

## TEORÍA MODIFICADA DEL GRADIENTE APLICADA AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES DE UNA MICROVIGA EULER BERNOULLI CON VÍNCULOS ELÁSTICOS

Graciela I. Guerrero <sup>a,b</sup>, Diana V. Bambill <sup>b,c</sup> y Daniel H. Félix <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Patagonia San Juan Bosco, km 4, 9000  
Comodoro Rivadavia, Argentina, [graisague@hotmail.es](mailto:graisague@hotmail.es), <http://www.unp.edu.ar>

<sup>b</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca,  
Argentina, <http://www.uns.edu.ar>

<sup>c</sup>CONICET, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>

[graisague@hotmail.es](mailto:graisague@hotmail.es); [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar); [dhfelix@criba.edu.ar](mailto:dhfelix@criba.edu.ar)

**Palabras Clave:** Micro viga, Euler-Bernoulli, Teoría Modificada de la Tensión de Par, Vínculos elásticos, Frecuencia natural, método de Ritz.

**Resumen.** En este trabajo se presenta el caso de las vibraciones transversales libres de una micro viga Euler-Bernoulli basado en la Teoría Modificada del Gradiente. Dicha teoría posee tres parámetros de escala de longitud para considerar el efecto de las micro dimensiones de la viga, algo que la teoría de la elasticidad clásica no permite. El método de Ritz se usa para obtener la solución del problema del título. Se determinan resultados numéricos para los tres primeros coeficientes de frecuencias naturales de una micro viga sustentada por vínculos elásticos en ambos extremos. El problema resuelto pone de manifiesto la incidencia de la relación entre la altura de la viga y las constantes de escala de longitud del material cuando la estructura tiene escala micrométrica. Los casos de vinculación clásica se obtienen como casos límite del modelo con vínculos elásticos. En la literatura son escasos los resultados de vibraciones en micro vigas con vínculos elásticos, basados en la Teoría Modificada del Gradiente. Se presentan algunas comparaciones con resultados publicados por otros autores para vigas con vínculos clásicos.

## 1 INTRODUCCIÓN

Es cada vez mayor la necesidad de implementar el uso de dispositivos electromecánicos a escala micro y nanométrica, conocidos como MEMS y NEMS respectivamente. Surge de la incidencia de la tecnología en todos los campos, que demandan mayor precisión en las mediciones de los parámetros que describen un problema y mayor conocimiento de los materiales utilizados.

Se ha comprobado experimentalmente para estructuras de escala micrométrica que las deformaciones disminuyen y las frecuencias naturales aumentan. Se modifican además las propiedades elásticas porque la rigidez aumenta, esto es lo que se conoce como efecto de escala. Para tener en cuenta este fenómeno se introducen parámetros de escala de longitud cuyo número varía de acuerdo a la teoría aplicada.

La dependencia de la escala en el comportamiento de los materiales, ha sido comprobada experimentalmente en algunos metales y polímeros en zona plástica, [Fleck et al. \(1994\)](#), [Ma et al. \(1995\)](#), [Stolken and Evans \(1998\)](#), [Chong and Lam \(1999\)](#) y en polímeros con comportamiento elástico, [Lam et al. \(2003\)](#), [McFarland et al. \(2004\)](#), etc.

La teoría clásica del medio continuo no alcanza para analizar el comportamiento de estructuras a nivel de escala micro y nanométrica, porque no contempla la influencia de la constitución propia del material sino que tiene una visión macroscópica. Esto hace que consideremos en el cálculo clásico tres grados de libertad para el punto material y despreciemos las tensiones de cupla que surgen del equilibrio entre fuerzas externas e internas de un cuerpo.

Mindlin desarrolló una teoría elástica de orden superior, [R.D.Mindlin \(1964\)](#), que fue modificada por [Fleck et al. \(1993\)](#). Replotaron ambos el concepto de teoría micropolar anunciado por los hermanos [Cosserat \(1909\)](#).

Las teorías de orden superior fueron desarrolladas por [Toupin \(1962\)](#), [Mindlin and Tiersten \(1962\)](#), [Koiter \(1964\)](#), [Mindlin and Eshel \(1968\)](#), [Gao et al. \(2007\)](#).

De las teorías de grado superior desarrolladas se desprenden la teoría de cupla, modificada por [Yang et al. \(2002\)](#) y la teoría del gradiente, modificada por [Lam et al. \(2003\)](#).

La importancia de estas dos últimas teorías reside en que disminuye el número de las constantes de escala que son difíciles de hallar experimentalmente además de complejizar el desarrollo teórico.

Yang introduce una tercera ecuación de equilibrio, la de momento de momentos que concluye en la simetría del tensor de cupla, lo que implica que la parte antisimétrica del gradiente de rotación no contribuye al cálculo de la energía interna de deformación y reduce las constantes de escala a solo una.

Lam por su parte, basándose en uno de los tres modelos de Mindlin, utiliza la descomposición del tensor segundo gradiente de desplazamiento o tensor gradiente de deformación, como lo propusieron [Fleck and Hutchinson \(1993\)](#). Al combinar dicha descomposición con el vector clásico de rotación, como deformación adicional, redujo las constantes de escala de cinco a tres.

Usualmente se utiliza el mismo valor para las tres constantes así como para la MCST (Modified Couple Stress Theory), [Kong et al \(2009\)](#). Experimentalmente se han hallado por ejemplo para micro vigas de níquel un valor estimado en  $5\mu\text{m}$ , [Stolken and Evans \(1998\)](#), y para micro vigas de epoxi  $17,6\mu\text{m}$  por [Lam et al \(2003\)](#).

La Teoría Modificada del Gradiente se reduce a la Teoría Modificada de la Tensión de Par como caso especial y para el caso de vigas de escala macro, ambas se reducen a la teoría clásica.

Se realiza en este trabajo un análisis de las vibraciones transversales libres de una micro

viga Euler-Bernoulli sustentada por vínculos elásticos, comparando los resultados obtenidos con publicaciones existentes para el caso de vinculación rígida pues la bibliografía es escasa en el caso de la Teoría Modificada del Gradiente para micro vigas con vínculos elásticos, como las que se presentan en este trabajo.

## 2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En la Teoría Modificada de la Tensión del Gradiente (MSGT de la sigla en inglés *modified strain gradient theory*) Lam et al. (2003), descompone el tensor segundo gradiente de desplazamiento en un tensor simétrico y otro anti simétrico. Dividiendo a su vez la parte simétrica en un tensor desviador y un tensor esférico. Mientras que la parte anti simétrica la expresa como la suma de un tensor de curvatura de flexión simétrico y un tensor de curvatura de torsión anti simétrico.

