

## ERRORES 'A POSTERIORI' Y MEJORAMIENTO DE LA VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS DEPENDIENTES DEL CAMINO.

Marta Bergallo<sup>a</sup>, Carlos Neuman<sup>a</sup> y Victorio Sonzogni<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemática (FIQ), Universidad Nacional del Litoral, Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina, {bergallo|ceneuman}@fiqus.unl.edu.ar*\*

<sup>b</sup>*International Center for Computer Methods in Engineering (CIMEC), INTEC, Güemes 3450-PTLC, 3000 Santa Fe, Argentina, sonzogni@intec.unl.edu.ar*

**Palabras clave:** Ecuación (de difusión) de Black-Scholes-Merton, Error 'a posteriori', Opción dependiente del camino, Método trinomial, Malla mixta.

**Resumen.** Con el objetivo de obtener estimaciones de errores 'a posteriori' y mejorar la aproximación de las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Black-Scholes-Merton (BSM, ecuaciones del tipo de difusión), se estudian métodos de extrapolación y de mallas mixtas para el problema de valuación de opciones Asiáticas de compra y venta de activos financieros. Estos derivados, que se negocian entre partes fuera de mercados estándar, resultan ser de una gran variedad de tipos que se definen en detalle en el artículo y su valor está asociado con el cálculo de promedios de los precios del activo subyacente durante la vida de la opción, lo que las hace pertenecer a la clase de opciones dependientes del camino, de lo que resulta, en principio, el crecimiento de la complejidad computacional en las aproximaciones numéricas. En el caso usual de realizar promedios aritméticos solo existen en la literatura expresiones aproximadas para valuarlos, razón por la cual las estimaciones numéricas utilizando el denominado modelo trinomial (equivalente al método de diferencias finitas explícitas aplicado a la ecuación de BSM correspondiente) son una alternativa razonable siempre que (1) se puedan estimar los errores de aproximación, (2) se puedan mejorar las soluciones aproximadas para lograr una valuación ajustada, y (3) se puedan diseñar algoritmos de construcción de esta solución aproximada con una complejidad computacional manejable. Los tres puntos mencionados se tratan y resuelven en detalle en el presente trabajo y se desarrollan métodos que se extienden, con las modificaciones necesarias, a otros tipos de opciones dependientes del camino. Se efectúan asimismo comparaciones con las soluciones aproximadas al problema de las que se explica su derivación y que se obtienen de la literatura. Para la obtención de resultados respecto de los puntos (1) y (2) se utilizan mallas trinomiales y refinamientos de las mismas con conjuntos coincidentes de nodos en los cuales se realizan promedios con los pesos adaptados al orden numérico del algoritmo base. El ajuste de estas mallas mixtas de manera de respetar las propiedades de evolución del valor del activo y su volatilidad es uno de los aspectos delicados del método lo que es tratado en el trabajo con el fin de optimizar el algoritmo propuesto. En lo que respecta al punto (3) se utiliza un sistema de interpolación y cálculo de promedios que reduce considerablemente varias de las fuentes de complejidad. Asimismo se puede establecer una estrategia de recorrido de los nodos que conduce a reducir el restante factor generador de complejidad numérica.

\*Parcialmente financiado con fondos del sistema CAI+D de la Universidad Nacional del Litoral

## 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es obtener estimaciones de errores 'a posteriori' y mejorar la aproximación de las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Black-Scholes-Merton (BSM, ecuaciones del tipo de difusión), para el caso de opciones Asiáticas de compra y venta de activos financieros para las que se estudian métodos de extrapolación y de mallas mixtas.

La ecuación clásica BSM es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (1)$$

con las condiciones de frontera e iniciales que corresponden a cada caso particular.

En esta ecuación

$f$  es el valor de la opción clásica (*Vanilla call* o *put*)

$r$  es la tasa de interés libre de riesgo

$S$  es el precio del subyacente de la opción, y

$\sigma$  es la volatilidad del subyacente.

