

DESARROLLO DE UN ELEMENTO DE LÁMINA CUADRILÁTERO SIN ROTACIONES

Carlos F. Estrada, Fernando G. Flores

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, cestrada@efn.uncor.edu - fflores@efn.uncor.edu,

<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>

Palabras clave: Elementos Finitos, Láminas, sin rotaciones, grandes deformaciones, control de hourglass, estabilización.

Resumen. Se presenta un elemento cuadrilátero sencillo para el análisis de láminas. Este elemento tiene únicamente grados de libertad traslacionales y está basado en una formulación Lagrangiana total. El elemento se basa en suponer un campo de curvatura constante expresado en términos de los desplazamientos nodales de una parcela de cinco elementos y un campo membranar expresado a partir de una interpolación bi-lineal estándar de los desplazamientos dentro del elemento. A los fines de obtener un elemento eficiente para el análisis explícito se utiliza un único punto de integración en el centro del elemento. Para evitar la aparición de modos espúreos de deformación (*hourglass*) se incluyen fuerzas de estabilización membranar lográndose una estabilización física. Por otro lado, a consecuencia de utilizar una curvatura constante en el elemento calculada en función de los gradientes sobre el contorno puede producirse una configuración deformada sin energía asociada (modos espúreos de flexión). Para mantener un solo punto de integración es necesario realizar una estabilización del modo flexional, lo cual se logra penalizando la semidiferencia entre las curvaturas nodales, obteniéndose una estabilización de tipo artificial. El elemento se denomina **BSQ** y se ha implementado en códigos con integración explícita e implícita de las ecuaciones de movimiento. Los resultados numéricos han sido obtenidos con valores de los coeficientes de estabilización tanto membranar como flexional constantes. La formulación propuesta es satisfactoria a la luz de los resultados.

1. INTRODUCCIÓN

La idea de usar los desplazamientos nodales como únicos grados de libertad en elementos de lámina no es nueva. En los pasados años numerosos autores han formulado elementos de placa y lámina delgada basados en la teoría de Kirchhoff, ver [Nay y Utku \(1972\)](#), [Oñate y Cervera \(1993\)](#) y [Sabourin y Brunet \(1993\)](#). En problemas tridimensionales los principales desarrollos ha sido con elementos triangulares utilizando interpolaciones lineales sobre cada elemento como puede verse en [Oñate y Zárate \(2000\)](#), [Flores y Oñate \(2001\)](#), [Flores y Oñate \(2005\)](#) y [Oñate y Flores \(2005\)](#). En esencia todos los métodos se basan en expresar el campo de curvatura en términos de los desplazamientos nodales de una parcela de elementos. A diferencia de otros problemas la mayoría de los desarrollos han sido realizados sobre elementos triangulares, y no existe un desarrollo exhaustivo de elementos cuadriláteros. El trabajo de [Oñate y Cervera \(1993\)](#) sugiere la posibilidad de considerar elementos de placa delgada cuadriláteros pero no indica los detalles y menos aún provee de resultados.

Una de las principales metas buscadas en el desarrollo de estos elementos es lograr una economía en el número de operaciones particularmente para análisis explícitos. Los elementos cuadriláteros estándar de láminas con un solo punto de integración son ampliamente usados por su bajo costo computacional, sin embargo, como consecuencia de su formulación suelen aparecer problemas para mantener la convergencia y la estabilidad de la solución de una simulación numérica. La pérdida de estabilidad se debe a la activación de mecanismos internos asociados a modos de energía nula conocidos como modos de *hourglass*. Los mayores progresos en las técnicas de estabilización de *hourglass* fueron introducidos en [Flanagan y Belytscho \(1978\)](#), [Belytschko et al. \(1992\)](#) y [Belytschko y Leviathan \(1994a,b\)](#). A la luz de estas consideraciones, el desarrollo de un elemento cuadrilátero sin grados de libertad rotacional trae aparejado problemas de estabilidad membranar al cual debe añadirse posibles mecanismos internos de flexión asociados a modos de energía nula.

El único elemento cuadrilátero sin rotaciones ha sido presentado recientemente por [Brunet y Sabourin \(2006\)](#) basado en la extensión de un elemento triangular de lámina desarrollado por los mismos autores [Sabourin y Brunet \(1993\)](#). La formulación utiliza una parcela de cinco cuadriláteros, y calcula deformaciones de flexión normales a los lados comunes a partir de sus giros relativos, las cuales son luego interpoladas usando coordenadas de área. Adicionalmente a las cuatro ángulos de giros evaluados a cada lado del elemento principal de la parcela se adicionan dos ángulos internos para evitar posibles modos de alabeos. Las deformaciones membranarales se evalúan en un único punto de integración y se adiciona una estabilización a través de un método de perturbación o una técnica de estabilización física. La formulación presentada implica una integración paso a paso de las deformaciones dentro de un sistema corrotacional y una relación constitutiva hipoeelástica.

En este trabajo se presenta la formulación de un segundo elemento de lámina cuadrilátero sin rotaciones como una extensión de los elementos triangulares desarrollados por [Flores y Oñate \(2001\)](#), [Flores y Oñate \(2005\)](#), [Oñate y Flores \(2005\)](#) y [Flores y Oñate \(2006\)](#). La diferencia principal con la aproximación anterior es que se trabaja directamente con la obtención de las formas fundamentales de la superficie.

El contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 se presentan algunos aspectos de la geometría donde se define “la parcela de elementos” y el sistema de coordenadas a utilizar. El cálculo de las curvaturas en función de las coordenadas de los nudos de la parcela se presentan en la Sección 3 donde además se describe un procedimiento de estabilización flexional. En la Sección 4 se tratan las condiciones de borde de flexión. El cálculo de las deformaciones

membranales y el esquema particular de estabilización física se muestran en la Sección 5. En las secciones 6 y 7 se dan algunos detalles respecto al cálculo de de fuerzas residuales y de la matriz tangente. En la Sección 8 se presenta un detallado estudio numérico del elemento presentado incluyendo distintos ejemplos numéricos lineales y no lineales.

2. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL ELEMENTO

La geometría del elemento queda definida por la posición de sus cuatro nudos y las únicas incógnitas a utilizar son las tres componentes de desplazamiento en cada nudo. Se utilizará la teoría clásica de láminas delgadas en base a las hipótesis de Kirchhoff-Love. La condición de continuidad C^1 resultante se impone en forma discreta sobre una parcela de cinco elementos formada por un elemento principal y cuatro adyacentes. En la Figura 1a se muestra el orden de los nudos y la definición de las conectividades de la parcela de elementos. Los nudos y los lados en el elemento principal M están numerados localmente del 1 al 4 en sentido antihorario. La numeración de los lados se asocia posteriormente a puntos de evaluación de una integral sobre el contorno. Los elementos adyacentes al elemento principal M están numerados con el número asociado al contorno del lado común. Los nudos de los elementos adyacentes que no pertenecen al elemento principal se han numerado consecutivamente en sentido antihorario empezando por el elemento 1 (ver Figura 1b). Las conectividades de los elementos adyacentes son definidas comenzando por el número del nudo extra menor correspondiente a cada elemento.

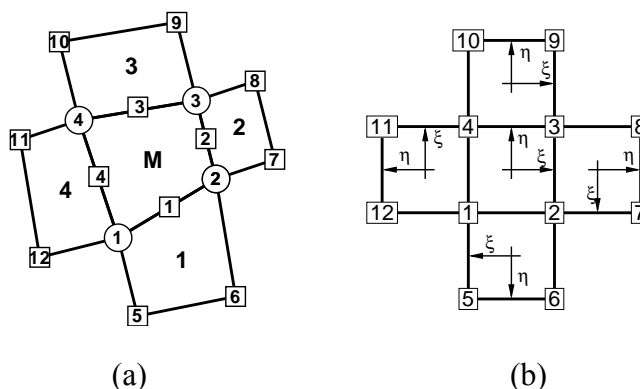


Figura 1: (a) definición de la parcela de elementos, (b) sistema de coordenadas naturales.

En cada elemento la geometría resulta de la habitual interpolación bilineal

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \varphi^I \tag{1}$$

donde φ es la posición de la superficie media, con φ^I la correspondiente a cada nudo y las $N^I(\xi, \eta)$ son las funciones de interpolación bilineal definidas sobre el elemento maestro en el sistema local, ver por ejemplo Zienkiewicz y Taylor (2000).