Asumiendo la simetría del tensor de cupla, Yang et al. (2002), para definir la energía interna propia de la micro viga, Lam incluye tres términos adicionales, uno debido a las tensiones de par originadas por una micro rotación independiente, que se agrega a la rotación clásica; otro debido al vector gradiente de dilatación y un tercer término debido al tensor de tensiones doble de orden superior, originado por el tensor gradiente de deformación desviador. En este modelo los grados de libertad se reducen a cuatro, los tres desplazamientos clásicos y una micro rotación alrededor del eje y que se asume igual a la componente del vector rotación según dicho eje.

Los términos que se adicionan al correspondiente a la teoría clásica dependen de los parámetros de escala de longitud. Dichas constantes  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  dependen del material y se determinan experimentalmente.

Para un material elástico lineal isótropo, ocupando un dominio en el espacio de tres dimensiones  $\Omega$ , se plantea la energía interna de deformación  $U_1$  de una micro viga, de acuerdo a la MSGT, Lam et al, (2003)

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(i)} \eta_{ijk}^{(i)}) d\Omega \quad (1)$$

donde

$\sigma_{ij} = \kappa \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon'_{ij}$	Tensor de tensiones clásico
$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij}$	Tensor de deformación desviador
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$	Tensor de deformaciones clásico
$m_{ij} = 2l_2^2 \mu \chi_{ij}$	Tensor de tensiones de par desviador
$\chi_{ij} = \frac{1}{2} e_{jkl} u_{l,ki}$	Tensor de curvatura o tensor gradiente de rotación simétrico
$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i$	Tensor de tensiones de orden superior
$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i}$	Vector gradiente de dilatación
$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)}$	Tensor doble de tensiones desviador
$\Omega$	Volumen de la micro viga
$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	Constante de Lamé

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$	Constante de Lamé
$E$	Módulo de Elasticidad
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$	Módulo de Pandeo
$e_{ijk}$	Tensor de Levi Civita
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$u_i$	Campo de desplazamientos
$l_1, l_2, l_3$	Parámetros de escala de longitud
$\eta_{ijk} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k})$	Tensor gradiente de deformación desviador de segundo orden definido como la parte simétrica del gradiente de deformación menos la parte esférica de la parte simétrica del gradiente de deformación.
$-\frac{1}{15}[\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m})]$	
$-\frac{1}{15}[\delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})]$	

Las componentes  $\varepsilon_{mm,i}$  constituyen la parte simétrica de la parte esférica de la parte simétrica del gradiente de deformación de segundo orden.

### 3 CÁLCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES

El modelo de micro viga está indicado en la [Figura 1](#), la viga tiene sección transversal rectangular  $A$  y longitud  $L$ . En ambos extremos existen vínculos elásticos a traslación y rotación. El eje cartesiano  $x$  se asume coincidente con el eje longitudinal de la micro viga. Las vibraciones transversales se producen en el plano  $x$ - $z$ .

Para hallar la ecuación característica que permite conocer los valores de las frecuencias naturales por el Método de Ritz, es necesario obtener la energía total del sistema.

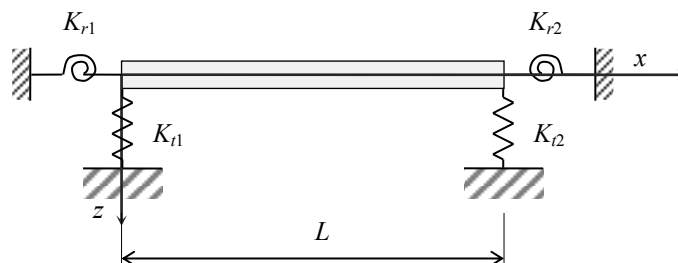


Figura 1: Micro viga con vínculos elásticos

#### 3.1 Energía total del sistema

La energía total  $\pi$  está formada por energía interna de deformación  $U$ , energía potencial de las fuerzas externas  $V$  y energía cinética  $T$ :

$$\pi = U - V + T \quad (2)$$

donde  $U = U_1 + U_2$ , Con  $U_1$  energía interna propia de la viga y  $U_2$  energía de los vínculos elásticos.  $V$  es el trabajo de las fuerzas externas, en este caso nulo debido a que estamos analizando vibraciones libres.

La energía interna de deformación de la micro viga Euler-Bernoulli dada por la Ec. (1), se desarrolla en término de corrimientos. Se considera el campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} = u_1, \\ v(x,t) &= 0 = u_2, \\ w(x,t) &= u_3, \\ \Theta_2 = \theta_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j}. \end{aligned} \quad (3a-d)$$

donde  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son los desplazamientos según los ejes coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y  $\theta_2$  es la micro rotación independiente alrededor del eje  $y$  definida como el vector de rotación clásico

Cabe aclarar que además de los tres desplazamientos clásicos se considera una micro rotación independiente (además de la clásica) alrededor del eje  $y$ , que se asume igual a la segunda componente del vector rotación y que origina las tensiones de par a través del tensor de curvatura. A partir de las ecuaciones cinemáticas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

se obtiene el tensor de deformaciones clásico para el caso planteado:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

De manera similar, con las ecuaciones constitutivas clásicas:

$$\sigma_{ij} = \kappa \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon'_{ij} \quad (6)$$

se obtiene el tensor de tensiones clásico

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\kappa + \frac{4}{3}\mu\right)z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por otra parte, las componentes del tensor de curvatura se obtienen con la expresión:

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} e_{jkl} u_{l,ki} \quad (8)$$

resultando entonces:

$$\chi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \chi_{12} & 0 \\ \chi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las componentes del tensor de cupla se obtienen a partir de la siguiente ecuación constitutiva, que involucra al parámetro de escala del material  $l_2$ :

$$m_{ij} = 2l_2^2 \mu \chi_{ij} \quad (10)$$

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -l_2^2 \mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Las componentes del tensor de dilatación surgen de la siguiente ecuación cinemática:

$$\gamma_i = (-zw''', 0, -w''') \quad (12)$$

obteniéndose las correspondientes componentes de tensión a partir de la ecuación constitutiva:

$$p_i = 2\mu l_0^2 (-zw''', 0, -w''') \quad (13)$$

Las componentes no nulas del tensor gradiente de deformación se expresan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5}zw''' & \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5}w'' \\
 \eta_{131}^{(1)} &= -\frac{4}{15}w'' & \eta_{113}^{(1)} &= -\frac{4}{15}w'' \\
 \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw''' & \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw''' \\
 \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw''' & \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{15}w'' \\
 \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{15}w'' & \eta_{311}^{(1)} &= -\frac{4}{15}w'' \\
 \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw''' & \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{15}w'' \\
 \eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw''' & \eta_{131}^{(1)} &= -\frac{4}{15}w'' \\
 \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw''' & \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{5}zw'''
 \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente las correspondientes componentes del tensor de orden superior denominado tensor doble de tensión desviador resultan:

$$\begin{aligned}
 \tau_{111}^{(1)} &= -\frac{4}{5}\mu l_1^2 zw''' & \tau_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 w'' \\
 \tau_{131}^{(1)} &= -\frac{8}{15}\mu l_1^2 w'' & \tau_{113}^{(1)} &= -\frac{8}{15}\mu l_1^2 w'' \\
 \tau_{133}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 zw''' & \tau_{212}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 zw''' \\
 \tau_{221}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 zw''' & \tau_{223}^{(1)} &= \frac{2}{15}\mu l_1^2 w'' \\
 \tau_{232}^{(1)} &= \frac{2}{15}\mu l_1^2 w'' & \tau_{311}^{(1)} &= -\frac{8}{15}\mu l_1^2 w'' \\
 \tau_{311}^{(1)} &= -\frac{8}{15}\mu l_1^2 w'' & \tau_{322}^{(1)} &= \frac{2}{15}\mu l_1^2 w'' \\
 \tau_{331}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 zw''' & \tau_{131}^{(1)} &= -\frac{8}{15}\mu l_1^2 w'' \\
 \tau_{122}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 zw''' & \tau_{133}^{(1)} &= \frac{2}{5}\mu l_1^2 zw'''
 \end{aligned} \tag{15}$$