Basamos los desarrollos en los resultados ya obtenidos en [Neuman y Zanon \(2005\)](#) algunas de cuyas ecuaciones y otras planteadas aquí se apoyan en el libro clásico de [Hull \(1999\)](#). El objetivo de ello es evitar repeticiones de conceptos básicos para los que remitimos al lector a las referencias citadas y las que en ellas, asimismo, se encuentran.

Estos derivados, denominados Asiáticos, que se negocian entre partes fuera de mercados estándar, resultan ser de una gran variedad de tipos posibles que se definen en el artículo y su valor está asociado con el cálculo de promedios de los precios del activo subyacente durante la vida de la opción, lo que las hace pertenecer a la clase de opciones dependientes del camino, de ello resulta, en principio, el crecimiento de la complejidad computacional en las aproximaciones numéricas.

En el caso usual de realizar promedios aritméticos solo existen en la literatura expresiones aproximadas para valuarlos, razón por la cual las estimaciones numéricas utilizando el denominado modelo trinomial (equivalente al método de diferencias finitas explícitas aplicado a la ecuación de BSM correspondiente) son una alternativa razonable siempre que

1. se puedan estimar los errores de aproximación,
2. se puedan mejorar las soluciones aproximadas para lograr una valuación ajustada, y
3. se puedan diseñar algoritmos de construcción de esta solución aproximada con una complejidad computacional manejable.

Los tres puntos mencionados se tratan y resuelven en el presente trabajo y se desarrollan métodos que se extienden —con las modificaciones necesarias,— a otros tipos de opciones dependientes del camino.

Se efectúan asimismo comparaciones con las soluciones aproximadas al problema de las que se explica su derivación y que se obtienen de la literatura.

Para la obtención de resultados respecto de los puntos (1) y (2) se utilizan mallas trinomiales y refinamientos de las mismas con conjuntos coincidentes de nodos en los cuales se realizan promedios con los pesos adaptados al orden numérico del algoritmo base. El ajuste de estas mallas mixtas de manera de respetar las propiedades de evolución del valor del activo y su

volatilidad es uno de los aspectos delicados del método, lo que es tratado en el trabajo con el fin de optimizar el algoritmo propuesto.

En lo que respecta al punto (3) se utiliza un sistema de interpolación y cálculo de promedios que reduce considerablemente varias de las fuentes de complejidad.

Asimismo se puede establecer una estrategia de recorrido de los nodos que conduce a reducir el restante factor generador de complejidad numérica.

El método propuesto es aplicable a una amplia clase de derivados exóticos del tipo dependientes del camino: Lookbacks, opciones alfa-cuantiles, Lookbacks Asiáticas, opciones Hind-sight, opciones Lookback repartidas, opciones Mocatta, Lookbacks de tiempo parcial, Lookback Cuantificadas, swaptiones Bermudas, notas duales reversales Callable power, Asiáticas, etc., y permite muestreo discreto, es decir en un subconjunto de tiempos de evaluación, lo que es muy popular porque los derivados con muestreo discreto son más baratos que los de muestreo total.

En lo que sigue del artículo se trata una sección dedicada a las opciones Asiáticas donde se analiza la distribución final de promedios del precio del subyacente puesto que la valuación de estos derivados dependen de ella. La siguiente sección se dedica al método trinomial. Allí se compara este último con el resultado del clásico método binomial. Completado el análisis del mismo se consideran las mallas mezcla y sus posibilidades para el mejoramiento de soluciones y la estimación de errores. A continuación se aplican los métodos desarrollados a dos casos: primero un ejemplo de la literatura con el fin de comparar nuestros resultados con los publicados previamente, y en segundo término un ejemplo de una opción del mercado local. Por último se establecen unas breves conclusiones de lo realizado.

## 2. OPCIONES ASIÁTICAS

Las opciones Asiáticas son una clase muy desarrollada de opciones exóticas dependientes del camino donde el pago final está asociado al promedio de los precios a los que cotizó el subyacente durante el período de vigencia de la opción hasta el momento de su ejecución o expiración. Pueden ser de tipo Europeo o Americano.