La evaluación de las formas fundamentales sobre la superficie media requiere de la definición de un sistema cartesiano consistente sobre cada punto de la parcela donde se evalúe el gradiente $\varphi_{, \alpha}$. Para ello se propone lo siguiente:

a- En el centro del elemento principal se define el sistema cartesiano de referencia (t_1^0, t_2^0, t^0) a partir de la normal

$$t^0 = \frac{1}{J_0} (\varphi_{, \xi}^0 \times \varphi_{, \eta}^0) \quad J_0 = \|\varphi_{, \xi}^0 \times \varphi_{, \eta}^0\| \tag{2}$$

donde $\varphi'_{\xi}, \varphi'_{\eta}$ son las derivadas respecto a las coordenadas naturales. Las dos direcciones cartesianas de referencia $(\mathbf{t}_1^0, \mathbf{t}_2^0)$ sobre el plano normal a \mathbf{t}^0 se definen arbitrariamente (por ejemplo en las direcciones principales de ortotropía del material).

b- Similarmente, en cada punto medio de cada lado del elemento principal se tendrá el plano tangente $(\varphi'_{\xi}, \varphi'_{\eta})$ y su normal \mathbf{t}^i

$$\mathbf{t}^i = \frac{1}{J_1} (\varphi'_{\xi} \times \varphi'_{\eta}) \quad (3)$$

la continuidad del sistema cartesiano definido antes, se obtiene a partir de la intersección entre ambos planos $\mathbf{q}^i = \frac{\mathbf{t}^0 \times \mathbf{t}^i}{\|\mathbf{t}^0 \times \mathbf{t}^i\|}$ y el ángulo α_i que forma con el sistema cartesiano de referencia $\cos \alpha_i = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{t}_1^0$ y $\sin \alpha_i = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{t}_2^0$. Se elige luego el sistema $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i)$ sobre el plano $(\varphi'_{\xi}, \varphi'_{\eta})$ tal que forme el ángulo α_i con la dirección \mathbf{q}^i ($\mathbf{q}^i \cdot \mathbf{t}_1^i = \cos \alpha_i$ y $\mathbf{q}^i \cdot \mathbf{t}_2^i = \sin \alpha_i$)

c- En los elementos adyacentes el gradiente se requerirá en el centro de cada lado común con el elemento principal. Utilizando el mismo criterio pero ahora la referencia es el sistema local $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i)$ en dicho lado dentro del elemento y la intersección entre ambos planos es el lado común \mathbf{q}^i .

3. EVALUACIÓN DE LAS CURVATURAS

La segunda forma fundamental (tensor de curvaturas) de la superficie puede escribirse como:

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\varphi'_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}^0 \quad (4)$$

Las curvaturas se asumen constantes en el elemento y sus valores se calculan como la integral promedio sobre el elemento

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{A^{(o)}} \int_{A^{(o)}} \varphi'_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}^0 dA^{(o)} \quad (5)$$

expresión que integrada por partes resulta (\mathbf{t}^0 es constante a los fines de la integral)

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{A^{(o)}} \int_{\Gamma^{(o)}} n_{\beta} \varphi'_{\alpha} d\Gamma^{(o)} \cdot \mathbf{t}^0 \quad (6)$$

donde Γ es el contorno del elemento con normal saliente \mathbf{n} . La expresión desarrollada para las tres componentes del tensor de curvatura es

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^{(o)}} \int_{\Gamma^{(o)}} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'_{r1} \cdot \mathbf{t}^0 \\ \varphi'_{r2} \cdot \mathbf{t}^0 \end{bmatrix} d\Gamma^{(o)} \quad (7)$$

La integral sobre el contorno se evalúa numéricamente con un punto de integración a la mitad de cada lado

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^{(o)}} \sum_{k=1}^4 l_k \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varphi'_{r1} \cdot \mathbf{t}^0 \\ \varphi'_{r2} \cdot \mathbf{t}^0 \end{bmatrix}_k \quad (8)$$

donde el subíndice $k = 1, 4$ (ver Figura 1) corresponde a cada uno de los puntos de integración utilizados a la mitad de cada lado y l_k es la longitud del lado. La continuidad del gradiente (normal) entre elementos φ'_{α} se establece en forma discreta a la mitad de cada lado, para ello

en tales puntos el gradiente se define como el promedio entre el gradiente evaluado con la geometría del elemento principal M y el evaluado con la geometría del elemento adyacente al lado K .

La expresión de la curvatura resulta entonces

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2A^{(o)}} \sum_{k=1}^4 l_k \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} (\varphi'_{i_1}^M + \varphi'_{i_1}^K) \cdot \mathbf{t}^0 \\ (\varphi'_{i_2}^M + \varphi'_{i_2}^K) \cdot \mathbf{t}^0 \end{bmatrix}_k \quad (9)$$

Cada curvatura puede escribirse también como

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}^0 \quad (10)$$

donde

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{2A^{(o)}} \sum_{k=1}^4 l_k [n_\alpha (\varphi'_{i_\beta}^M + \varphi'_{i_\beta}^K) + n_\beta (\varphi'_{i_\alpha}^M + \varphi'_{i_\alpha}^K)]_k \quad (11)$$

El cálculo de la curvatura utilizando el promedio de los gradientes en los lados permite observar conceptualmente que pueden existir configuraciones geométricas con una variación alternada de la curvatura (una senoide de semionda igual a la longitud del elemento) que conducen a un valor nulo de la curvatura promedio. Lo cual implica que puedan aparecer configuraciones deformadas sin energía asociada (modo de deformación espurio). Estrictamente este modo sólo puede aparecer en superficies planas, aunque puede ocurrir con baja energía en superficies curvas. Para mantener un sólo punto de integración en el elemento es necesario entonces realizar alguna estabilización de este modo flexional. Recientemente Flores y Oñate (2006) han desarrollado un elemento de viga/lámina bidimensional sin rotaciones que utiliza una aproximación lineal de la curvatura κ_s entre los dos nudos del elemento. Allí aparece el mismo problema si se utiliza un único punto de integración, lo cual ha sido salvado reescribiendo la curvatura como el valor obtenido en el punto de integración más una componente de estabilización. Esta última no es otra cosa que la diferencia entre las curvaturas evaluadas en los nudos.

En el elemento propuesto la evaluación de las curvaturas resulta de la expresión (10) en la cual puede descomponerse al vector $\mathbf{h}_{\alpha\beta}$ en dos partes

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{-1}{2A^{(o)}} \left[\sum_{k=1}^2 l_k (n_\alpha \varphi'_{i_\beta}^M)_k + \sum_{k=3}^4 l_k (n_\beta \varphi'_{i_\alpha}^K)_k \right] \quad (12)$$

$$2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{-1}{2A^{(o)}} \left[\sum_{k=1}^2 l_k (n_\beta \varphi'_{i_\alpha}^K)_k + \sum_{k=3}^4 l_k (n_\alpha \varphi'_{i_\beta}^M)_k \right] \quad (13)$$

Notar que en $2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)}$ involucra a una integral sobre todo el contorno, donde en los dos primeros lados se utilizan los gradientes evaluados en el elemento y en los otros dos lados el gradiente evaluado en los elementos adyacentes, e inversamente para el vector $2\mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)}$. De esta forma si el gradiente entre elementos fuera efectivamente continuo ambas componentes coincidirían. En base a ello se ha propuesto como técnica de estabilización penalizar a la diferencia entre ambas componentes

$$\mathbf{h}_{\alpha\beta}^S = \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(2)} - \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{(1)}$$

a través de un tensor de curvaturas de estabilización

$$\kappa_{\alpha\beta}^S = \mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \mathbf{t}^0 \quad (14)$$

El planteo de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio requiere la variación de las curvaturas, ésta resulta:

$$\delta \bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \delta \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{t}^0 + \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{t}^0 \quad (15)$$

La segunda contribución a la variación de la curvatura puede en general despreciarse, como se muestra en Flores y Oñate (2005) y Oñate y Flores (2005). El primer término requiere calcular

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{h}_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2A^{(o)}} \sum_{k=1}^4 l_k \left[n_\alpha (\delta \varphi_{i\beta}^M + \delta \varphi_{i\beta}^K) + n_\beta (\delta \varphi_{i\alpha}^M + \delta \varphi_{i\alpha}^K) \right]_k \\ &= \frac{-1}{2A} \sum_{k=1}^4 l_k \left\{ \sum_{I=1}^4 [n_\alpha N_{i\beta}^I + n_\beta N_{i\alpha}^I] \delta \mathbf{u}^I + \sum_{J=1}^4 [n_\alpha N_{i\beta}^{J(K)} + n_\beta N_{i\alpha}^{J(K)}] \delta \mathbf{u}^{J(K)} \right\}_k \end{aligned} \quad (16)$$

donde $N^{J(K)}$ es la función de forma del nudo local J en el elemento adyacente K (análogamente para $\delta \mathbf{u}^{J(K)}$). De donde la variación de las curvaturas puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta \bar{\kappa}_{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2A} \sum_{k=1}^4 l_k \left\{ \sum_{I=1}^4 [n_\alpha N_{i\beta}^I + n_\beta N_{i\alpha}^I] \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{t}^0 + \sum_{J=1}^4 [n_\alpha N_{i\beta}^{J(K)} + n_\beta N_{i\alpha}^{J(K)}] \delta \mathbf{u}^{J(K)} \cdot \mathbf{t}^0 \right\}_k \\ &= \mathbf{B}_f \delta \mathbf{u}^p \end{aligned} \quad (17)$$

donde $\delta \mathbf{u}^p$ agrupa a las variaciones de los desplazamientos de los nudos de toda la parcela (12 nudos y 36 grados de libertad).

Para la estabilización flexional, de la misma forma en que se dividen los vectores $\mathbf{h}_{\alpha\beta}$ puede dividirse la matriz \mathbf{B}_f , $\mathbf{B}_f = \mathbf{B}_f^{(1)} + \mathbf{B}_f^{(2)}$ lo cual permite definir la matriz de estabilización $\mathbf{B}_f^S = \mathbf{B}_f^{(2)} - \mathbf{B}_f^{(1)}$ lo que muestra que el esfuerzo numérico para la estabilización no será significativo.

4. CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno pueden clasificarse en:

- a) relativas al desplazamiento de la superficie media, que al ser los grados de libertad del elemento no ofrecen dificultades.
- b) relativas a la rotación de la normal, que a su vez pueden clasificarse en dos tipos:
 - natural: simplemente apoyado o libre.
 - esencial: empotramiento o plano de simetría

Sobre un elemento pueden aplicarse condiciones de contorno relativas al desplazamiento en cualquier punto de la malla, sean naturales (fuerzas) o esenciales (desplazamientos prescritos). Condiciones de contorno referidas a la normal sólo son admisibles en elementos sobre el contorno del dominio, es decir en aquellos elementos en que sobre uno de sus lados no existe el elemento adyacente. El tratamiento de tales bordes puede hacerse en base a lo siguiente:

a) borde simplemente apoyado o libre: suponer que $\varphi_{,n} = \varphi_{,n}^M$, con lo que

$$\begin{bmatrix} \varphi_{,1}^M + \varphi_{,1}^K \\ \varphi_{,2}^M + \varphi_{,2}^K \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 2\varphi_{,1}^M \\ 2\varphi_{,2}^M \end{bmatrix}_k \quad (18)$$

b) borde empotrado o condición de simetría: suponer que $\varphi_{,n} = \lambda_n \varphi_{,n}^{M(o)}$, donde (o) indica evaluado en la configuración original (invariante durante el proceso de deformación) y λ_n es el estiramiento de la superficie media de la lámina en la dirección normal al lado. Este último factor se introduce a los fines de considerar el estiramiento de la superficie media.

En este último caso la contribución del gradiente en el lado (k) a los vectores \mathbf{h}_{ij} puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{22} \\ 2\mathbf{h}_{12} \end{bmatrix}_k = \frac{-1}{2A} l_k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 2\lambda_n \varphi_{,n}^{M(o)} \\ 2\varphi_{,s}^M \end{bmatrix}_k \quad (19)$$

la variación de esta componente resulta

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} \\ \mathbf{h}_{22} \\ 2\mathbf{h}_{12} \end{bmatrix}_k = \frac{-1}{2A} l_k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 2 \delta \lambda_n \varphi_{,n}^{M(o)} \\ 2\delta \varphi_{,s}^M \end{bmatrix}_k \quad (20)$$

donde por un lado

$$2\delta \varphi_{,s}^M = \frac{2}{l_k} (\delta \mathbf{u}^{K+1} - \delta \mathbf{u}^K) \quad (21)$$

y por otro, siendo

$$\lambda_n = (\varphi_{,n}^M \cdot \varphi_{,n}^M)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 2 \delta \lambda_n \varphi_{,n}^{M(o)} &= \frac{2}{\lambda_n} (\varphi_{,n}^M \cdot \delta \varphi_{,n}^M) \varphi_{,n}^{M(o)} \\ &= 2 \left(\varphi_{,n}^{M(o)} \otimes \frac{\varphi_{,n}^M}{\lambda_n} \right) \delta \varphi_{,n}^M \\ &= 2 \left(\varphi_{,n}^{M(o)} \otimes \frac{\varphi_{,n}^M}{\lambda_n} \right) \sum_{I=1}^4 N_{,n}^I \delta \mathbf{u}^I \end{aligned} \quad (23)$$

Recordar que estas contribuciones son luego proyectadas sobre la dirección \mathbf{t}^0 , y notar que $\varphi_{,n}^{M(o)} \cdot \mathbf{t}^0$ es el seno del ángulo rotado por la normal al elemento alrededor del lado empotrado.

5. EVALUACIÓN DE LOS ESFUERZOS MEMBRANALES

A los fines de obtener un elemento eficiente para el análisis explícito se utiliza un único punto de integración en el centro del elemento. Para evitar la aparición de modos espurios de deformación (“hourglass”) es necesario incluir fuerzas artificiales. Los esquemas de estabilización habituales parten de una única evaluación del gradiente de deformaciones en el centro del elemento, ver Belytschko et al. (1992) y Belytschko y Leviathan (1994a,b). Las características especiales del elemento de lámina desarrollado requieren la evaluación del gradiente en la mitad de cada lado a los fines de calcular la curvatura. Resulta ventajoso entonces usar esta

información para desarrollar el esquema de estabilización. Utilizando el gradiente de la deformación evaluado a la mitad de cada lado (K) en la superficie media en la configuración original se tiene las componentes en el plano del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C}

$$a_{\alpha\beta}^K = \varphi'_{\alpha}^K \cdot \varphi'_{\beta}^K \quad (24)$$

Se propone definir el tensor métrico, a utilizar en el punto de integración en el centro del elemento, como un promedio ponderado de los tensores métricos sobre cada lado

$$a_{a\beta}^0 = \frac{1}{A} \sum_{K=1}^4 J_K a_{\alpha\beta}^K \quad \sum_{K=1}^4 J_K = A \quad (25)$$

donde J_K es el determinante jacobiano de la transformación isoparamétrica en la geometría original. Esta aproximación promedio de la primera forma fundamental sobre el elemento puede interpretarse como una aproximación en deformaciones impuestas. Las deformaciones de Green-Lagrange para la superficie media en el centro del elemento pueden escribirse

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{A^{(o)}} \sum_{K=1}^4 J_K [a_{\alpha\beta}^K - a_{\alpha\beta}^{K(o)}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{A^{(o)}} \sum_{K=1}^4 J_K [a_{\alpha\beta}^K - \delta_{\alpha\beta}] \\ &= \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}^0 - \delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (26)$$

En tanto que la variación de las deformaciones, necesarias para el planteo de la forma débil de las condiciones de equilibrio, es:

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{A^{(o)}} \sum_{K=1}^4 J_K (N'_{\alpha}^{IK} \cdot \varphi'_{\beta}^{IK} + N'_{\beta}^{IK} \cdot \varphi'_{\alpha}^{IK}) \delta\mathbf{u}^I \quad (27)$$

En forma explícita

$$\delta \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}^0 = \frac{1}{A^{(o)}} \sum_{K=1}^4 \sum_{I=1}^4 \begin{bmatrix} N'_{r_1}^I & 0 \\ 0 & N'_{r_2}^I \\ N'_{r_2}^I & N'_{r_1}^I \end{bmatrix}^K J_K [\varphi'_{r_1}^K \cdot \delta\mathbf{u}^I, \varphi'_{r_2}^K \cdot \delta\mathbf{u}^I] \quad (28)$$

$$= \sum_{K=1}^4 \mathbf{B}_m^K \delta\mathbf{u}^e = \mathbf{B}_m^0 \delta\mathbf{u}^e \quad (29)$$

donde \mathbf{B}_m^K relaciona la variación de las deformaciones de Green-Lagrange evaluada en el punto K y permite calcular la matriz \mathbf{B}_m^0 correspondiente a la aproximación en deformaciones impuestas que relaciona deformaciones virtuales con desplazamientos virtuales. El vector $\delta\mathbf{u}^e$ agrupa ahora sólo a los cuatro nudos del elemento.

A los efectos de controlar la aparición de los modos espurios de deformación (*hourglass*), se definen correspondientes deformaciones de Green-Lagrange como la diferencia entre el tensor métrico calculado a la mitad de cada lado y el promedio

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{KH} = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}^{KH} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}^K - a_{\alpha\beta}^0) \quad (30)$$

Nótese además que:

$$\frac{1}{2} \sum_{K=1}^4 J_K a_{\alpha\beta}^{KH} = \sum_{K=1}^4 J_K \varepsilon_{\alpha\beta}^{KH} = 0 \quad (31)$$

La variación de estas deformaciones resultan

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{KH} = (N'_{\alpha}{}^{IK} \cdot \varphi'_{\beta}{}^{IK} + N'_{\beta}{}^{IK} \cdot \varphi'_{\alpha}{}^{IK}) \delta \mathbf{u}^I - \frac{1}{A^{(o)}} \sum_{K=1}^4 J_K (N'_{\alpha}{}^{IK} \cdot \varphi'_{\beta}{}^{IK} + N'_{\beta}{}^{IK} \cdot \varphi'_{\alpha}{}^{IK}) \delta \mathbf{u}^I \quad (32)$$

$$= \mathbf{B}_m^{KH} \delta \mathbf{u}^e = [\mathbf{B}_m^K - \mathbf{B}_m^0] \delta \mathbf{u}^e \quad (33)$$

donde puede observarse que \mathbf{B}_m^{KH} resulta la diferencia $\mathbf{B}_m^K - \mathbf{B}_m^0$.

6. EVALUACIÓN DE FUERZAS RESIDUALES

Las fuerzas residuales resultan de la expresión del trabajo virtual interno

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{V^{(o)}} \frac{1}{2} \delta \mathbf{C} : \mathbf{S} dV^{(o)} \quad (34)$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor \mathbf{C} puede aproximarse para puntos fuera de la superficie media como (ζ es la distancia a la superficie media):

$$\mathbf{C}_{\zeta} = \mathbf{C}^0 + 2\zeta \boldsymbol{\kappa} = a_{\alpha\beta}^0 + 2\zeta \kappa_{\alpha\beta} \quad (35)$$

Definiendo los esfuerzos integrados en el espesor

$$\mathbf{N} = \int_{h^{(o)}} \mathbf{S} d\zeta \quad \mathbf{M} = \int_{h^{(o)}} \mathbf{S} \zeta d\zeta \quad (36)$$

la expresión anterior se simplifica a

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{A^{(o)}} (\delta \mathbf{E}^T \mathbf{N} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}) dA^{(o)} \quad (37)$$

donde \mathbf{E} son las deformaciones de Green-Lagrange sobre la superficie media y $\boldsymbol{\chi}$ son los cambios de curvatura.