Desarrollando la expresión dada por la Ec. (1), que determina la energía interna propia de la micro viga, se alcanza la siguiente forma:

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\sigma_{i1}\epsilon_{i1} + \sigma_{i2}\epsilon_{i2} + \sigma_{i3}\epsilon_{i3} + m_{i1}\chi_{i1} + m_{i2}\chi_{i2} + m_{i3}\chi_{i3} + p_1\gamma_1 + p_3\gamma_3 + \tau_{ij1}^{(1)}\eta_{ij1}^{(1)} + \tau_{ij2}^{(1)}\eta_{ij2}^{(1)} + \tau_{ij3}^{(1)}\eta_{ij3}^{(1)})d\Omega \tag{16}$$

y considerando los términos no nulos se llega a:

$$\begin{aligned}
U_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [ & \sigma_{11} \varepsilon_{11} + m_{12} \chi_{12} + m_{21} \chi_{21} + p_1 \gamma_1 + \\
& p_3 \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \eta_{111}^{(1)} + \tau_{311}^{(1)} \eta_{311}^{(1)} + \tau_{221}^{(1)} \eta_{i221}^{(1)} + \tau_{131}^{(1)} \eta_{i131}^{(1)} + \\
& \tau_{331}^{(1)} \eta_{i331}^{(1)} + \tau_{212}^{(1)} \eta_{i212}^{(1)} + \tau_{122}^{(1)} \eta_{i122}^{(1)} + \tau_{322}^{(1)} \eta_{i322}^{(1)} + \tau_{232}^{(1)} \eta_{i232}^{(1)} + \\
& \tau_{113}^{(1)} \eta_{i113}^{(1)} + \tau_{313}^{(1)} \eta_{i313}^{(1)} + \tau_{223}^{(1)} \eta_{i223}^{(1)} + \tau_{133}^{(1)} \eta_{i133}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \eta_{i333}^{(1)} ] d\Omega
\end{aligned} \quad (17)$$

Reemplazando las expresiones de las componentes tensoriales obtenidas anteriormente y desarrollando se obtiene:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \iint_{\Omega} \left\{ (w'')^2 \left[ \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) z^2 + 2\mu l_0^2 + \frac{8}{15} \mu l_1^2 + \mu l_2^2 \right] + (w''')^2 z^2 \left[ 2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2 \right] \right\} d\Omega \right) \right\} \quad (18)$$

donde el diferencial de volumen se puede expresar como  $d\Omega = dA dx$ , siendo  $dA$  el diferencial de área de la sección transversal de la micro viga e  $I = I_y = \int z^2 dA$ , el momento de inercia de dicha sección con respecto al eje baricéntrico.

Luego de integrar en el área de la sección transversal, la energía interna propia de la micro viga resulta:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L \left\{ (w'')^2 \left[ \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) I + 2\mu l_0^2 A + \frac{8}{15} \mu l_1^2 A + \mu l_2^2 A \right] + (w''')^2 I \left[ 2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2 \right] \right\} dx \right\} \quad (19)$$

que puede expresarse de la forma:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L \left\{ (w'')^2 [R_1] + (w''')^2 [R_2] \right\} dx \right\} \quad (20)$$

donde  $R_1 = \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) z^2 + 2\mu l_0^2 + \frac{8}{15} \mu l_1^2 + \mu l_2^2$  y  $R_2 = z^2 \left[ 2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2 \right]$

La energía de deformación de los vínculos elásticos es:

$$U_2 = \frac{1}{2} K_{t1} \left( w(0,t)^2 \right) + \frac{1}{2} K_{r1} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \right)_{x=0}^2 + \frac{1}{2} K_{t2} \left( w(L,t)^2 \right) + \frac{1}{2} K_{r2} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \right)_{x=L}^2 \quad (21)$$

donde  $K_{t1}$  es la constante elástica de traslación del vínculo en  $x = 0$ ;  $K_{r1}$  la constante elástica de rotación del vínculo en  $x = 0$ ;  $K_{t2}$  la constante elástica de traslación del vínculo en  $x = L$  y  $K_{r2}$  la constante elástica de rotación del vínculo en  $x = L$ .

La energía cinética en el caso de la micro viga se expresa como:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (22)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material de la viga,  $A$  es el área de la sección transversal y el tiempo se indica con  $t$



Finalmente la energía total de la micro viga vibrante dada por la Ec. (2) se expresa como:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_0^L (R_1 (w''(x,t))^2 + R_2 (w'''(x,t))^2) dx + \frac{1}{2} K_{r1} (w(0,t))^2 + \frac{1}{2} K_{r1} (w'(x,t))_{x=0}^2 + \\ & + \frac{1}{2} K_{r2} (w(L,t))^2 + \frac{1}{2} K_{r2} (w'(x,t))_{x=L}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Asumiendo un movimiento armónico, proponemos una solución para describir el desplazamiento transversal de la micro viga para cualquier sección y en cualquier instante de tiempo  $t$ , de la forma:

$$w(x,t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (24)$$

Donde  $W(x)$  es una función nodal que representa la amplitud del desplazamiento transversal y  $\omega$  la frecuencia circular natural de vibración transversal.

