 12$ ).

Inicialmente se hizo un análisis de autovalores para determinar el valor de desplazamiento  $u_x$  para el cual comienza el proceso de pandeo y la forma de dicho modo. En la Figura 8.a se muestra el valor del desplazamiento crítico en función del número de grados de libertad del modelo y en la Figura 8.b se muestra el perfil del modo de pandeo a lo largo de la dirección  $x$  ( $y = 50mm$ ) para las distintas mallas utilizadas. Claramente la malla más gruesa es insuficiente pero el resto de las mallas dan perfiles significativamente similares.

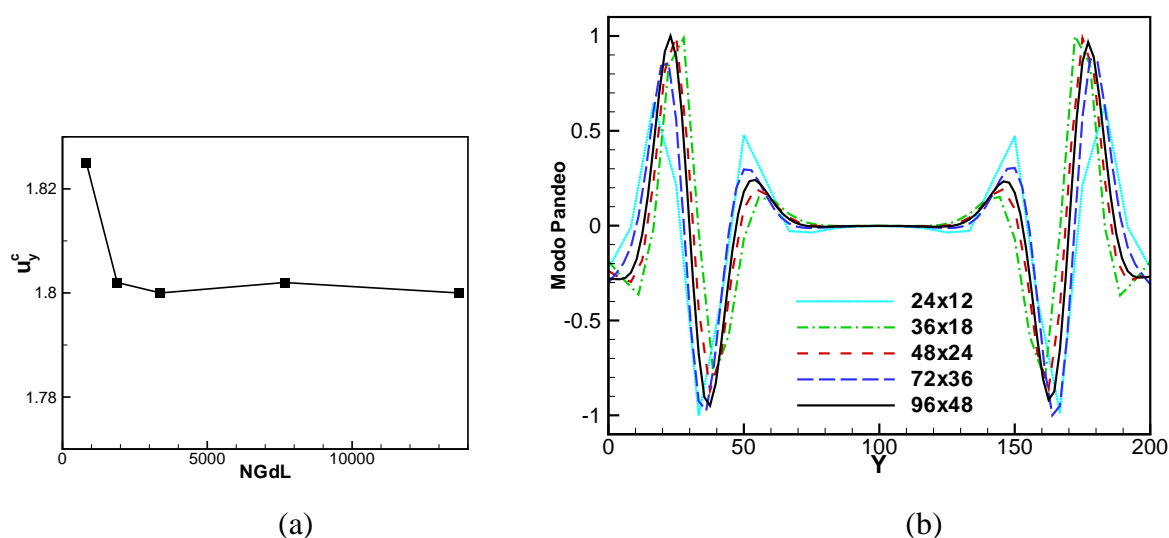


Figura 8: Membrana rectangular ortótropa. (a)desplazamiento crítico en función del NGdL (b)perfil del modo crítico para las distintas mallas.

En la Figura 9 se muestran los perfiles de desplazamiento correspondientes al desplazamiento final  $u_x = 10mm$ . Notar que a diferencia de los modos de pandeo (que efectivamente indican el modo inicial de desplazamiento transversal) donde los desplazamientos en la zona media son básicamente nulos, para este nivel de desplazamientos las arrugas ya involucran a toda la membrana. Los perfiles correspondientes a las dos mallas mas finas son prácticamente coincidentes y sólo se distinguen de las mallas más gruesas en los bordes libres de lámina. Los resultados presentados son concordantes con los presentados en la referencia donde se han usado un orden de magnitud más de GdL (120.000).

## 5. MEMBRANA DELGADA CUADRADA TRACCIONADA EN SUS EXTREMOS

En este ejemplo se considera el caso de una membrana cuadrada constituida por una película delgada sometida a cargas de tracción en sus cuatro vértices. Esta configuración ha sido estudiada teórica, experimental y numéricamente por diferentes autores y presenta características más complejas que los anteriores. Entre los resultados recientemente publicados en la literatura discutiremos dos casos.