En el caso en que el promedio  $\bar{S}$  se calcula teniendo en cuenta todos los valores del subyacente  $S$  en el período de análisis, el pago de la opción de compra de precio promedio (*average price call*) es

$$C_T = \text{máx}\{0, \bar{S} - K\} \quad (2)$$

y el de la opción de venta de precio promedio (*average price put*) es

$$P_T = \text{máx}\{0, K - \bar{S}\} \quad (3)$$

donde  $K$  es, como es notación estándar, el precio de ejercicio de la opción y  $\bar{S}$  es el promedio de los precios del subyacente calculado hasta el tiempo de ejercicio  $T$  ( $C_T$  y  $P_T$  son así el valor del *average price call* y del *average price put* en el tiempo final).

El pago de la opción de compra de promedio de ejercicio (*average strike call*) es

$$c_T = \text{máx}\{0, S_T - \bar{S}\} \quad (4)$$

mientras que el de la opción de venta de promedio de ejercicio (*average strike put*) es

$$p_T = \text{máx}\{0, \bar{S} - S_T\} \quad (5)$$

donde, como ya sabemos,  $S_T$  es el precio del subyacente en el momento  $T$  de ejercicio de la opción ( $c_T$  y  $p_T$  son así el valor del *average strike call* y del *average strike put* en el tiempo final).

De este modo, sin incluir nuevas variantes tenemos veinticuatro clases de opciones Asiáticas según se tomen los promedios aritméticos (lo usual y, de hecho lo que haremos en este trabajo), geométricos o armónicos.

Existe una gran variedad adicional de estas opciones dependiendo de la forma cómo se calcula el promedio  $\bar{S}$ , es decir: este puede ser calculado en forma continua como hemos supuesto hasta ahora o solamente teniendo en cuenta los valores del subyacente en momentos definidos y discretizados del tiempo de duración de la opción. Otro factor que incrementa el número de posibles Asiáticas es si los promedios se realizan pesando los distintos valores o sin pesarlos (peso unitario constante), por ejemplo una posibilidad común es la de dar más peso a los valores más recientes del subyacente que a los más antiguos (pesos crecientes).

Por razones de simplicidad y teniendo en cuenta que para ser aplicados a los restantes casos solamente hay que efectuar pequeños ajustes en los algoritmos, en este trabajo vamos a concentrar los ejemplos en el caso del *average price call* con promedio  $\bar{S}$  aritmético continuo.

Cuando se toman promedios aritméticos la distribución de estos no tiene propiedades analíticas que permitan calcular una solución explícita utilizando BSM directamente. La ecuación correspondiente (opciones exóticas dependientes del camino, caso de promedios) es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + S \frac{\partial f}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f \tag{6}$$

donde

$$I = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau \tag{7}$$

$r$ , es la tasa de interés libre de riesgo

$\sigma$ , es la volatilidad del precio  $S$  del subyacente, y

$f$ , el valor de la opción, representa a  $C$  para las opciones de compra (*average price call*), y a  $P$  para las opciones de venta (*average price put*).

Sin embargo en la figura 1 es posible observar que la distribución de los promedios no satisface la hipótesis de lognormalidad necesaria para la correcta utilización de BSM.

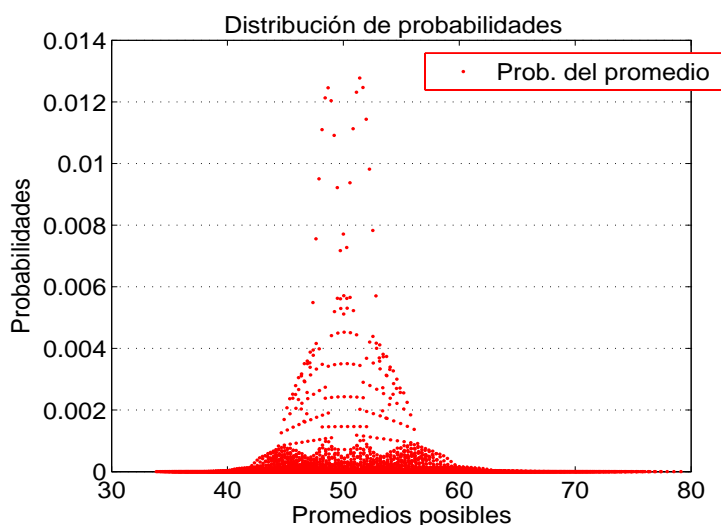


Figura 1: Probabilidades individuales de los promedios alcanzados en el árbol trinomial de 13 pasos con los datos correspondientes al ejemplo 1, ver sección 5.1