Las fuerzas de estabilización membranal pueden obtenerse de definir una energía interna de deformación en función del tensor de Green-Lagrange. Si se utiliza un material de Kirchhoff se tiene

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^4 J_K \left[E_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}^{KH} \right] C_{\alpha\beta\delta\gamma} \left[E_{\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} a_{\delta\gamma}^{KH} \right] \\ &= \frac{1}{2} E_{\alpha\beta}^0 C_{\alpha\beta\delta\gamma} E_{\delta\gamma}^0 A + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta}^0 C_{\alpha\beta\delta\gamma} \sum_{K=1}^4 J_K a_{\delta\gamma}^{KH} + \frac{1}{8} \sum_{K=1}^4 J_K a_{\alpha\beta}^{KH} C_{\alpha\beta\delta\gamma} a_{\delta\gamma}^{KH} \end{aligned} \quad (38)$$

donde el primer término es la energía asociada al único punto de integración, el segundo término se anula (31) y el último término corresponde a la energía de deformación de estabilización W^H .

Planteada en función del tensor de elasticidad de cuarto orden (incluye al espesor h), el esquema corresponde a una estabilización física. Las fuerzas de estabilización resultan

$$N_{\alpha\beta}^{HK} = 2 \frac{\partial W^H}{\partial a_{\alpha\beta}^{HK}} = J_K C_{\alpha\beta\delta\gamma} \frac{a_{\delta\gamma}^{HK}}{2} \quad (39)$$

notar que al haber impuesto $\sum J_K a_{\alpha\beta}^{KH} = 0$, entonces en todos los casos $\sum N_{\alpha\beta}^{KH} = 0$.

En tanto que las fuerzas nodales equivalentes resultan de la suma

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}^H = \sum_{K=1}^4 \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta}^{HK} N_{\alpha\beta}^{HK} \quad (40)$$

$$= \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{K=1}^4 (\mathbf{B}_m^K - \mathbf{B}_m^0)^T N_{\alpha\beta}^{HK} \quad (41)$$

Notando además que $\sum N_{\alpha\beta}^{KH} = 0$, las fuerzas nodales debidas a la estabilización membranal resultan finalmente

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}^H = \delta \mathbf{u}^{eT} \sum_{K=1}^4 (\mathbf{B}_m^K)^T \mathbf{N}^{KH} \quad (42)$$

Para la estabilización flexional, se pueden definir momentos estabilizantes como

$$M_{\alpha\beta}^S = C_s \frac{Eh^3}{12} (\kappa_{\alpha\beta}^S - {}^o\kappa_{\alpha\beta}^S) \quad (43)$$

con E el módulo de Young del material, h el espesor de la lámina y C_s un coeficiente mucho menor que 1 (en las evaluaciones numéricas se utiliza 0.01). Las fuerzas equivalentes asociadas resultan

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{pT} \mathbf{r}^S &= \frac{A}{3} \delta \kappa_{\alpha\beta}^S M_{\alpha\beta}^S \\ &= \frac{A}{3} \delta \mathbf{h}_{\alpha\beta}^S \cdot \mathbf{t}^0 M_{\alpha\beta}^S \\ &= \frac{A}{3} \delta \left(\mathbf{h}_{ij}^{(2)} - \mathbf{h}_{ij}^{(1)} \right) \cdot \mathbf{t}^0 M_{\alpha\beta}^S \end{aligned} \quad (44)$$

donde el factor $1/3$ proviene de suponer una variación lineal de la curvatura normal estabilizante (nula en el centro del elemento).

7. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

La matriz tangente \mathbf{K} se obtiene de

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{N} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}) \Delta \mathbf{u} dA \quad (45)$$

Como es habitual expresaremos a la matriz \mathbf{K} como la suma de dos partes, material y geométrica.

7.1. Parte Material

La parte material correspondiente al único punto de integración, depende de la relación constitutiva, en particular del módulo tangente algorítmico \mathbf{C}_{EP} y en forma estandar se escribe

$$\mathbf{K}_M = [\mathbf{B}_m^{0T}, \mathbf{B}_f^T] \mathbf{C}_{EP} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^0 \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} A$$

La componente de la matriz de rigidez material debida a estabilización membranal es

$$\mathbf{K}_m^{MH} = \sum_{K=1}^4 J_k (\mathbf{B}_m^{KH})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^{KH} \quad (46)$$

donde la matriz \mathbf{C} es la habitual de elasticidad (estabilización física).escalada por un coeficiente α_m .

En tanto que la matriz de rigidez material asociada a la estabilización flexional resulta sencillamente como

$$\mathbf{K}_f^{MS} = C_s \frac{A E h^3}{3 \cdot 12} (\mathbf{B}_f^S)^T \mathbf{B}_f^S \quad (47)$$

7.2. Parte Geométrica

La matriz de rigidez geométrica resulta de

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}^G \Delta \mathbf{u} = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{N} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \boldsymbol{\chi})^T \mathbf{M} \right) \Delta \mathbf{u} dA \quad (48)$$

De la contribución membranal hay que considerar dos partes, la contribución proveniente de la integración en el centro del elemento y la debida a la estabilización membranal. La contribución en el centro del elemento se expresa como

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^G \Delta \mathbf{u} &= \int_A \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{N} \Delta \mathbf{u} dA \\ &= h^{(o)} \sum_{K=1}^4 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 [J_K (N_{,1}^I N_{,1}^J)^K N_{11}^0 + J_K (N_{,2}^I N_{,2}^J)^K N_{22}^0 \\ &\quad + J_K (N_{,1}^I N_{,2}^J + N_{,2}^I N_{,1}^J)^K N_{12}^0] \delta \mathbf{u}^J \Delta \mathbf{u}^I \\ &= h^{(o)} \sum_{K=1}^4 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \delta \mathbf{u}^I J_K [N_{,1}^J, N_{,2}^J]^K \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12} & N_{22} \end{bmatrix}^0 \begin{bmatrix} N_{,1}^J \\ N_{,2}^J \end{bmatrix}^K \Delta \mathbf{u}^J \end{aligned} \quad (49)$$

donde las N_{IJ} son los esfuerzos integrados en el espesor en el centro del elemento.

La contribución a la parte geométrica de la estabilización membranal se expresa como

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_m^{GH} \Delta \mathbf{u} = \sum_{K=1}^4 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \delta \mathbf{u}^I [N_{,1}^J, N_{,2}^J]^K \begin{bmatrix} N_{11}^{KH} & N_{12}^{KH} \\ N_{21}^{KH} & N_{22}^{KH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,1}^J \\ N_{,2}^J \end{bmatrix}^K \Delta \mathbf{u}^J \quad (50)$$

La contribución a la rigidez geométrica de la parte flexional puede obtenerse en forma similar a las expresiones formuladas sobre un elemento triangular como se muestra en Flores y Oñate (2001), sin embargo, experimentos numéricos muestran que la contribución de la parte geométrica flexional no tiene importancia y por ende no se la considera en la formulación propuesta.

8. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan una importante cantidad de experimentos numéricos a los fines de evaluar el comportamiento del elemento propuesto al que se denomina BSQ (de su acrónimo en inglés *Basic Shell Quadrilateral*). Los resultados se comparan principalmente con el otro elemento cuadrilátero desarrollado por Brunet y Sabourin (2006) denominado S4 y con el elemento S4R presente en el código comercial ABAQUS (2003).

8.1. Ejemplos Lineales

8.1.1. Prueba de la parcela

Para el comportamiento a flexión, la formulación no permite momentos como cargas nodales (el elemento tiene únicamente grados de libertad traslacional) por lo tanto no es posible fijar un estado de carga que conduzca a un estado de momentos flectores constantes sobre toda la parcela. Sí es posible establecer un estado de carga asociado a un momento torsor constante. Dicho estado se impone a través de una carga puntual aplicada en la esquina de un rectángulo con el resto de las esquinas simplemente apoyadas. La Figura 2 muestra dos tipos de mallas estructuradas posibles, una regular y la otra irregular. Con mallas regulares el elemento pasa la prueba de la parcela, pero no estrictamente para los casos de mallas irregulares, aunque los resultados numéricos convergen rápidamente a la solución correcta. Esto puede apreciarse en la Tabla 1 donde se muestran los desplazamientos verticales normalizados correspondientes al punto de aplicación de la carga. Se comparan los resultados con los obtenidos en Brunet y Sabourin (2006) para ambos tipos de mallas e igual cantidad de grados de libertad. Las diferencias entre una formulación y la otra no es significativa a la luz de este ejemplo.

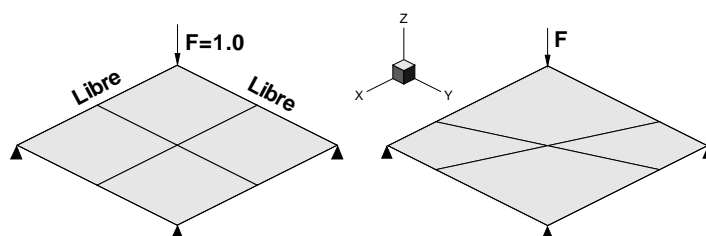


Figura 2: Mallas de elementos finitos para la prueba de la parcela a torsión uniforme.