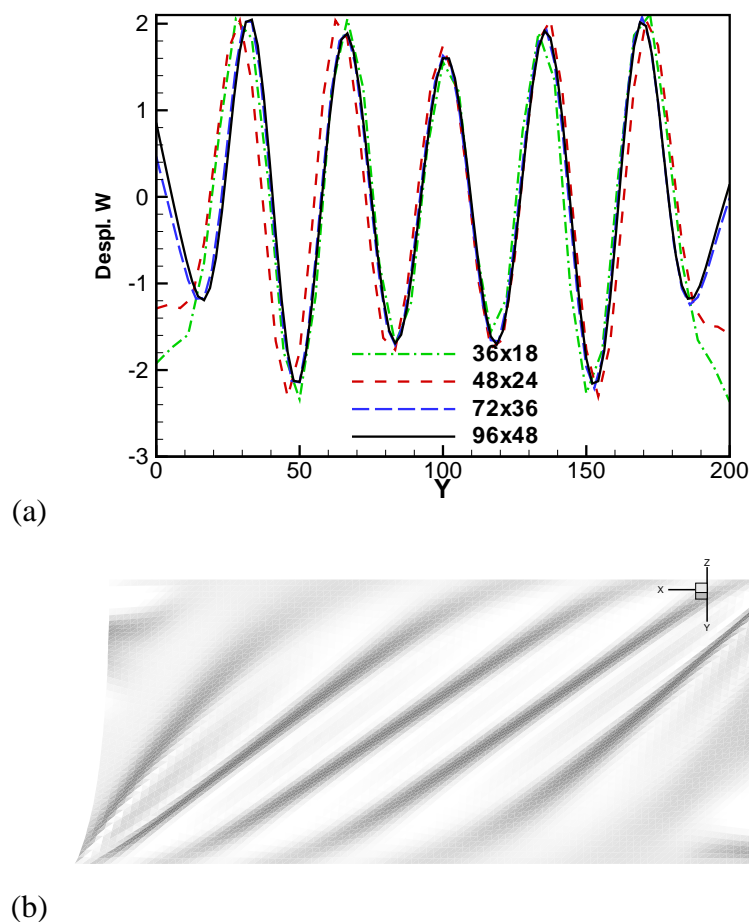


Figura 9: Membrana rectangular ortótropa, configuración deformada para  $u_x = 10mm$ . (a)Perfil de desplazamientos (b)Deformada (2X para Z)

## 5.1. Discusión

El primer caso corresponde a (Blandino et al. (2002)) que estudiaron experimentalmente una película de Kapton de 500mm de lado con refuerzos triangulares de Mylar en sus vértices a los cuales se transfería la carga a través de hilos de Kevlar pegados a los refuerzos. Sólo consideraron cargas iguales en los cuatro vértices. (ver Figura 10). Las dimensiones son  $a = 500mm$ ,  $d = 14,1mm$  y espesor  $h = 0,025mm$ . La carga máxima aplicada fue de  $F = 4,9N$ .

No hay en este trabajo detalles respecto a la unión entre las distintas partes ni a las inevitables “imperfecciones” del modelo que condicionan las características del comportamiento posterior y hacen que los resultados experimentales sean difícilmente repetibles experimentalmente y/o numéricamente. En la descripción del experimento no se hace referencia a la geometría de la membrana descargada. Es importante resaltar que debido al bajísimo espesor, lo que implica una rigidez flexional casi despreciable, la configuración original no es plana. Habitualmente los bordes de esta membranas se curvan notoriamente y el mismo peso propio (la membrana fue ensayada vertical) introduce un conjunto de arrugas. Las mediciones publicadas con la carga más baja (1/10 de la máxima) muestran la existencia de arrugas, que a su vez tienen amplitudes mayores que para la carga máxima lo que indica que no hay un proceso de aparición de arrugas a medida que aumenta la carga sino que lo que se mide es la evolución/redistribución de las mismas.

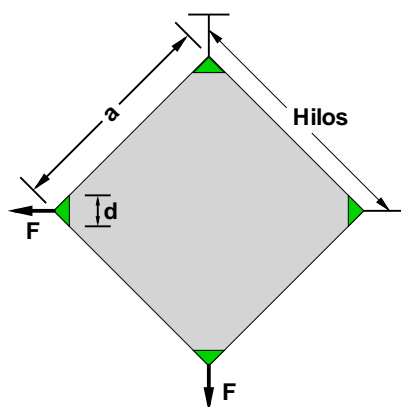


Figura 10: Membrana cuadrada traccionada en las esquinas con valores iguales.