Normalizando será  $x = \bar{x}L$  con  $x \in [0, L]$  y  $\bar{x} \in [0, 1]$  y por lo tanto  $dx = L d\bar{x}$  de manera que:

$$w(x,t) = \bar{W}(\bar{x}) \cdot L e^{i\omega t} \quad (25)$$

siendo las correspondientes derivadas:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \bar{W}'(\bar{x}) \\ W''(x) &= \bar{W}''(\bar{x}) \frac{1}{L} \\ W'''(x) &= \bar{W}'''(\bar{x}) \frac{1}{L^2} \\ W^{IV}(x) &= \bar{W}^{IV}(\bar{x}) \frac{1}{L^3} \\ W^V(x) &= \bar{W}^V(\bar{x}) \frac{1}{L^4} \end{aligned} \quad (26)$$

Reemplazando las Ecs. (25 -26) en la expresión de la energía total Ec.(23) y desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{e^{i2\omega t}}{2} \left( \int_0^1 (R_1 \frac{(\bar{W}'')^2}{L} + R_2 \frac{(\bar{W}''')^2}{L^3}) d\bar{x} + \frac{1}{2} K_{r1} (\bar{W}(0)L)^2 + \frac{1}{2} K_{r1} (\bar{W}'(\bar{x}))_{x=0}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} K_{r2} (\bar{W}(1)L)^2 + \frac{1}{2} K_{r2} (\bar{W}'(\bar{x}))_{x=L}^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho A \omega^2 L^3 (\bar{W}(\bar{x}))^2 d\bar{x} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Mediante la aplicación del Principio de Mínima Energía del sistema, obtenemos la ecuación trascendental que permitirá hallar los autovalores del problema:

$$\delta\pi = 0 \quad (28)$$

#### 4 MÉTODO DE RITZ

En el método de Ritz se asume una función  $W(x)_a$  aproximada como elástica de la micro

viga. Para hallar las diez primeras frecuencias se necesita una ecuación característica de grado diez. Se genera considerando diez términos para la función aproximada ( $k = 1$  hasta 10):

$$W_a(x) \simeq \sum_{k=1}^{10} C_k \bar{\psi}_k(\bar{x})L \quad (29)$$

con  $\psi_k(x)$  función que depende de las condiciones de borde y  $C_k$  constante desconocida que acompaña a la misma.

Multiplicando por el factor  $L/EI$  se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{e^{i2\omega t}}{2} \left( \int_0^1 (R'_1(\bar{W}''')^2 + R'_2 \frac{(\bar{W}''')^2}{L^2}) \bar{d}x + \frac{1}{2} \frac{K_{r1}L^3}{EI} (\bar{W}(0)L)^2 + \frac{1}{2} \frac{K_{r1}L}{EI} (\bar{W}'(\bar{x}))^2 \right)_{x=0} \\ & + \frac{1}{2} \frac{K_{r2}L^3}{EI} (\bar{W}(1)L)^2 + \frac{1}{2} \frac{K_{r2}L}{EI} (\bar{W}'(\bar{x}))^2_{x=L} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} (\bar{W}(\bar{x}))^2 \bar{d}x. \end{aligned} \quad (30)$$

Se adimensionalizan las constantes de rigidez de los vínculos elásticos y es posible adoptar un parámetro adimensional para la frecuencia en función de las propiedades físico geométricas de la micro viga

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{e^{i2\omega t}}{2} \left( \int_0^1 (R'_1(\bar{W}''')^2 + R'_2 \frac{(\bar{W}''')^2}{L^2}) \bar{d}x + k_{r1} (\bar{W}(0)L)^2 + k_{r1} (\bar{W}'(\bar{x}))^2 \right)_{x=0} \\ & + k_{r2} (\bar{W}(1)L)^2 + k_{r2} (\bar{W}'(\bar{x}))^2_{x=L} - \int_0^1 \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} (\bar{W}(\bar{x}))^2 \bar{d}x. \end{aligned} \quad (31)$$

Para minimizar respecto a las constantes que acompañan a los términos de la función aproximada que son desconocidas, se debe efectuar  $\frac{\partial \pi}{\partial C_j} = 0$ , de la cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial C_j} = & \int_0^1 (R'_1(\bar{W}''') \frac{\partial \bar{W}'''}{\partial C_j} + \frac{R'_2}{L^2} (\bar{W}''') \frac{\partial \bar{W}'''}{\partial C_j}) \bar{d}x + k_{r1} \bar{W}(0) \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_j}_{x=0} + k_{r1} \bar{W}'(\bar{x})_{x=0} \frac{\partial \bar{W}'}{\partial C_j}_{x=0} \\ & + k_{r2} \bar{W}(1) \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_j}_{x=1} + k_{r2} \bar{W}'(\bar{x})_{x=1} \frac{\partial \bar{W}'}{\partial C_j}_{x=1} - \int_0^1 \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} \bar{W}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_j} \bar{d}x = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Se desprende entonces que al minimizar la Ec. (31), se genera un sistema de diez ecuaciones lineales. Descartando la solución trivial se arriba al sistema que da los autovalores del problema, que son los coeficientes de frecuencias naturales  $\omega_-$ :

$$\eta_{i,j} - \omega_-^2 \lambda_{i,j} = 0 \quad (33)$$

donde:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}} \quad (34)$$

con:

$$k_{t1} = \frac{K_{t1}L^3}{EI}; k_{r1} = \frac{K_{r1}L}{EI}; k_{t2} = \frac{K_{t2}L^3}{EI}; k_{r2} = \frac{K_{r2}L}{EI} \quad (35)$$

Las constantes que dependen de las características físicas y geométricas son:

$$R_1^* = \frac{R_1}{EI} = \frac{1}{E} \left( \kappa + \frac{4}{3} \mu \right) + \frac{1}{EI} 2l_0^2 \mu A + \frac{1}{EI} \frac{8}{15} l_1^2 \mu A + \frac{1}{EI} l_2^2 \mu A \quad (36)$$

$$R_2^* = \frac{R_2}{EI} = \frac{1}{E} 2l_0^2 \mu + \frac{1}{E} \frac{4}{5} l_1^2 \mu$$

que también pueden expresarse en función de las constantes ingenieriles, además de considerar que para una sección rectangular se expresan en la forma:

$$\frac{A}{I} = \frac{12}{h^2} ; L=r h$$

$$R_1^* = \frac{R_1}{EI} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{6}{(1+\nu)} \frac{1}{h^2} (2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2); \quad (37a-d)$$

$$R_2^* = \frac{R_2}{EI} = \frac{\mu}{E} (2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2); \frac{R_2'}{L^2} = \frac{1}{(1+\nu)} \frac{1}{r^2 h^2} (l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2)$$

y reemplazando por la función aproximada de la Ec. (29), se tiene:

$$\eta_{i,j} = \int_0^1 ((\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j) [R_1^*] + (\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j) \frac{[R_2^*]}{L^2}) d\bar{x} + k_{t1} \bar{\psi}_i(0) \bar{\psi}_j(0) + k_{r1} \bar{\psi}_i'(0) \bar{\psi}_j'(0) + k_{t2} \bar{\psi}_i(1) \bar{\psi}_j(1) + k_{r2} \bar{\psi}_i'(1) \bar{\psi}_j'(1) \quad (38)$$

$$\lambda_{i,j} = \int_0^1 \bar{\psi}_i(\bar{x}) \bar{\psi}_j(\bar{x}) d\bar{x} \quad (39)$$

## 5 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES APROXIMADAS

Se adoptan funciones polinómicas cuyas constantes dependen de las condiciones de borde:

$$\psi_k(x) = \left( \frac{x}{L} \right)^{k-1} \Psi(x); \quad \bar{\psi}_k(x) = \bar{\psi}_k(\bar{x}) L = (\bar{x})^{k-1} \bar{\Psi}(\bar{x}) L \quad (40)$$

Se plantea aquí un caso general de una viga cuya sujeción es elástica, tanto para la traslación como para la rotación.