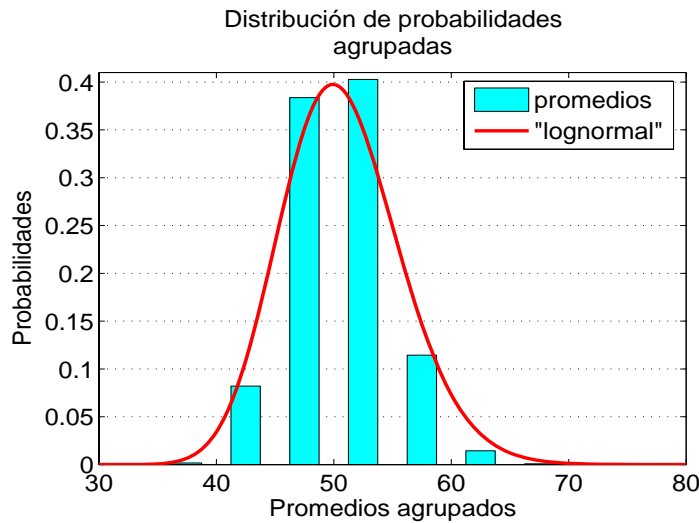


Figura 2: Probabilidades agrupadas por clases de los promedios alcanzados en el árbol trinomial de 13 pasos con los datos correspondientes al ejemplo 1, ver sección 5.1. Se superpone la forma de la distribución lognormal para comparación.

En la figura 2 se suman las probabilidades por clase y se superpone la forma de la distribución lognormal para comparación. Aquí se observa una cierta similitud pero esta se hace cada vez menos aproximada al aumentar el número de pasos del árbol cuando se tiende al caso continuo. Cabe destacar que el primer momento de la distribución discreta es  $\bar{S}_{1d} = 50,4293\$$  mientras que el correspondiente a la continua es  $\bar{S}_1 = 52,5855\$$  lo que apoya lo mencionado precedentemente.

Para este caso (por ejemplo observando la figura 2) es posible realizar una aproximación suponiendo que la distribución de promedios es cuasi lognormal y calculando los primeros dos momentos de la misma bajo la hipótesis habitual de BSM, es decir lognormalidad y la evolución en un mundo neutral al riesgo. En nuestro caso, si llamamos  $\bar{S}_1$  y  $\bar{S}_2$  al primero y segundo momento se puede expresar

$$\bar{S}_1 = \frac{e^{rT} - 1}{rT} S_0 \tag{8}$$

y

$$\bar{S}_2 = \frac{2e^{(2r+\sigma^2)T}}{(r + \sigma^2)(2r + \sigma^2)T^2} + \frac{2S_0^2}{rT^2} \left( \frac{1}{2r + \sigma^2} - \frac{e^{rT}}{r + \sigma^2} \right) \tag{9}$$

de este modo vale (BSM, aproximadamente)

$$C = C_0 = e^{rT} (\bar{S}_1 N(d_1) - KN(d_2)) \tag{10}$$

(recordemos que C es el valor de la opción de compra (*average price call* en el tiempo inicial), con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{\bar{S}_1}{K}\right) + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \tag{11}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{\bar{S}_1}{K}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \tag{12}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (13)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \log \left( \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1^2} \right) \quad (14)$$

por último en la ecuación (10)  $N(x)$  denota la normal acumulada hasta el puntaje  $x$ .

### 3. EL MÉTODO TRINOMIAL

El método de árboles trinomiales es una mejora considerable de los instrumentos básicos que se utilizaron para desarrollar la teoría de la valuación de opciones —los árboles binomiales— que condujeron a las primeras versiones de la ecuación BSM y a las aproximaciones a sus soluciones.