Paralelamente realizaron un análisis numérico con elementos de membrana (geometría inicial plana), considerando la influencia de los rigidizadores de Mylar e incluyendo los hilos en el modelo. A los fines de determinar las zonas de potencial formación de las arrugas utilizaron la facilidad UMAT dentro del código comercial [ABAQUS/Standard \(2002\)](#) para introducir un material conveniente que no soporte compresiones. Los resultados presentados ( $F = 2,45N$ ) no muestran zonas con tensiones de compresión, que debieran ser los generadores de arrugas, sin embargo utilizando un criterio combinado de tensión/deformación en UMAT consideran que las zonas con una tensión principal muy baja y deformación negativa en dicha dirección (asociada al efecto de Poisson) son zonas de potencial formación de arrugas. Esas zonas corresponden a los bordes libres y zonas cercanas a las aplicaciones de las cargas donde la primera tensión principal es más alta y por ende es más marcado el efecto de Poisson.

Este ejemplo fue analizado numéricamente por ([Tessler et al. \(2005\)](#); [Tessler y Sleight \(2004\)](#)) usando también el código [ABAQUS/Standard \(2002\)](#) pero con elementos de lámina (S4R5). En este modelo no se incluyeron los rigidizadores de Mylar ni los hilos para transmitir la carga. Si se incluyeron imperfecciones geométricas iniciales a los fines de facilitar la aparición de configuraciones deformadas no planas. En una primera aproximación se consideró la geometría cuadrada con cargas puntuales en los vértices. La conclusión inicial fue que cargas puntuales sobre los vértices de una lámina cuadrada no producen arrugas, ni siquiera incluyendo imperfecciones geométricas. En una segunda aproximación la carga se aplicó como uniformemente distribuida sobre el borde truncado de la membrana. Esta hipótesis es arbitraria en varios aspectos y merecería una justificación detallada que no ha sido realizada. Se reportaron resultados sólo para valores de carga de  $2,45N$  y  $4,9N$  pues para valores inferiores a 2 no hay arrugas en contraposición con la evidencia experimental. Se utilizaron mallas estructuradas refinadas hacia la zona de los vértices en los cuales la relación de aspecto fue del orden de 20. Los resultados no fueron buenos, pues con mallas relativamente gruesas se obtuvieron deformadas con arrugas ( $2,45N$ ) pero cuando se densificó la malla las arrugas no aparecieron. Por otro lado realizaron estudios paramétricos modificando el tamaño de la zona truncada que mostraron la enorme sensibilidad de la cantidad y la altura de las arrugas con la dimensión de la zona truncada.

Un ejemplo similar fue analizado por ([Wong y Pellegrino \(2005\)](#)) en forma experimental, analítica y numérica. En la Figura 11 se muestra la geometría del problema. Las dimensiones son  $L = 500mm$ ,  $d = 25mm$  y espesor de la película  $h = 0,025mm$ . El material es Kapton

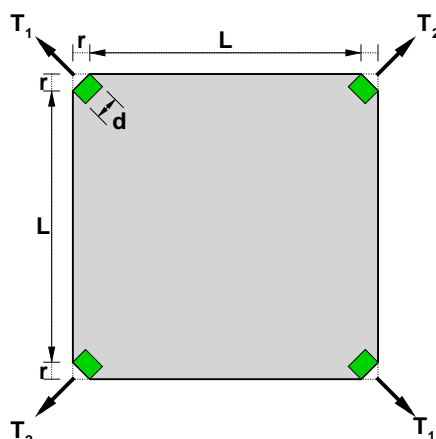


Figura 11: Membrana cuadrada traccionada en las esquinas con valores desiguales

con propiedades mecánicas  $E = 3530\text{N/mm}^2$  y  $\nu = 0,3$ . Las esquinas están truncadas y se ha aplicado un refuerzo de  $25\text{mm} \times 20\text{mm}$  también de Kapton pero de espesor  $h = 0,1\text{mm}$ . Además la carga se aplica en cada borde a través de una barra distribuidora de carga. Inicialmente se aplican cargas iguales  $T_1 = T_2 = 5\text{N}$  y luego se mantiene  $T_1$  constante y se aumenta  $T_2$  hasta  $20\text{N}$ , es decir que la relación  $\frac{T_2}{T_1}$  se mueve entre 1 y 4.