NGL	Mallas regulares		Mallas irregulares	
	BSQ	S4	BSQ	S4
4	1.0000	1.0000	0.9588	1.0650
16	1.0000	1.0000	0.9809	0.9945
64	1.0000	1.0000	0.9907	0.9969
256	1.0000	1.0000	0.9957	0.9990

Tabla 1: Desplazamientos normalizados obtenidos en la prueba de la parcela.

8.1.2. Placas cuadradas

En este caso se considera el análisis de placas cuadradas bajo carga uniforme y bajo una carga puntual en el centro con condiciones de borde empotrado y simplemente apoyado. El

objetivo es estudiar la convergencia de la parte flexional. En todos los casos se discretiza sólo un cuarto de placa por simetría y se usan mallas estructuradas regulares.

En la Tabla 2 se muestran los valores normalizados de los desplazamientos verticales del punto central de la placa para las distintas condiciones de bordes y de carga. En el caso de bordes empotrados se ha observado que se activa un modo espurio de flexión, obligando a usar un coeficiente de estabilización flexional. Para el caso de la carga puntual con bordes empotrados se incluyen resultados obtenidos con diferentes valores de α_s con una relación de 5 entre ellos. Allí puede observarse la baja sensibilidad de los desplazamientos medidos con respecto a α_s .

NGL	Carga uniforme		Carga puntual			
	s.s	Empotrado	s.s	Empotrado		
	$\alpha_s = 0,05$	$\alpha_s = 0,05$	$\alpha_s = 0,05$	$\alpha_s = 0,25$	$\alpha_s = 0,05$	$\alpha_s = 0,01$
4	1.1389	2.3379	1.8233	2.5768	2.8820	2.9582
16	1.0408	1.4570	1.2995	1.5315	1.7014	1.7656
64	1.0110	1.1253	1.0897	1.1585	1.2134	1.2469
256	1.0032	1.0318	1.0255	1.0467	1.0608	1.0723
1024	1.0012	1.0105	1.0072	1.0147	1.0182	1.0211

Tabla 2: Desplazamientos normalizados obtenidos para una placa bajo carga uniforme y bajo carga puntual.

Los resultados muestran una convergencia satisfactoria. Nótese por ejemplo que para el caso de placa bajo carga uniforme, simplemente apoyada, para un NGL de 64 el error es del orden del 1, 10 % el cual es aceptable si se tiene en cuenta que los elementos poseen únicamente GDL traslacional (la tercera parte o menos de los GDL de un elemento estándar) y se está usando un solo punto de integración.

8.1.3. Placa rómbica

Este ejemplo se utiliza habitualmente para observar el comportamiento del elemento al distorsionar su forma. Una placa rómbica con dos de sus extremos simplemente apoyados y los restantes libres es sometida a una carga uniforme q . La placa tiene todos sus lados de igual longitud l y una inclinación de 60° medido desde el eje horizontal. La Tabla 3 muestra el desplazamiento vertical del punto central de la placa. Los resultados se comparan con los obtenidos por Brunet y Sabourin (2006) y se han normalizado respecto a la solución teórica obtenida por Razzaque (1973) $w = 0,007945ql^4/D$ donde D es la rigidez flexional de la placa. El elemento BSQ presenta buena convergencia y los resultados son insensibles a la magnitud del coeficientes de estabilización flexional α_s .

8.1.4. Viga Torsionada a 90°

En este caso se analiza una viga empotrada torsionada a 90° bajo una carga puntual aplicada en el extremo libre. Este ejemplo se utiliza frecuentemente para evaluar la correcta integración en el espesor de elementos basados en la aproximación de "sólido degenerado". Se consideran dos casos, uno con la carga normal a la viga y otro con la carga aplicada en el plano de la misma. En la Figura 3 se muestra la geometría de la viga y una malla de 48×8 elementos. En la Tabla 4 se muestran los valores normalizados de los desplazamientos normal y saliente al plano del

NGL	Punto central	
	BSQ	S4
4	2.0559	2.1498
16	1.1851	1.2029
64	1.0248	1.0306
256	0.9987	1.0008
1024	0.9946	0.9960

Tabla 3: Desplazamientos verticales del punto central obtenidos para una placa rómbica bajo carga uniforme.

punto de aplicación de la carga según la dirección de la fuerza. Se comparan con los resultados obtenidos con el elemento S4R de [ABAQUS \(2003\)](#) y también con los resultados obtenidos por [Brunet y Sabourin \(2006\)](#). Se han analizados dos mallas una gruesa de 12×2 y una fina de 48×8 elementos. La longitud de la viga es de 12,0, el ancho 1,1 y el espesor 0,32, en tanto que el módulo elástico $2,9 \times 10^7$ y relación de Poisson 0,22. Los valores están normalizados respecto a la solución analítica de $1,754 \times 10^{-3}$ para el desplazamiento fuera del plano y $5,424 \times 10^{-3}$ para el desplazamiento en el plano.

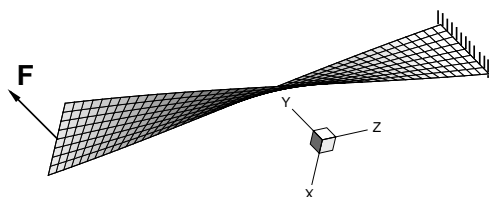


Figura 3: Viga Torsionada a 90° . Malla de 48×8 elementos.

Malla	Normal al plano			En el plano		
	BSQ	S4R	S4	BSQ	S4R	S4
12x2	1.0661	0.9918	0.9742	1.0088	1.0029	1.1661
48x8	0.9889	0.9991	1.0551	0.9947	0.9986	0.9453

Tabla 4: Resultados para la viga torsionada. Desplazamientos normalizados.

Nótese que el error para la malla de 48×8 elementos es del orden del 1,0% para ambas direcciones de la carga. Además si se compara con un elemento como el S4R donde se tiene el doble de NGL por nudo que el elemento propuesto, los resultados son satisfactorios. La influencia de los coeficientes de estabilización membranal y flexional es muy baja y los resultados reportados no se alteran ante cambios en las magnitudes de tales coeficientes. Si se compara los resultados obtenidos con el BSQ y los obtenidos con el S4 las diferencias son significativas. Por ejemplo, para la malla de 48×8 el error de la solución obtenida con el elemento S4 es del orden del 5,0% que es un orden de magnitud mayor al obtenido con el elemento BSQ.

8.1.5. Techo cilíndrico

En la Figura 4 se muestra la geometría de este ejemplo ampliamente utilizado para evaluar elementos de lámina debido al complejo estado membranal resultante. El techo cilíndrico, de

espesor $h = 3,0$ cargado por su peso propio $w = 0,625$ por unidad de área, está soportado por dos diafragmas rígidos en sus extremos. Unicamente un cuarto del techo se modela debido a la simetría. Se utiliza un módulo de Young $E = 3 \cdot 10^6$ un coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$. En la Tabla 5 se indican los desplazamientos verticales normalizados para los puntos A y B ubicados según muestra la Figura 4, allí se incluyen también los valores obtenidos con elementos triangulares sin rotaciones denominados BST y EBST, ambos elementos desarrollados por Flores y Oñate (2001) y Flores y Oñate (2005) respectivamente. Los valores exactos usados para normalizar los resultados son $u_A = 0,5407$ y $u_B = -3,610$ los cuales fueron tomados de Huang (1989).

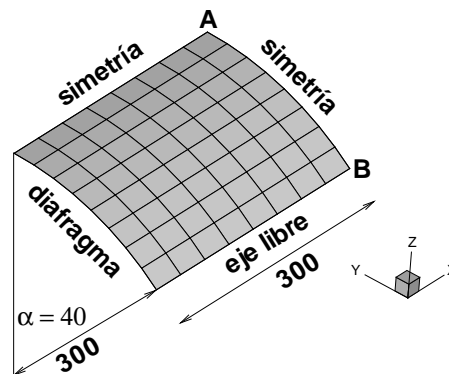


Figura 4: Techo cilíndrico bajo peso propio.

NGL	Punto-A			Punto-B		
	BSQ	BST	EBST	BSQ	BST	EBST
16	3.5635	0.57289	0.87886	1.9947	1.12504	0.78117
56	1.3350	0.67824	1.06850	1.1919	0.71914	0.97345
208	1.0809	0.86751	1.04315	1.0329	0.87318	1.01205
800	1.0244	0.96074	1.01293	0.9960	0.96129	1.00409
3136	1.0105	0.98992	1.00361	0.9870	0.98920	1.00060

Tabla 5: Techo cilíndrico bajo peso propio. Desplazamientos normalizados.

Los resultados muestran una convergencia satisfactoria y el error obtenido es ingenierilmente aceptable para un NGL de 800. Si se compara con los resultados obtenidos con el elementos triangular sin rotaciones que membranalmente es de deformación constante (BST) para la misma cantidad de NGL el error obtenido con el BSQ es menor. Así con el BSQ se obtienen errores del 2,4 % para el punto A y del 0,4 % para el punto B, en tanto que para el elemento BST se obtiene un error de 3,9 %. A la luz de estos resultados el elemento BSQ es satisfactorio. Nuevamente en este ejemplo la influencia de los coeficientes de estabilización es muy baja (se ha utilizado $\alpha_m = 0,05$ y $\alpha_s = 0,05$).