Al pasar del conocido método binomial al trinomial

1. Se mantienen las propiedades estadísticas de la distribución final a las que conducen teoremas como el Teorema Central del Límite,
2. mejora considerablemente la calidad de la discretización de la caminata al azar predicha para el subyacente a partir del instante inicial de análisis,
3. en consecuencia se obtiene una mejor aproximación en la valuación deseada,
4. es más realista el conjunto de alternativas que puede tomar el precio del subyacente puesto que, además de representar los posibles aumento o disminución del mismo, admite que el precio se mantenga. Esto es independiente de la posible existencia de deriva no nula del precio que puede representarse en cualquiera de los sistemas de discretización,
5. es una algebrización del proceso continuo que equivale a la representación discreta de BSM mediante diferencias finitas adelantadas explícitas,
6. admite la aplicación de la teoría de errores *a posteriori* del Análisis Numérico a BSM

La necesidad de discretizar el problema —en este caso mediante árboles trinomiales— surge naturalmente de la ausencia, en general, de soluciones analíticas para el proceso de valuación del derivado en estudio. Esto es especialmente frecuente en el caso de los derivados exóticos dependientes del camino que, al agregar una o más dimensiones al problema, incrementan la complejidad computacional y, en general, alejan la posibilidad de hallar soluciones cerradas o formulables.

En el árbol trinomial, a partir de cada nodo hay tres posibilidades para el siguiente paso (subir, medio, descender) que admiten la existencia de deriva no nula para la evolución de los precios del subyacente.

Estimadas la deriva y volatilidad de la caminata aleatoria para el precio del subyacente, existen muchas posibles determinaciones de los valores de estos factores de cambio “paso a paso” y sus “probabilidades” asociadas (en realidad la teoría de valuación mediante técnicas de neutralidad al riesgo y no arbitraje (BSM), muestra que, esencialmente, no se trata de probabilidades de suba, mantenimiento, o descenso; pero como después estos valores se utilizan como si fuesen probabilidades para el cálculo de la esperanza de movimiento del precio desde cada nodo en cada paso, se las identifica desde el principio con verdaderas probabilidades)

Dado que el objetivo de nuestro trabajo es el mejoramiento de soluciones aproximadas y la estimación de errores, calculamos una de las versiones más simples para este conjunto de valores (en todos los casos se toman los valores de modo que valgan la media y desvío estándar de los cambios de precio cuando se desprecian los términos de orden superior al paso de tiempo  $\delta t$ .)

Llamamos  $u$ ,  $m$  y  $d$  a los factores o coeficientes de suba, medio y baja del precio del subyacente en cada paso del árbol de discretización. Se debe mantener la condición de cierre del árbol

$$ud = m^2 \quad (15)$$

(con el fin de evitar la multiplicación del número de nodos). Llamamos  $p_u$ ,  $p_m$  y  $p_d$  a las probabilidades de suba, medio o baja correspondientes. Estas variables deben satisfacer las siguientes ecuaciones de compatibilidad del primer y segundo momento de la evolución del subyacente

$$p_u u + p_m m + p_d d = e^{r\delta t} \quad (16)$$

y

$$p_u u^2 + p_m m^2 + p_d d^2 - e^{2r\delta t} = e^{2r\delta t} (e^{\sigma^2 \delta t} - 1) \quad (17)$$

es decir

$$p_u u^2 + p_m m^2 + p_d d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\delta t} \quad (18)$$

Para obtener una posible solución de este sistema suponemos

$$ud = m^2 = 1 \quad (19)$$

y

$$p_m = \frac{2}{3} \quad (20)$$

con lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones resoluble para las restantes variables:  $u$ ,  $p_u$  y  $p_d$

$$p_u u + \frac{2}{3} + p_d \frac{1}{u} = e^{r\delta t} \quad (21)$$

$$p_u u^2 + \frac{2}{3} + p_d \frac{1}{u^2} = e^{(2r+\sigma^2)\delta t} \quad (22)$$

$$p_u + p_d = \frac{1}{3} \quad (23)$$

cuya solución puede expresarse como sigue: las probabilidades

$$p_d = \frac{5 - 3e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} + 3\mathbb{F} - e^{\delta t(2r+\sigma^2)}(-2 + \mathbb{F}) - 8e^{r\delta t}(2 + \mathbb{F}) + 6e^{2r\delta t}(2 + \mathbb{F})}{6(5 - 16e^{r\delta t} + 12e^{2r\delta t} + 2e^{\delta t(2r+\sigma^2)} - 3e^{2\delta t(2r+\sigma^2)})} \quad (24)$$