En este caso el ensayo experimental se realiza con la membrana horizontal y similarmente a los resultados de [Blandino et al. \(2002\)](#) la película muestra la existencia de arrugas para cargas iguales  $\frac{T_2}{T_1} = 1$ . Al llevar la carga a  $T_2 = 10$  ( $\frac{T_2}{T_1} = 2$ ) las arrugas crecen pero se mantienen concentradas en las esquinas y recién cuando se carga con  $T_2 = 15$  ( $\frac{T_2}{T_1} = 3$ ) se puede ver la formación de una arruga importante en la dirección de la carga. Resulta interesante señalar que la aproximación analítica utilizada no indica tensiones de compresión, que son responsables de las arrugas, hasta una relación  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2,41$ .

El análisis numérico fue realizado con [ABAQUS/Standard \(2002\)](#) usando el elemento S4R5 incluyendo el refuerzo y la barra de distribución. A los fines de inducir un comportamiento fuera del plano se utilizó una imperfección geométrica asociada a una combinación de modos de pandeo obtenidos con un modelo sin incluir los refuerzos (similar en ese aspecto al utilizado por ([Tessler y Sleight \(2004\)](#))). Los resultados reportados corresponden a  $\frac{T_2}{T_1} = 1$  y  $\frac{T_2}{T_1} = 4$ . Para el caso de cargas iguales se muestra una configuración deformada magnificada 100 veces para poder evidenciarla, lo cual en la práctica significa que no aparecen arrugas, teniendo además en cuenta que se utilizó un modelo con imperfecciones iniciales cuya amplitud probablemente sea muy similar (pero de signo opuesto) a la amplitud reportada. Para el caso  $T_2 = 20$  en el modelo numérico ya se ha desarrollado una notoria arruga a lo largo de la diagonal traccionada, la cual puede efectivamente compararse con los resultado experimentales.

Los estudios analíticos y numéricos no indican en ningún caso en forma fehaciente la aparición de arrugas para valores de carga iguales en las esquinas. Esta inconsistencia con los resultados experimentales indica que hay aspectos del problema que no han sido considerados adecuadamente en los modelos numéricos. Intentar simular este problema sin una detallada descripción de la efectiva geometría inicial y las condiciones de ensayo parecen inútil, pues la utilidad principal de las simulaciones numéricas es su valor predictivo a partir de un problema adecuadamente descripto.

## 5.2. Resultados numéricos

En este trabajo se simula el ensayo descrito en (Wong y Pellegrino (2005)). Se utilizó una malla con 6415 nudos y 12454 elementos triangulares (paso de la malla del orden de 3mm) uniformemente distribuidos sobre un cuarto de la geometría pues se aplicaron condiciones de simetría. Se incluyó la geometría real del refuerzo y la influencia de la barra distribuidora se consideró imponiendo sobre los nudos de borde un movimiento uniforme en la dirección de la carga y se restringieron los desplazamientos en la dirección normal a la carga.

Inicialmente se realizó un análisis implícito para determinar la carga de pandeo. Primero se consideraron cargas iguales en ambas direcciones y en tal caso no se alcanza una carga de pandeo. Esto está de acuerdo con las aproximaciones analíticas y numéricas previas, lo cual requiere una interpretación diferente de la existencia de arrugas en el ensayo experimental. En segundo lugar se consideraron cargas iguales hasta un valor de  $T_1 = T_2 = 5N$  y luego se incrementó sólo  $T_2$ . En este caso la carga de pandeo se alcanza para un valor de  $T_2^c = 11,32N$  es decir  $\frac{T_2}{T_1} = 2,264$ . En la Figura 12 se ve la forma global del modo de pandeo y un perfil de desplazamientos a una distancia  $y = 22,5cm$  del eje de simetría.