8.2. Ejemplos no lineales

8.2.1. Casquete esférico con cargas puntuales

Este ejemplo es utilizado para evaluar el comportamiento de los elementos de láminas con curvatura inicial ante posibles problemas de bloqueo menbranal. La geometría consiste en un

casquete esférico de radio $r = 10$ y un espesor $h = 0,04$ con un agujero de 18° en su polo cuyo borde se encuentra libre al igual que su borde inferior. Por simetría se modela un cuarto del casquete el cual está sometido a un par de fuerzas una entrante y la otra saliente. Las propiedades elástica del material son $E = 6,825 \times 10^7$ y $\nu = 0,3$. En la Figura 5a se muestra la geometría deformada y una malla de 256 elementos. Se muestra también la configuración deformada para un factor de carga $\lambda = 100$. En la Figura 5b se muestra el desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus el factor de carga (se ha utilizado $\alpha_m = 0,05$ y $\alpha_s = 0,05$), y se compara con distintos resultados obtenidos con el elemento S4 en Brunet y Sabourin (2006), con el elemento S4R de ABAQUS (2003) y los publicados en Simo et al. (1990) usando un cuadrilátero incluyendo deformaciones de corte transversal QUAD. Nótese el acuerdo que se logra con el elemento BSQ comparado con los valores de referencia. Es importante destacar que existe una marcada diferencia con el comportamiento no lineal que presentan algunos puntos obtenidos con el elemento propuesto por Brunet y Sabourin (2006) los cuales no se ajustan adecuadamente al comportamiento que se espera que tengan las trayectorias no lineales. En la Tabla 6 se muestra un análisis de la sensibilidad de los coeficientes de estabilización membranar α_m y flexional α_s . Los ejemplos indican que la sensibilidad es importante para mallas muy gruesas, pero que esta se reduce notoriamente al refinar la malla, de tal forma que para una malla razonable (16x16) para el tipo de problema la sensibilidad es baja.

Malla	$\alpha_m = 0,25$	$\alpha_m = 0,25$	$\alpha_m = 0,05$	$\alpha_m = 0,01$	$\alpha_m = 0,01$
	$\alpha_s = 0,25$	$\alpha_s = 0,01$	$\alpha_s = 0,05$	$\alpha_s = 0,25$	$\alpha_s = 0,01$
4 x 4 el.	-2.9681	-3.0069	-4.8146	-6.3735	-6.7421
	2.1575	2.1865	2.9970	3.4650	3.6365
8 x 8 el.	-4.9537	-5.0644	-6.0897	-6.3733	-6.6050
	3.0968	3.1492	3.5240	3.5670	3.6980
16 x 16 el.	-5.7909	-5.8464	-6.0352	-6.0462	-6.1044
	3.3913	3.4354	3.4828	3.4678	3.5106

Tabla 6: Casquete esférico sometido a cargas puntuales. Desplazamientos para $\lambda = 100$ usando diferentes valores de estabilización.

8.2.2. Inflado de una esfera

Este ejemplo ha sido presentado en Needleman (1977) donde se simula el inflado de una esfera sometida a presión interna. Sólo hay deformaciones membranar pero en grandes deformaciones, nuevamente la geometría inicial curva permite observar posibles problemas de bloqueo membranar. En esta simulación numérica se utilizan los datos de la geometría y de los parámetros del material de Cirak y Ortiz (2000). Se considera a la esfera con un material de Mooney-Rivlin con $\mu_1 = 40$, $\mu_2 = -20$. En la Figura 6a. se muestran tres mallas de elementos utilizadas para evaluar la convergencia y por simetría se considera un cuarto de la esfera. En la Figura 6b. se muestra la relación del radio versus la presión interna y se compara con la solución analítica

$$p = \frac{h^{(o)}}{R^{(o)}\gamma^2} \frac{dW}{d\gamma} = \frac{8h^{(o)}}{R^{(o)}\gamma^2} (\gamma^6 - 1) (\mu_1 - \mu_2\gamma^2)$$

Se puede ver que con pocos grados de libertad se obtienen resultados aceptables. El valor final (presión interna $p = 4$) corresponde a una relación de espesor radio de $h/R = 0,00024$.

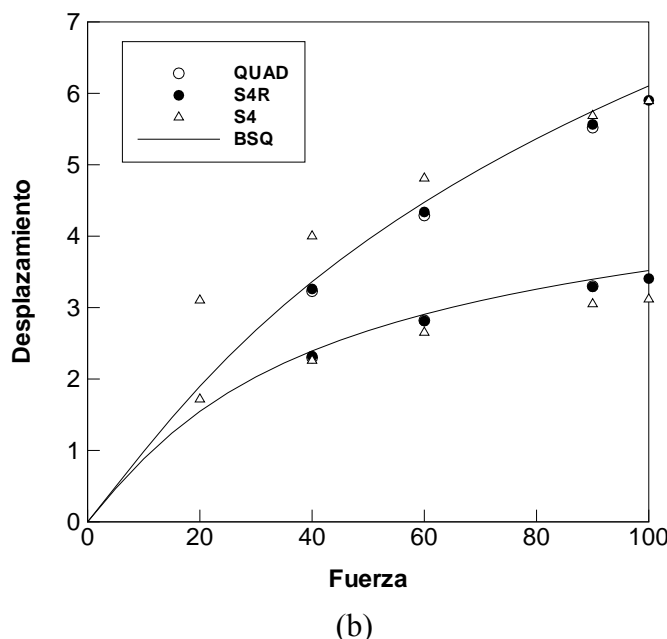
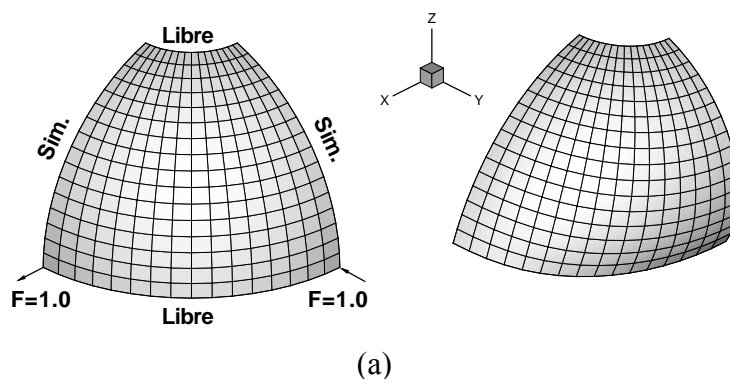


Figura 5: Casquete esférico. (a) Geometría y configuración deformada para $\lambda = 100$, (b) desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus el factor de carga λ .

8.2.3. Domo esférico

En este ejemplo se considera un domo esférico empotrado, sometido a una carga impulsiva. La carga es una presión uniforme de 600 psi y se aplica en la parte superior del domo. En este caso se trata de un problema dinámico transiente elasto-plástico con deformaciones pequeñas. Para el análisis se han utilizados tres mallas de 75, 147 y 243 elementos, en la Figura 7 se muestran las mismas. Se considera un cuarto del domo por simetría y se realizan separadamente un análisis elástico y un análisis elasto plástico. En la Figura 8 se muestra la evolución del desplazamiento vertical del punto central del domo en función del tiempo para el caso de material elástico. Los resultados se comparan con los resultados numéricos obtenidos con el elemento S4R usando una malla de 243 elementos. Puede notarse como se logra mejor acuerdo a medida que se refina la malla.

En la Figura 9 se muestra la evolución del punto central del domo correspondiente a un material elasto plástico. Nuevamente se comparan los resultados obtenidos con los valores numéricos de ABAQUS (2003). El acuerdo es muy bueno para la malla más fina. Recordar que el BSQ solo tiene tres GDL por nudo (la malla de 243 elementos tiene un NGL de 465), en contraste con un elemento de lámina estándar con seis grado de libertad por nudo por lo cual los resultados

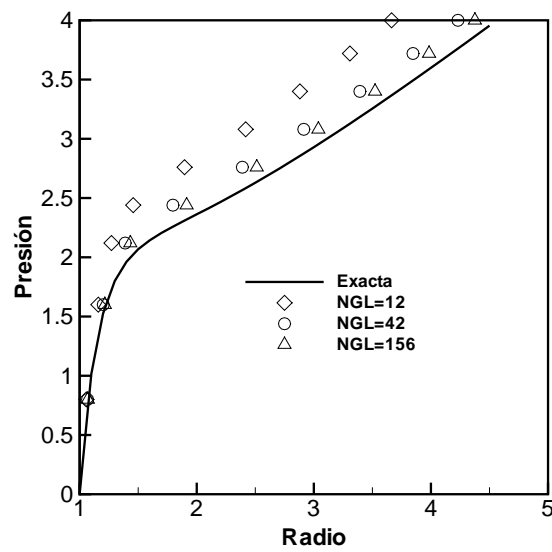
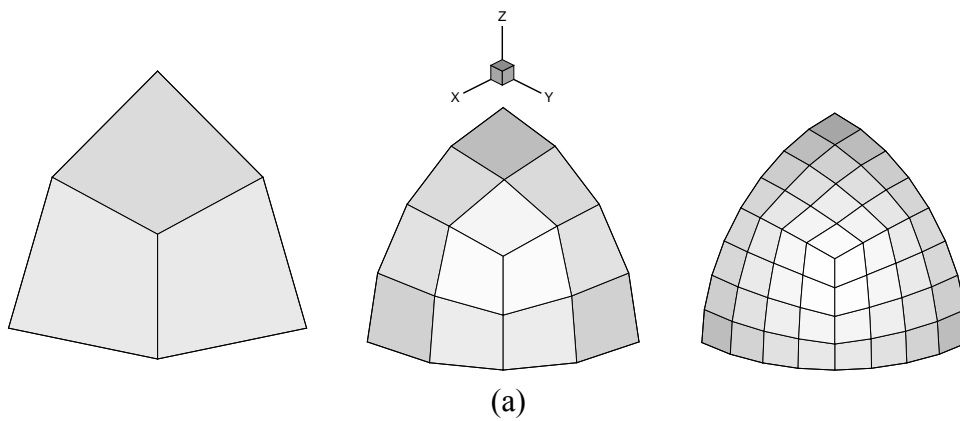


Figura 6: Inflado de una esfera con un material con constitutiva del tipo Mooney-Rivlin. (a) Malla de elementos usada en el análisis, (b) Radio en función de la presión interna de inflado.