Para determinar las condiciones de borde se plantea el Principio de Hamilton, según Reddy (2007).

$$U = \int_0^L F(W', W'', W''') dx \quad (41)$$

La primera variación de la energía interna es:

$$\delta U = \int_0^L \left[ -\frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{dW'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{dF}{dW''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{dF}{dW'''} \right) \right] \delta W dx$$

$$+ \left[ \left[ \frac{dF}{dW'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{dW''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{dF}{dW'''} \right) \right] \delta W \right]_0^L + \left[ \left[ \frac{dF}{dW''} - \frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{dW'''} \right) \right] \delta W' \right]_0^L + \left[ \frac{dF}{dW'''} \delta W'' \right]_0^L \quad (42)$$

$$\left( \frac{dF}{dW'} \right) = 0; \left( \frac{dF}{dW''} \right) = 2R_1 W''; \left( \frac{dF}{dW'''} \right) = 2R_2 W''' \quad (43)$$

$$\delta U_1 = \int_0^L \left[ \frac{d^2}{dx^2} (R_1 W'') - \frac{d^3}{dx^3} (R_2 W''') \right] \delta W dx + \left[ \left[ -\frac{d}{dx} (R_1 W'') + \frac{d^2}{dx^2} (R_2 W''') \right] \delta W \right]_0^L$$

$$+ \left[ \left[ R_1 W'' - \frac{d}{dx} (R_2 W''') \right] \delta W' \right]_0^L + \left[ R_2 W''' \delta W'' \right]_0^L \quad (44)$$

$$\delta U_1 = \int_0^L \left[ (R_1 W^{IV}) - (R_2 W^V) \right] \delta W dx + \left[ \left[ -(R_1 W''') + (R_2 W^V) \right] \delta W \right]_0^L +$$

$$\left[ \left[ R_1 W'' - (R_2 W^{IV}) \right] \delta W' \right]_0^L + \left[ R_2 W''' \delta W'' \right]_0^L \quad (45)$$

$$\delta U_2 = K_{t1} \delta W|_{x=0} + K_{r1} \delta W'|_{x=0} + K_{t2} \delta W|_{x=L} + K_{r2} \delta W'|_{x=L} \quad (46)$$

El trabajo de las fuerzas externas resulta:

$$\delta V = Q \delta W|_0^L + M \delta W'|_0^L + M^h \delta W''|_0^L \quad (47)$$

$$\delta \pi = \left( \int_0^L \left[ (R_1 W^{IV}) - (R_2 W^V) \right] dx \right) \delta W + \left[ \left[ -(R_1 W''') + (R_2 W^V) - Q \right] \delta W \right]_0^L +$$

$$\left[ \left[ R_1 W'' - (R_2 W^{IV}) - M \right] \delta W' \right]_0^L + \left[ \left[ R_2 W''' - M^h \right] \delta W'' \right]_0^L + K_{t1} \delta W|_0$$

$$+ K_{r1} \delta W'|_0 + K_{t2} \delta W|_L + K_{r2} \delta W'|_L \quad (48)$$

de donde se desprenden las condiciones de borde, que son:

$$-R_1 W''' + R_2 W^V - Q|_0^L = 0; R_1 W'' - R_2 W^{IV} - M|_0^L = 0; R_2 W''' - M^h|_0^L = 0 \quad (49a-c)$$

Para  $x=0$  y  $x=L$ , respectivamente se consideran las reacciones de los vínculos elásticos y  $M^h=0$

$$-R_1 W''' + R_2 W^V = -K_{t1} W; R_1 W'' - R_2 W^{IV} = K_{r1} W'; R_2 W''' = 0 \quad (50)$$

$$-R_1 W''' + R_2 W^V = K_{t2} W; R_1 W'' - R_2 W^{IV} = K_{r2} W'; R_2 W''' = 0 \quad (51)$$

Normalizando con  $\frac{x}{L} = \bar{x}$  se obtienen las expresiones siguientes

$$-\frac{R_1}{L^2} \overline{W}''' + \frac{R_2}{L^4} \overline{W}^{IV} = -K_{t1} \overline{W} L; \frac{R_1}{L} \overline{W}'' - \frac{R_2}{L^3} \overline{W}^{IV} = K_{r1} \overline{W}'; \frac{1}{L^2} \overline{W}''' = 0 \quad (52)$$

$$-\frac{R_1}{L^2} \overline{W}''' + \frac{R_2}{L^4} \overline{W}^{IV} = K_{t2} \overline{W} L; \frac{R_1}{L} \overline{W}'' - \frac{R_2}{L^3} \overline{W}^{IV} = -K_{r2} \overline{W}'; \frac{1}{L^2} \overline{W}''' = 0 \quad (53)$$

La forma adimensional de las rigideces correspondientes a las condiciones de borde elásticas son:

$$k_t = \frac{K_t L^3}{EI}; \quad k_r = \frac{K_r L}{EI}; \quad k_t = \frac{K_t L^3}{EI}; \quad k_r = \frac{K_r L}{EI}. \quad (54a-d)$$

Multiplicando por  $\frac{L^2}{EI}$  y  $\frac{L}{EI}$ , en las Es. (52-53), respectivamente, se expresan las condiciones de borde en forma adimensional:

$$\left(-\frac{R_1}{L^2} \overline{W}''' + \frac{R_2}{L^4} \overline{W}^{IV}\right) \frac{L^2}{EI} = (-K_{t1} \overline{W} L) \frac{L^2}{EI}; \left(\frac{R_1}{L} \overline{W}'' - \frac{R_2}{L^3} \overline{W}^{IV}\right) \frac{L}{EI} = (K_{r1} \overline{W}') \frac{L}{EI}; \frac{1}{L^2} \overline{W}''' = 0 \quad (55a-c)$$

$$\left(-\frac{R_1}{L^2} \overline{W}''' + \frac{R_2}{L^4} \overline{W}^{IV}\right) \frac{L^2}{EI} = (K_{t2} \overline{W} L) \frac{L^2}{EI}; \left(\frac{R_1}{L} \overline{W}'' - \frac{R_2}{L^3} \overline{W}^{IV}\right) \frac{L}{EI} = (-K_{r2} \overline{W}') \frac{L}{EI}; \frac{1}{L^2} \overline{W}''' = 0 \quad (56a-c)$$