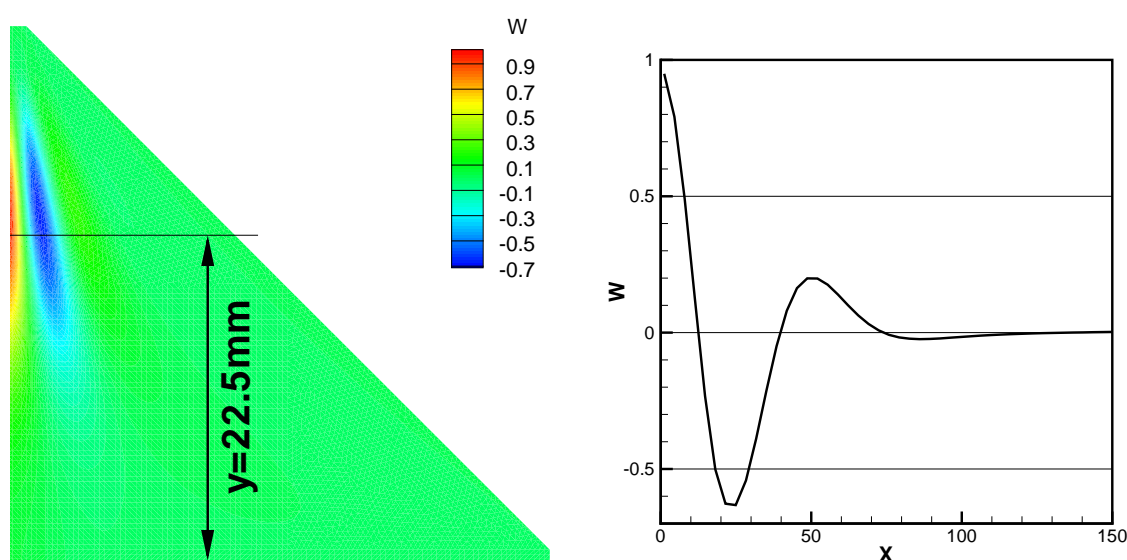


Figura 12: Membrana cuadrada traccionada. Modo de pandeo para  $\frac{T_2}{T_1} = 2,264$

Posteriormente se realizó un análisis dinámico explícito, se utilizó como disparador del modo de pandeo una velocidad inicial normal a la lámina en puntos arbitrarios. Se consideraron dos valores de carga  $T_2 = 10$  y  $T_2 = 20$ . En la Figura 13 se muestran los contornos de desplazamientos correspondientes al primer caso. Puede observarse que el máximo desplazamiento es menor que  $0,05mm$  (dos veces el espesor de la membrana) es decir que corresponde a un estado poscrítico incipiente. Este contorno de desplazamiento prácticamente coincide con la forma del modo crítico evaluado en forma implícita. Debido a que el nivel de carga es menor que el valor crítico predicho en el análisis implícito podría esperarse que las arrugas todavía no se hubiesen producido. Sin embargo el sistema estructural encuentra un modo de deformación estable con desplazamientos fuera del plano.

Para el caso  $T_2 = 20$ , el esquema de arrugas está muy desarrollado y resulta mucho más sencillo y confiable para la comparación con los resultados experimentales. En la Figura 14 se