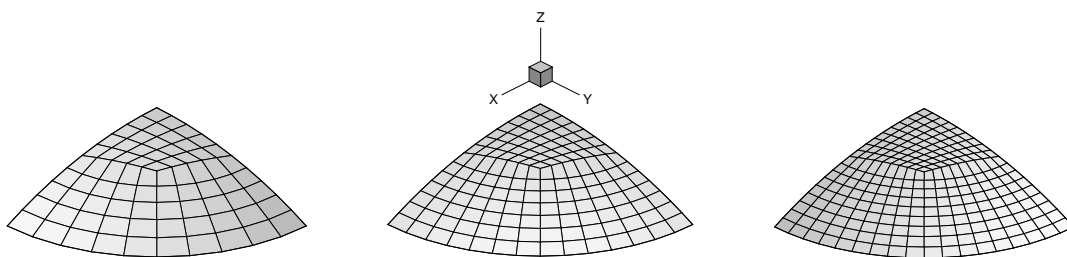


Figura 7: Domo esférico bajo presión impulsiva. Mallas usadas en el análisis: malla-1 con 75 elementos, malla-2 con 147 elementos y malla-3 con 243 elementos.

son satisfactorios. Los valores de los coeficientes de estabilización adoptados en este ejemplo corresponden a $\alpha_m = 0,05$ y $\alpha_s = 0,05$.

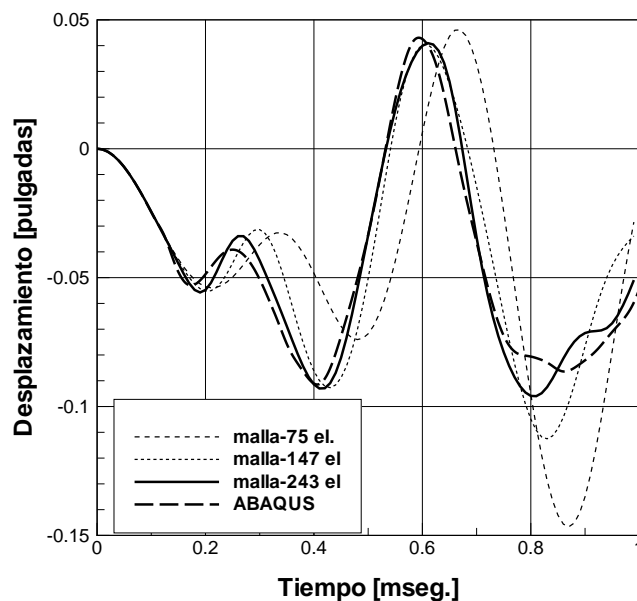


Figura 8: Domo esférico bajo presión impulsiva: historia de la deflexión central para un material elástico.

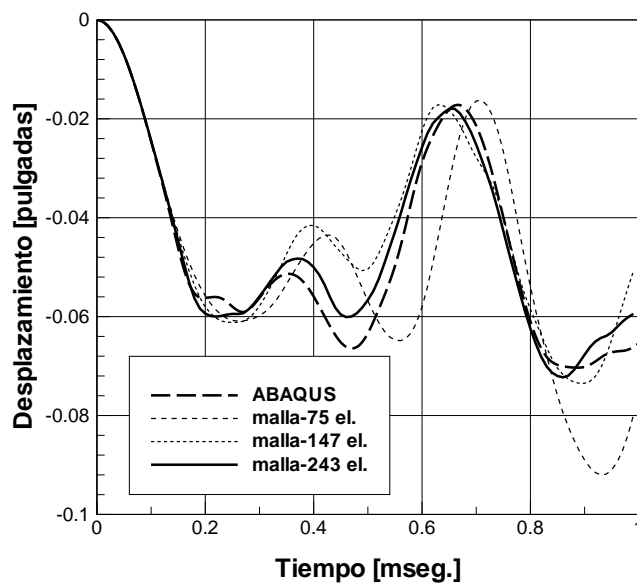


Figura 9: Domo esférico bajo presión impulsiva: historia de la deflexión central para un material elasto-plástico.

8.2.4. Panel cilíndrico

Este ejemplo es un panel cilíndrico sometido a una velocidad inicial de $v_o = -5650 \text{ in./s.}$ que simula el efecto de la detonación de un explosivo. El material se considera elasto plástico perfecto en régimen de grandes deformaciones. El panel se supone empotrado a lo largo de todos los bordes y por simetría se modela la mitad del cilindro. Se utilizan dos densidades de malla de 6×16 y 18×48 elementos. En la Figura 10 se muestra la configuración deformada para cada una de las mallas correspondientes al tiempo de 1 *mseg.*

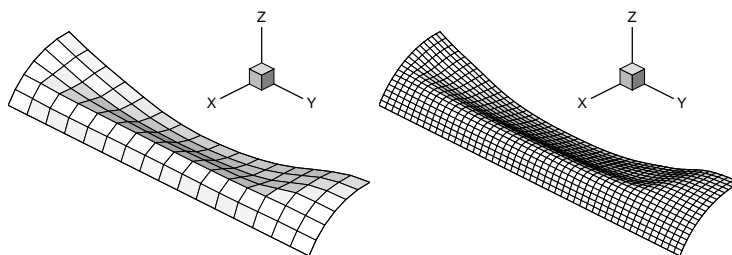


Figura 10: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Malla deformada para el tiempo $t = 1ms$.

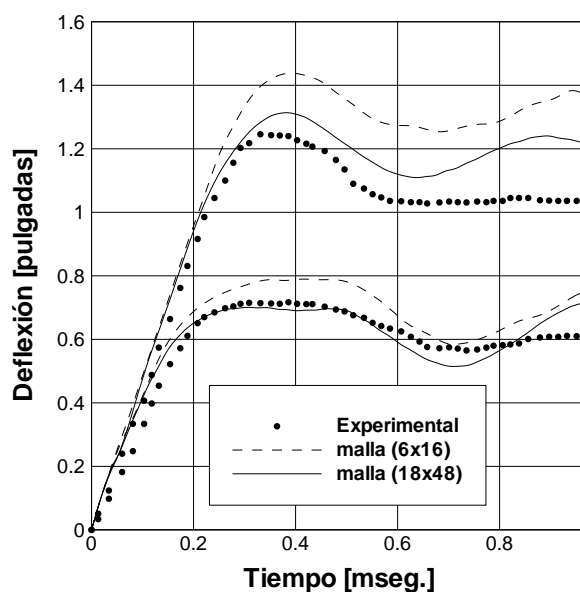


Figura 11: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Evolución del desplazamiento en el tiempo de dos puntos a lo largo de la línea desimetría. Se muestran resultados obtenidos con el elemento BSQ (malla-1:6x16 y malla-: 18x48) y valores experimentales.

En la Figura 11 se muestran las curvas de deflexión versus el tiempo de análisis para dos puntos del panel ubicado sobre el eje de simetría a la distancia de $y = 6,28in.$ e $y = 9,42in.$ respectivamente. En dicha figura se muestra la evolución de los desplazamientos correspondiente a las mallas de 6×16 y 18×48 elementos y se compara con datos experimentales. Nótese que para la malla fina se tiene un mejor acuerdo con los datos experimentales.

En la Tabla 7 se muestra el valor del desplazamiento vertical correspondiente al tiempo de análisis de $t = 0,4ms$ para las tres mallas adoptadas. Se comparan con la solución numérica obtenida por [Stolarski et al. \(1984\)](#) a través de un elemento de lámina triangular curvo y una malla de 16×32 y los resultados numéricos obtenidos por [Oñate y Flores \(2005\)](#) con un elemento triangular de lámina sin grado de libertad rotacional denominado EBST para una malla de 18×48 elementos. También se compara con resultados experimentales reportados en [Balmer y Witmer \(1964\)](#). Existe un buen acuerdo entre los valores obtenidos con el elemento BSQ y los datos experimentales sin embargo, resultados numéricos obtenidos con otros elementos muestran una mayor discrepancia con los datos experimentales.

Elemento/malla	$\alpha_m = 0,05$	$\alpha_s = 0,05$
	y = 6.28 in.	y = 9.42 in.
BSQ 6x16 el.	-1.437	-0.788
BSQ 18x48 el.	-1.309	-0.690
Stolarski et al.	-1.183	-0.530
E.Oñate y F. Flores	-1.171	-0.584
Experimental	-1.280	-0.700

Tabla 7: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. Desplazamientos verticales (in.)