Así se determinan:

$$\text{para } \bar{x} = 0 \Rightarrow -R_1^* \overline{W}''' + \frac{R_2^*}{L^2} \overline{W}^{IV} = -k_{t1} \overline{W}; \quad R_1^* \overline{W}'' - \frac{R_2^*}{L^2} \overline{W}^{IV} = k_{r1} \overline{W}'; \quad \overline{W}''' = 0 \quad (57a-c)$$

$$\text{y para } \bar{x} = 1 \Rightarrow -R_1^* \overline{W}''' + \frac{R_2^*}{L^2} \overline{W}^{IV} = k_{t2} \overline{W}; \quad R_1^* \overline{W}'' - \frac{R_2^*}{L^2} \overline{W}^{IV} = -k_{r2} \overline{W}'; \quad \overline{W}''' = 0. \quad (58a-c)$$

Expresando las constantes  $R_1^*$  y  $R_2^*$  en función de las constantes clásicas ingenieriles y considerando  $l_0 = l_1 = l_2 = l$ , Lam et al. (2003), resulta más sencillo el cálculo de los coeficientes de la función aproximada, de las expresiones (37):

$$R_1^* = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)} (c_i)^2; \quad \frac{R_2^*}{L^2} = \frac{7}{5} \frac{1}{r^2(1+\nu)} (c_i)^2, \quad \text{con } c_i = \frac{l}{h} \quad (59)$$

Recordar que para la MCST se adoptó la misma relación  $c_i$ , Guerrero et al. (2014), de manera que será relativamente sencillo comparar los valores obtenidos por ambas teorías.

Se aplican las condiciones de borde a la función de forma directamente, es decir considerando  $k = 1$  lo que implica usar solamente un término como aproximación en la ecuación (40).

De manera que debe resolverse el siguiente sistema de seis ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 0, \\
-\left[ \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}'''(0) + \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}^{IV}(0) + k_{r1} \bar{\Psi}(0) &= 0, \\
\left[ \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}''(0) - \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}^{IV}(0) - k_{r1} \bar{\Psi}'(0) &= 0, \\
\bar{\Psi}'''(0) &= 0. \\
\bar{x} &= 1, \\
-\left[ \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}'''(1) + \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}^{IV}(1) - k_{r2} \bar{\Psi}(1) &= 0, \\
\left[ \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}''(1) - \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)}(c_i)^2 \right] \bar{\Psi}^{IV}(1) + k_{r2} \bar{\Psi}'(1) &= 0, \\
\bar{\Psi}'''(1) &= 0.
\end{aligned} \tag{60}$$

y adoptando la función polinómica  $\bar{\Psi}(\bar{x})$  como función de forma, y sus derivadas

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}(\bar{x}) &= \alpha_1 \bar{x}^6 + \alpha_2 \bar{x}^5 + \alpha_3 \bar{x}^4 + \alpha_4 \bar{x}^3 + \alpha_5 \bar{x}^2 + \alpha_6 \bar{x} + \alpha_7 \\
\bar{\Psi}'(\bar{x}) &= 6\alpha_1 \bar{x}^5 + 5\alpha_2 \bar{x}^4 + 4\alpha_3 \bar{x}^3 + 3\alpha_4 \bar{x}^2 + 2\alpha_5 \bar{x} + \alpha_6 \\
\bar{\Psi}''(\bar{x}) &= 30\alpha_1 \bar{x}^4 + 20\alpha_2 \bar{x}^3 + 12\alpha_3 \bar{x}^2 + 6\alpha_4 \bar{x} + 2\alpha_5 \\
\bar{\Psi}'''(\bar{x}) &= 120\alpha_1 \bar{x}^3 + 60\alpha_2 \bar{x}^2 + 24\alpha_3 \bar{x} + 6\alpha_4 \\
\bar{\Psi}^{IV}(\bar{x}) &= 360\alpha_1 \bar{x}^2 + 120\alpha_2 \bar{x} + 24\alpha_3 \\
\bar{\Psi}^V(\bar{x}) &= 720\alpha_1 \bar{x} + 120\alpha_2
\end{aligned} \tag{61}$$

el sistema que permite finalmente obtener las constantes  $\alpha_i$  es:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)} (c_i)^2 \right] (120\alpha_2) = -k_{r1} (\alpha_7) \\
& \left[ \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)} (c_i)^2 \right] (2\alpha_5) - \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)} (c_i)^2 \right] (24\alpha_3) = k_{r1} (\alpha_6) \\
& (6\alpha_4) = 0 \\
& \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)} (c_i)^2 \right] (720\alpha_1 + 120\alpha_2) = k_{r2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) \\
& \left[ \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{106}{5(1+\nu)} (c_i)^2 \right] (30\alpha_1 + 20\alpha_2 + 12\alpha_3 + 6\alpha_4 + 2\alpha_5) \\
& - \left[ \frac{7}{5r^2} \frac{1}{(1+\nu)} (c_i)^2 \right] (360\alpha_1 + 120\alpha_2 + 24\alpha_3) = -k_{r2} (6\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6) \\
& (120\alpha_1 + 60\alpha_2 + 24\alpha_3 + 6\alpha_4) = 0
\end{aligned} \tag{62}$$

Una constante  $\alpha_i$  queda como variable independiente al resolver el sistema. Se divide por dicha constante  $\alpha_1$ , lo que equivale a suponer un valor unitario para ella, se renombran las demás constantes y se obtienen las expresiones de los  $\alpha_i$  restantes.

Estas expresiones permiten hallar las funciones aproximadas para todas las posibilidades de vinculación, desde las condiciones de sustentación rígidas hasta las de ausencia de vinculación, condición de borde libre, contemplando además las de vínculos elásticos para distintos valores de las constantes elásticas.

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan los tres primeros coeficientes adimensionales de frecuencia Ec. (34) para el modelo desarrollado en la MSGT adoptando un coeficiente de Poisson de 0.38 y una relación de esbeltez  $L/h$  de 100.

$l/h$ : es la relación entre la constante de escala y la altura  $h$  de la viga.

$k_r = k_{r1} = k_{r2}$  es el coeficiente de la constante elástica a rotación de vínculo, y se adopta igual para ambos extremos, el rango adoptado es desde 0 a infinito para contemplar la variación de la frecuencia natural con respecto al grado de vinculación elástica. Resultan así como casos límite, la viga simplemente apoyada y la viga doblemente empotrada. El coeficiente de constante de traslación se asume como:  $k_t \rightarrow \infty$ .

TC indica la teoría clásica que corresponde al cálculo cuando las constantes de escala son nulas. MCST indica la teoría modificada de la tensión de par, que se utiliza cuando solo se considera el tensor de cupla como componente de las tensiones de orden superior y MSGT señala a la Teoría Modificada del Gradiente.

Se comparan los valores obtenidos de los coeficientes de frecuencia hallados para una viga simplemente apoyada con los publicados en el trabajo de Akgöz y Civalek, [Akgöz and Civalek \(2013\)](#), en las tablas aparece indicado como [\*].