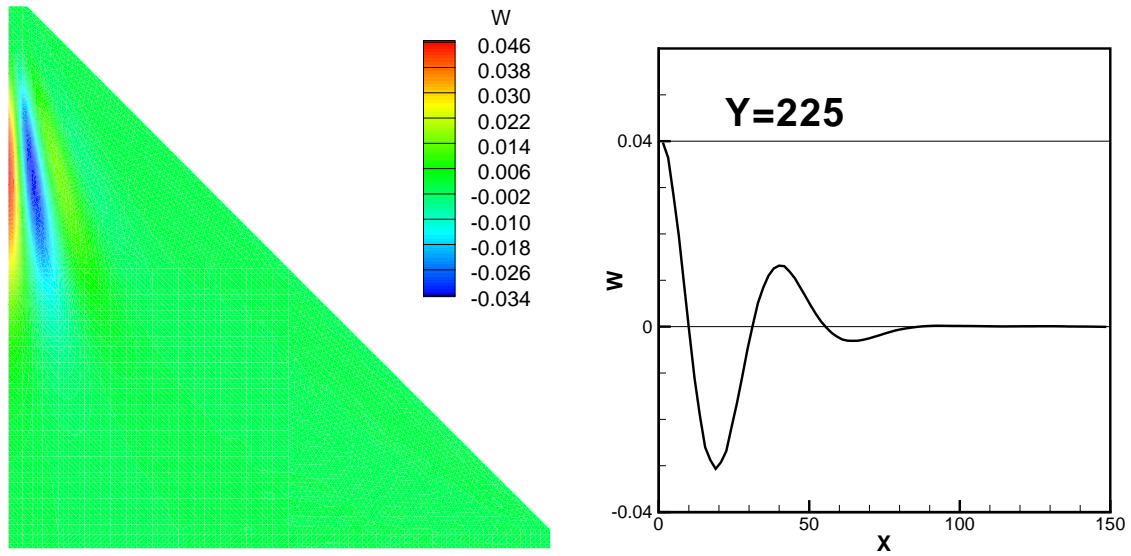


Figura 13: Membrana cuadrada traccionada. Contornos de desplazamientos transversales para  $\frac{T_2}{T_1} = 2$

muestra los desplazamientos transversales en toda la placa y el perfil a lo largo de la diagonal menos traccionada. Los valores máximos y mínimos son muy similares a los valores experimentales.

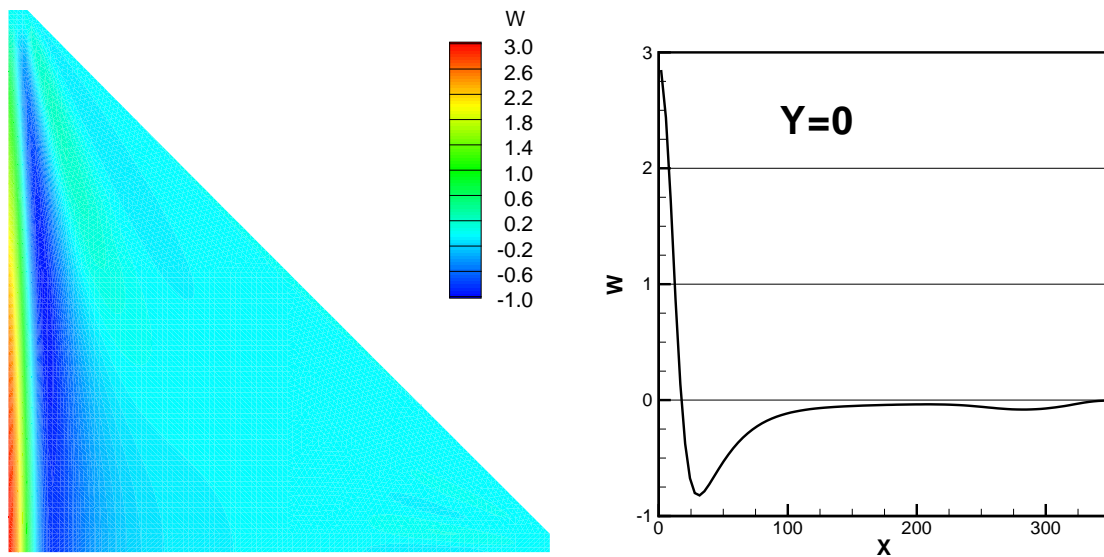


Figura 14: Membrana cuadrada traccionada. Contornos de desplazamientos transversales para  $\frac{T_2}{T_1} = 4$ .

## 6. ALA DE AVIÓN

En este caso se realiza el análisis estático de un ala de avión de geometría sencilla. Se han incluido sólo la parte estructural del ala que tiene un largo de  $6,90m$ , un ancho máximo (cuerda) de  $2,30m$  y un espesor máximo de  $0,26m$ . Se ha considerado como material constitutivo al aluminio con un espesor de piel de  $2mm$  y un espesor de rigidizadores de  $3mm$ . Se ha aplicado

una carga vertical distribuida sobre la punta de  $30KN$  y una carga horizontal de  $5KN$ . El objetivo es observar el comportamiento cualitativo del elemento de lámina descrito en (Flores y Oñate (2006)) utilizado aquí para modelar enteramente el ala.