8.2.5. Estampado de una lámina

Este último ejemplo corresponde al estampado de una lámina cuya forma final es la de un riel en forma de S. Este ejemplo fué propuesto en NUMISHEET'96 (1996). El análisis comprende dos partes, la primera es la simulación del estampado del riel S y la segunda simula el quitado de las herramientas y la recuperación elástica del riel S.

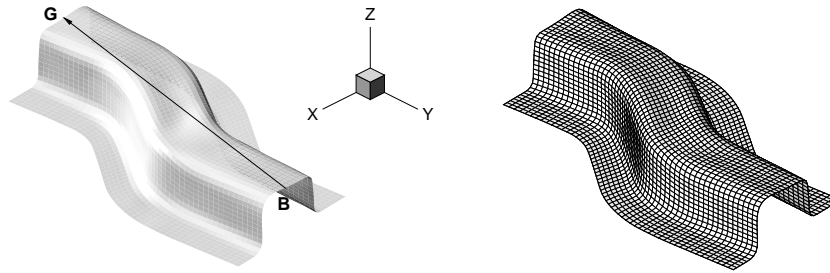


Figura 12: Estampado de un riel en forma de S. Deformación final de la lámina obtenida en la simulación. Se muestra también la malla de elementos cuadriláteros.

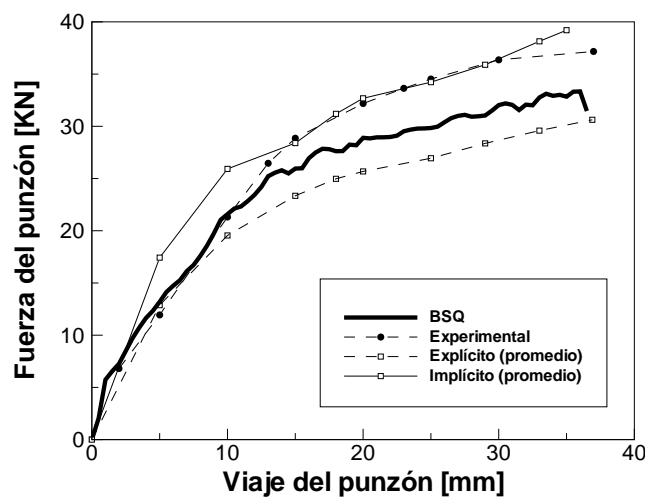


Figura 13: Estampado de un riel en forma de S: Fuerza del punzón versus el viaje del punzón.

En la Figura 12 se muestra la geometría final y la malla de elementos utilizada. La malla usada tiene 3000 elementos cuadriláteros y 3111 nudos. Las herramientas son tratadas como

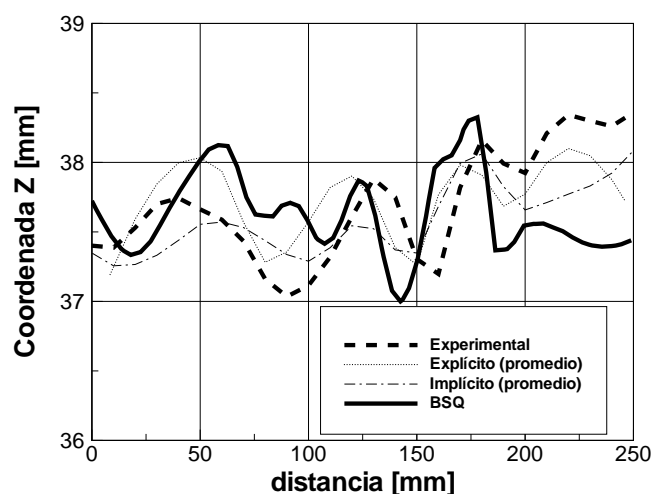


Figura 14: Estampado de un riel en forma de S: Coordenadas Z a lo largo de la línea B-G al final del estampado.

rígidas y los detalles geométricos y el material pueden ser encontrado en [NUMISHEET'96 \(1996\)](#). El material es acero dulce (IF) con módulo de Young $E = 2,06GPa$ y una relación de Poisson $\nu = 0,3$. Se utiliza el criterio de fluencia de Von Mises con endurecimiento isotrópico no lineal definido por $\sigma_y(e^p) = 545(0,13 + e^p)^{0,267} [MPa]$. Se define una fricción uniforme de 0,15 para todas las herramientas. Se considera en la simulación una fuerza del pisado de $10KN$.

En la Figura 13 se compara la fuerza del punzón durante el estampado obtenida por vía numérica con el elemento BSQ y los valores experimentales. En la Figura 14 se muestra la coordenada Z a lo largo de la línea B-G después de la recuperación elástica. Puede observarse que la superficie superior del riel no permanece plana sino que muestra ciertas arrugas. Se compara con resultados experimentales.

9. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento cuadrilátero de lámina sin grados de libertad rotacional denominado BSQ. El elemento tiene únicamente grados de libertad traslacional y utiliza un único punto de integración en la superficie, que lo hace simple y económico desde el punto computacional. El elemento está basado en una formulación Lagrangeana total.

La forma de calcular el campo de curvatura a partir del campo de desplazamiento puede permitir la existencia configuraciones geométricas con una variación alternada de la curvatura que implica un modo de deformación sin energía asociada. Esto requirió formular un mecanismo de estabilización flexional que elimine posibles configuraciones espúreas, para lo cual aquí se propuso estabilizar mediante la penalización de la semidiferencia del campo de curvaturas.

Como consecuencia de utilizar un solo punto de integración para evaluar el las deformaciones membranales pueden generarse los bien conocidos modos de *hourglass*. Se ha aprovechado la información utilizada para el calculo de las curvaturas para la formulación de la estabilización membranal, a partir del gradiente calculado en la mitad de cada lado se ha definido el tensor métrico en el centro del elemento y se han definido las componentes de estabilización. Esta aproximación promedio sobre el elemento puede interpretarse como una aproximación en deformaciones impuestas.

Se han obtenidos resultados muy satisfactorios en todos los ejemplos, incluyendo grandes

desplazamientos y grandes deformaciones usando formulaciones implícitas y explícitas. El elemento ha mostrado buena performance y es más efectivo que el elemento presentado por Brunet y Sabourin (2006). También muestra ser competitivo con los elementos triangulares basados en la misma formulación presentados en Flores y Oñate (2001) y Oñate y Flores (2005)

A la luz de la baja sensibilidad mostrada las magnitudes de los coeficientes de estabilización membranar y flexional pueden considerarse constantes. Esto muestra la efectividad de la formulaciones de estabilización planteada.

En resumen el elemento presentado BSQ es competitivo y tiene un futuro promisorio para simular el comportamiento lineal y no lineal de láminas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET (Argentina).

REFERENCIAS

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.4.2*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2003. URL www.abaqus.com.
- H.A. Balmer y E.A. Witmer. *Theoretical experimental correlation of large dynamic and permanent deformation of impulsively loaded simple structures*. Air Force flight dynamic Lab. Rep. FDQ-TDR-64-108, 1964.
- T. Belytschko y I. Leviathan. Physical stabilisation of the 4-node shell element with one point quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:321–350, 1994a.
- T. Belytschko y I. Leviathan. Projection schemes for one-point quadrature shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115:277–286, 1994b.
- T. Belytschko, B.L. Wong, y H.Y. Chiang. Advances in one-point quadrature shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96:93–107, 1992.
- M. Brunet y F. Sabourin. Analysis of a rotation-free shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66:1483–1510, 2006.
- F. Cirak y M. Ortiz. Subdivision surfaces: A new paradigm for thin-shell finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:2039–2072, 2000.
- D.P. Flanagan y T. Belytscho. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:57–22, 1978.
- F.G. Flores y E. Oñate. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–83, 2001.
- F.G. Flores y E. Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- F.G. Flores y E. Oñate. Rotation-free finite element for the non-linear analysis of beam, frames and axisymmetric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195: 5297–5315, 2006.
- H.C. Huang. *Static and dynamic Analysis of Plates and Shells*. Springer-Verlag, 1989.
- R.A. Nay y S. Utku. An alternative to the finite element method. *Variational Methods Engineering*, 1:62–74, 1972.
- A. Needleman. Inflation of spherical rubber ballons. *International Journal of Solids and Structures*, 13:409–421, 1977.
- NUMISHEET'96. *Third International Conference and Workshop on Numerical Simulation*

- of 3D Sheet Forming Processes*. E.H. Lee, G.L. Kinzel, R.H. Wagoner (Eds.), Dearbon-Michigan, USA, 1996.
- E. Oñate y M. Cervera. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. *Engineering Computations*, pages 553–561, 1993.
- E. Oñate y F.G. Flores. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2406–2443, 2005.
- E. Oñate y F. Zárte. Rotation-free plate and shell triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:557–603, 2000.
- A. Razzaque. Program for triangular bending element with derivative smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6:5–53, 1973.
- F. Sabourin y M. Brunet. Analysis of plates and shells with a simplified three-node triangular element. *Thin Walled Structures*, 21:206–223, 1993.
- J.C. Simo, D.D. Fox, y M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- H. Stolarski, T. Belytschko, y N. Carpenter. A simple triangular curved shell element. *Engineering Computations*, 1:210–218, 1984.
- O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor. *The finite element method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth-heinemann, 2000.