	$k_r$	TC	$l/h$	MCST	MSGT	
		$l/h=0$			$L=100h$	$L=5h$
$\Omega_1$	0	13,50363	0.2	14.11696	15.56307	15.6081
	0[*]	13.4484		14.0593	15.5624	
	10	21.05087		21.63037	22.95696	23.1026
	$10^3$	30.38523		31.74372	34.93649	35.4493
	$10^{10}$	30.61121		32.00157	35.28086	35.8065
$\Omega_2$	0	54.01451	0.2	56.46785	62.25377	62.9690
	0[*]	53.1473		55.5613	62.2435	
	10	63.84242		66.13610	71.52837	72.6315
	$10^3$	83.76177		87.50743	96.31581	99.3626
	$10^{10}$	84.38096		88.21356	97.25777	100.3774
$\Omega_3$	0	121.53265	0.2	127.05267	140.07663	143.6806
	0[*]	117.2698		122.5963	140.0248	
	10	132.61943		137.88251	150.31566	154.7821
	$10^3$	164.21364		171.55835	188.84342	198.9657
	$10^{10}$	165.42042		172.93385	190.67620	201.0376

Tabla 1: Tres primeros coeficientes de frecuencia para  $l/h=0.2$ ,  $k_r \rightarrow \infty$ . [\*]Akgöz and Civalek (2013).

	$k_r$	TC	$l/h$	MCST	MSGT	
		$l/h=0$			$L=100h$	$L=5h$
$\Omega_1$	0	13,50363	1	24.61434	40.97408	41.3553
	0[*]	13.4484		24.5137	40.9724	
	10	21.05087		30.79011	45.30995	45.8277
	$10^3$	30.38523		54.47294	87.23487	91.1529
	$10^{10}$	30.61121		55.79795	92.89443	97.6006
$\Omega_2$	0	54.01451	1	98.45736	163.91055	169.9378
	0[*]	53.1473		96.8767	163.8836	
	10	63.84242		105.44375	168.48494	174.9866
	$10^3$	83.76177		150.22666	241.24809	264.1044
	$10^{10}$	84.38096		153.80916	256.11166	283.5862
$\Omega_3$	0	121.53265	1	221.52907	368.85228	398.8162
	0[*]	117.2698		213.7589	368.7159	
	10	132.61943		228.85344	373.51479	404.4011
	$10^3$	164.21364		294.63724	474.41496	549.5494
	$10^{10}$	165.42042		301.52749	502.19589	591.8484

Tabla 2: Tres primeros coeficientes de frecuencia para  $l/h=1$ ,  $k_r \rightarrow \infty$ . [\*]Akgöz and Civalek (2013).



	$k_r$	TC	$l/h$	MCST	MSGT	MSGT
		$l/h=0$			$L=100h$	$L=5h$
$\Omega_1$	0	13,50363	2	43.31765	78.53952	79.3265
	10	21.05087		47.46124	80.97799	81.8417
	$10^3$	30.38523		91.60135	147.57474	153.0429
	$10^{10}$	30.61121		98.19627	178.06279	187.8350
$\Omega_2$	0	54.01451	2	173.27061	314.18779	326.6239
	10	63.84242		177.61905	316.66593	329.3665
	$10^3$	83.76177		253.46087	417.67589	449.2386
	$10^{10}$	84.38096		270.68180	490.92992	547.8827
$\Omega_3$	0	121.53265	2	389.85890	707.03423	768.8002
	10	132.61943		394.28082	709.52670	771.8001
	$10^3$	164.21364		498.63803	835.74623	940.8581
	$10^{10}$	165.42042		530.64459	962.65818	1148.1693

Tabla 3: Tres primeros coeficientes de frecuencia para  $l/h=2$ ,  $k_r \rightarrow \infty$ 

	$k_r$	TC	$l/h$	MCST	MSGT	MSGT
		$l/h=0$			$L=100h$	$L=5h$
$\Omega_1$	0	13,50363	5	103.78002	193.89565	195.8814
	10	21.05087		105.64896	194.90866	196.1583
	$10^3$	30.38523		178.46483	263.11129	268.1604
	$10^{10}$	30.61121		235.25765	439.59665	464.2995
$\Omega_2$	0	54.01451	5	415.12008	775.65782	807.0331
	10	63.84242		417.00633	776.67385	808.1583
	$10^3$	83.76177		519.51915	857.95406	900.1037
	$10^{10}$	84.38096		648.49673	1212.00046	1355.8920
$\Omega_3$	0	121.53265	5	934.02023	1745.51289	1909.2994
	10	132.61943		935.91222	1746.53632	1902.5255
	$10^3$	164.21364		1057.31168	1833.86472	2010.7540
	$10^{10}$	165.42042		1271.31297	2376.61113	2845.0507

Tabla 4: Tres primeros coeficientes de frecuencia para  $l/h=5$ ,  $k_r \rightarrow \infty$ 

## 7 GRÁFICOS DE COEFICIENTES DE FRECUENCIA

Se presentan tres gráficos para complementar las tablas. El primero muestra el primer coeficiente de frecuencia para la relación de esbeltez  $L/h=100$  y la relación  $l/h=0.2$  que involucra el parámetro de escala de longitud para la teorías MCST y MSGT.

El segundo con  $L/h=100$  y  $l/h=5$  para las tres teorías mencionadas. Por último el tercero presenta la variación del primer coeficiente de frecuencia para distintas relaciones  $l/h$  aplicando la MSGT.

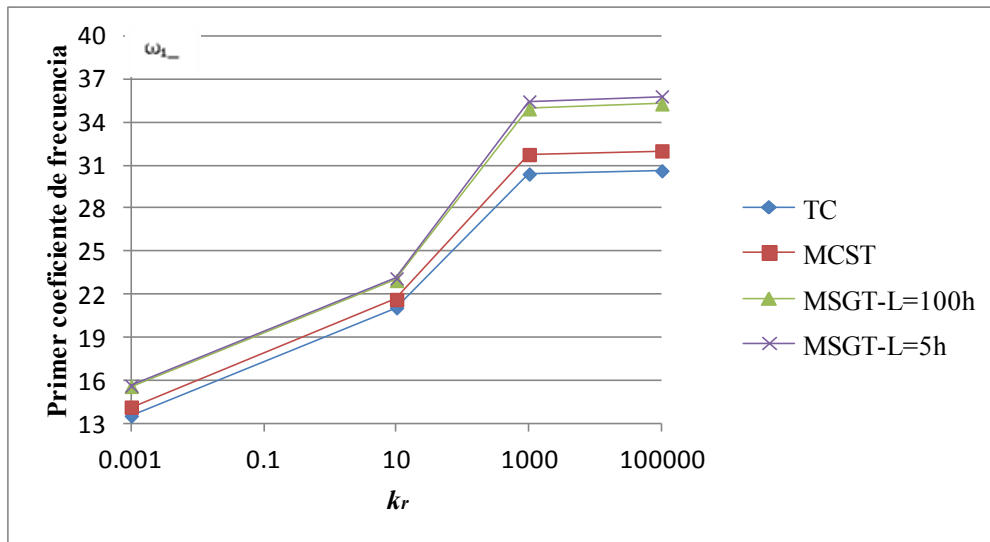


Figura 2: Primer coeficiente de frecuencia para  $l/h=0.2$ ,  $k_t \rightarrow \infty$