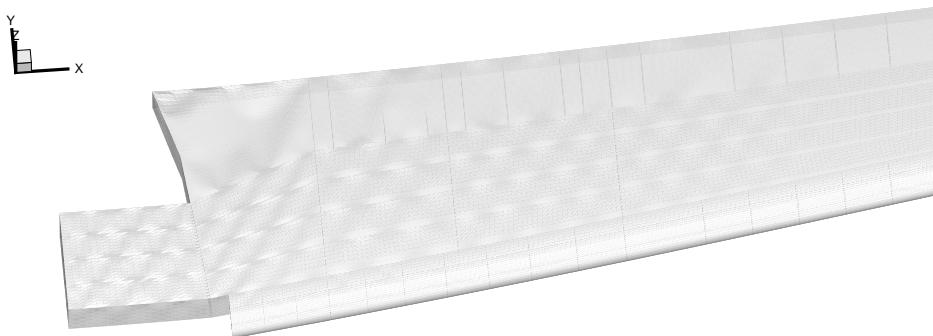


Figura 15: Ala de avión. Configuración deformada

En la Figura 15 se muestra la geometría deformada del ala, cuyo extremo libre se desplaza  $0,46m$  y se considera empotrada en el fuselaje. La malla incluye 56.000 nudos y 113.000 elementos triangulares, lo que implica unos 162.000 GdL. En la Figura 16.a se ha graficado el desplazamiento vertical sobre el recubrimiento superior en la zona cercana al empotramiento. En tanto que en la Figura 16.b se ha graficado el desplazamiento horizontal sobre los rigidizadores longitudinales. En ambos casos puede observarse que para el nivel de cargas utilizado, debido a la esbeltez de recubrimiento y rigidizadores, casi todos los elementos estructurales trabajan en régimen poscrítico. Esta es la característica fundamental de estas estructuras livianas que hacen inútil un análisis lineal. El excelente comportamiento membranar del elemento, fundamental para obtener una solución confiable, permite utilizar un modelo con relativamente pocos elementos, lo que a su vez se ve magnificado porque la cantidad de GdL totales es la mitad de los necesarios si se usara un elemento de lámina estándar. En este tipo de problemas no-lineales que requieren resolver un número importante de sistemas de ecuaciones (en el caso de usar una técnica implícita) resulta de particular importancia el tamaño de la matriz de rigidez que en este caso es sustancialmente menor,

## 7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se han simulado dos ejemplos de membranas delgadas sometidas a esfuerzos de corte. Estos ejemplos están bien definidos y ha permitido obtener una excelente correlación con resultados experimentales y con otras técnicas numéricas. Se ha mostrado como el excelente comportamiento membranar de los elementos sin grados de libertad rotacionales ha permitido utilizar mallas relativamente gruesas que captan los aspectos principales del comportamiento con gran precisión. La utilización de un integrador explícito para las ecuaciones de movimiento ha permitido obtener soluciones a problemas fuertemente inestables que presentan dificultades para su análisis estático utilizando técnicas de continuación.

Se ha discutido el caso de una membrana cuadrada sometida a cargas puntuales. Cuando las cargas son iguales el ejemplo es sensible a la geometría inicial. Cuando las cargas son diferentes el problema queda bien definido y puede obtenerse una correlación con los resultados experimentales.