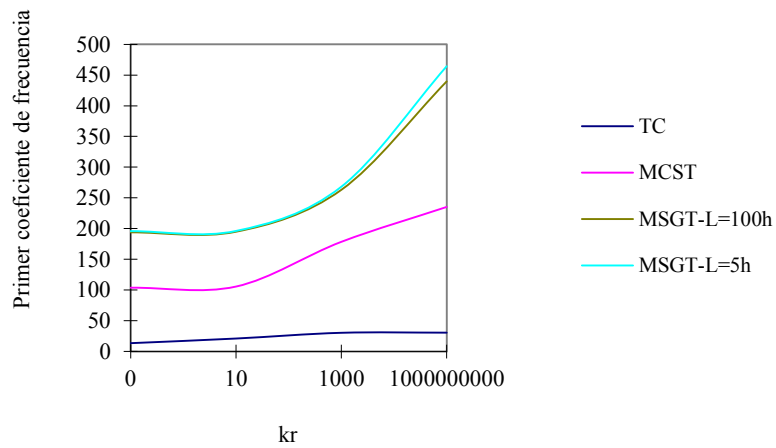


Figura 3: Primer coeficiente de frecuencia para  $l/h=5$ ,  $k_t \rightarrow \infty$

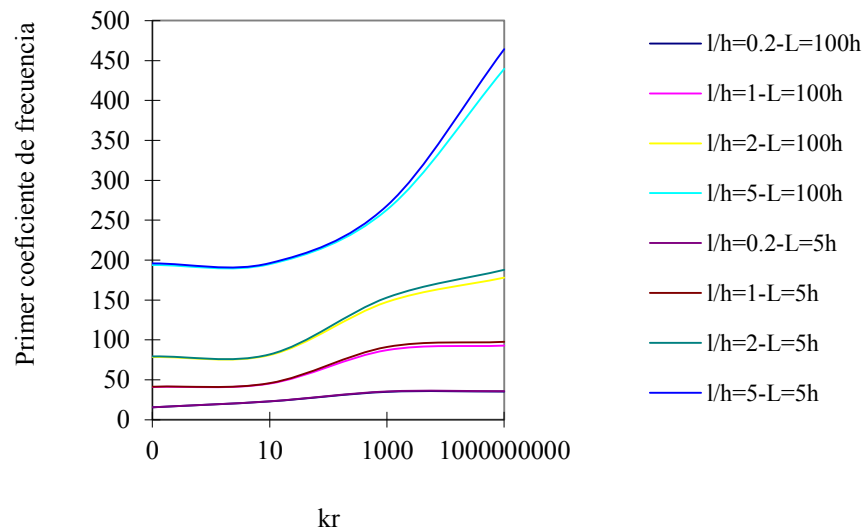


Figura 4: Primer coeficiente de frecuencia con MSGT,  $k_r \rightarrow \infty$

## 8 CONCLUSIONES

Se comparan los valores obtenidos con la teoría clásica (TC), la Teoría Modificada de la Tensión de Par (MCST) y la Teoría Modificada del Gradiente (MSGT).

- La teoría clásica no depende de la constante de escala de longitud.
- La MCST y la MSGT son dos teorías capaces de captar el efecto de escala.
- La MSGT predice vigas más rígidas que la MCST y la TC.
- Cuando la relación entre la constante de escala y la altura de la micro viga  $l/h$  crece significa que la viga se hace más pequeña y el coeficiente de frecuencias crece.
- Cuando la relación  $l/h$  se hace más pequeña significa que la viga es de mayor tamaño e influye poco por lo que las tres teorías dan resultados similares.
- Cuando la constante de escala y la altura de la viga son iguales ( $l=h$ ) la MCST y la MSGT arrojan valores que se diferencian, sobre todo a partir de  $k_r=1000$ , que es la constante elástica de rotación.
- Se acrecienta la diferencia entre la MCST y la MSGT a medida que crece la relación  $l/h$ , o sea a medida que la viga se hace más pequeña.

### Agradecimientos

Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco y al Programa DOCTORAR INGENIERÍA de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación, bajo cuyos auspicios se desarrolló el presente trabajo.

## REFERENCIAS

- Akgöz, B., Civalek, Ö., A size dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 70:1-14, 2013.
- Bambill, D.V., Guerrero, G. I., Felix, D.H., Natural vibrations of micro beams with nonrigid supports. *Journal of Vibration and Control*, 1077546315627727, first published on January 29, 2016 doi:10.1177/1077546315627727.
- Cosserat, E., Cosserat, F., (1909), *Théorie des Corps Deformables*. A. Hermann et Fils, Paris, reeditado por Gabay, París, 2009.
- Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers. *Journal of Material Research*, 14(10):4103-4110, 1999.
- Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F., Strain gradient plasticity theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42(2):475-487, 1994.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal and Physics of Solids*, 41:1825-1857, 1993.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., A reformulation of strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:2245-2271, 2001.
- Gao, X.L., Park, S.K., Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *International Journal of Solids and Structures*, 44:7486-7499, 2007.
- Guerrero, G.I., Bambill, D.V., Felix, D.H., Vibraciones libres de una micro viga Euler-Bernoulli con vínculos elásticos. *Mecánica Computacional*, XXXIII:1041-1055, 2014.
- Koiter, W. T., Couple stresses in the theory of elasticity. *I and II. Proc. Ned. Akad. Wet. Ser B* 67:17-44, 1964.
- Kong, S., Zhou, S. Nie, Z., Wang, K., Static and dynamics analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487-498, 2009.
- Lam, D. C. C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J., Tong, P., Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477-1508, 2003.
- Ma, Q., Clarke, D. R., Size dependent hardness of silver single crystals. *Journal of Materials Research*, 10(4):853-863, 1995.
- McFarland, A. W., Production analysis of polymeric microcantilevers parts. *Ph.D. Georgia Institute of Technology*, Atlanta, 2004.
- Mindlin R.D., Micro-structure in Linear Elasticity, Communicated by R.A. Toupin, 1964.
- Mindlin R.D., Tierstein H.F., Effects of couple stresses in linear elasticity, *Arch Rational Mech.Anl.*11:415-448, 1962.
- Mindlin R.D., Eshel N.N., On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Structures*, 4:109-124, 1968.
- Reddy, J. N., Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 288-307, 2007.
- Stolken, J. S., Evans, A.G., Micro bend test method for measuring the plasticity length. scale. *Acta Materialia*, 46(14):5109-5115, 1998.
- Toupin, R.A., Elastic materials with couple stress, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1(1):385-414, 1962.
- Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *Int. J. Solids Structure*, 39:2731-2743, 2002.