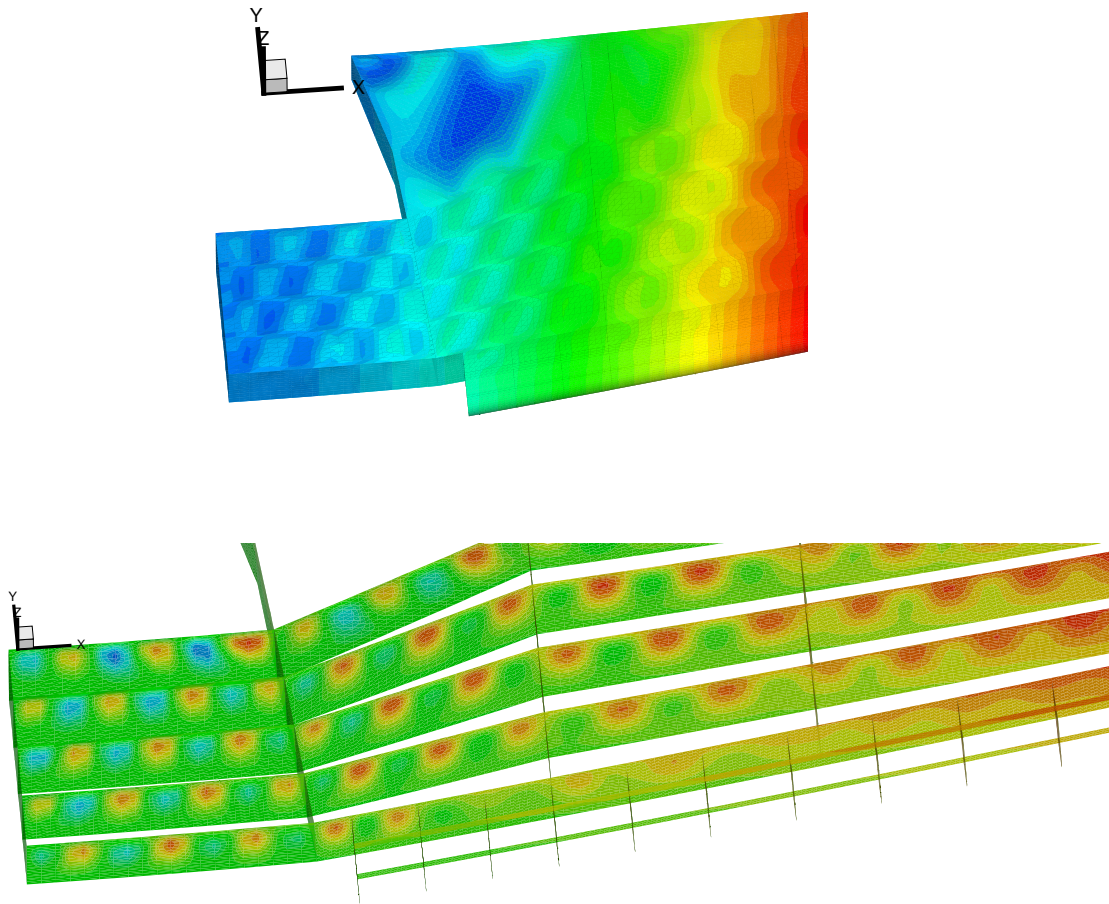


Figura 16: Ala de avión. Desplazamientos normales sobre el recubrimiento y los rigidizadores.

Finalmente se ha mostrado la aplicación de los elementos sin grados de rotación al análisis de superficies ramificadas. Nuevamente el excelente comportamiento membranal y la menor cantidad de grados de libertad convierten a este elemento en un excelente candidato para la simulación de este tipo de estructuras.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y de la SeCyT-UNC.

## REFERENCIAS

- ABAQUS/Standard. *User's Manual, version 6.3.1*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2002. URL [www.abaqus.com](http://www.abaqus.com).
- J.R Blandino, J.D. Johnston, y U.K. Dharami. Corner wrinkling of a square membrane due to symmetric mechanical loads. *AIAA Journal of Spacecrafts and Rockets*, 35:183–200, 2002.
- F.G. Flores. A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformation analysis. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2006. en prensa.
- F.G. Flores y E. Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free bst shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- F.G. Flores y E. Oñate. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006. en prensa.
- J. Leifer, J.T. Black, Belvin W.K., y Behun V. Evaluation of shear compliant borders for wrinkle reduction in thin film membrane structures. *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2003. Norfolk, Virginia, EEUU.
- E. Oñate y F.G. Flores. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2406–2443, 2005.
- T. Raible, K. Tegeler, S. Löhnert, y P. Wriggers. Development of a wrinkling algorithm for orthotropic membrane materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2550–2568, 2005.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, v6.0.0. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2006. URL [www.quantech.es](http://www.quantech.es).
- A. Tessler y D.W. Sleight. Toward effective modelling of wrinkled thin-film membranes exhibiting stress concentrations. *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2004. Palm Springs, California, EEUU.
- A. Tessler, D.W. Sleight, y J.T. Wang. Effective modeling and nonlinear shell analysis of thin membranes exhibiting structural wrinkling. *AIAA Journal of Spacecrafts and Rockets*, 42: 287–298, 2005.
- Y.W. Wong y S. Pellegrino. Wrinkles in square membranes. *en Textil Composite and Inflatable Structures*, (Oñate, E. y Kröplin, B. eds), Springer, 3:109–122, 2005.