$$p_u = \frac{5 - 3e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} - 3\mathbb{F} + e^{\delta t(2r+\sigma^2)}(2 + \mathbb{F}) + 8e^{r\delta t}(-2 + \mathbb{F}) - 6e^{2r\delta t}(-2 + \mathbb{F})}{6(5 - 16e^{r\delta t} + 12e^{2r\delta t} + 2e^{\delta t(2r+\sigma^2)} - 3e^{2\delta t(2r+\sigma^2)})} \quad (25)$$

y el coeficiente de suba

$$u = \frac{-1 + 3e^{\delta t(2r+\sigma^2)} + \mathbb{F}}{-4 + 6e^{r\delta t}} \quad (26)$$

donde la variable  $\mathbb{F}$  toma el valor

$$\mathbb{F}(\delta t) = \sqrt{-4(2 - 3e^{r\delta t})^2 + (1 - 3e^{\delta t(2r+\sigma^2)})^2} \quad (27)$$

Nótese que en aproximación al nivel de despreciar los términos de orden superior a  $\delta t$  se tiene que

$$\mathbb{F}(\delta t) \simeq \sigma\sqrt{12\delta t} \quad (28)$$

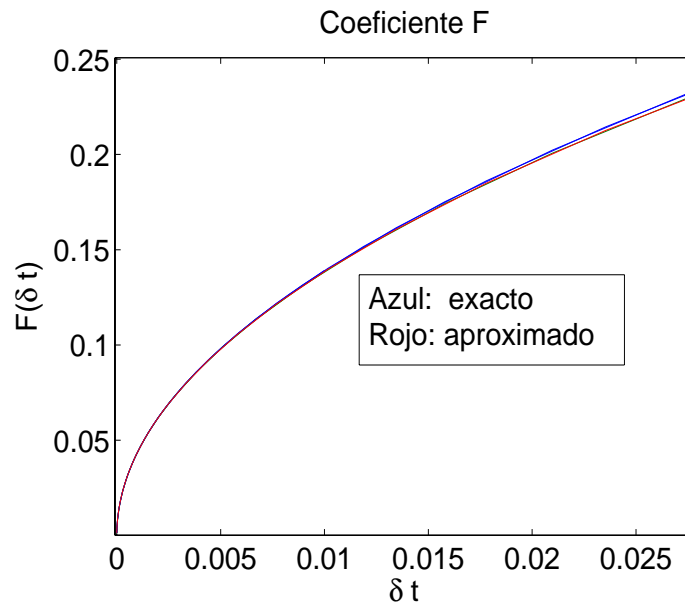


Figura 3: Comparación de los valores del coeficiente  $\mathbb{F}$  para los valores de  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,4$ , ver ecuaciones (27,28)

En la figura 3 representamos el valor de  $\mathbb{F}(\delta t)$  en función de una gama amplia de valores del paso  $\delta t$  para la ecuación exacta (27) y su aproximación al nivel explicado, ecuación (28). Para esta representación se tomaron los valores de los parámetros siguientes:  $r = 0,10$  y  $\sigma = 0,40$  (teniendo en cuenta los que corresponden al ejemplo de la sección 5.1). Para los valores usuales del paso (que debe tender a cero) se observa un ajuste muy bueno, lo que confirma el cálculo aproximado que se ha expuesto.

Con el mismo criterio precedente, en el caso de  $u$  se tiene el cociente aproximado

$$u \simeq \frac{2 + \sigma\sqrt{12\delta t} + 3(2r + \sigma^2)\delta t}{2 + 6r\delta t} \quad (29)$$

de modo que

$$u \simeq 1 + \sigma\sqrt{3\delta t} + \frac{3}{2}\sigma^2\delta t \simeq e^{\sigma\sqrt{3\delta t}} \quad (30)$$

Realizando cálculos análogos, con la precisión establecida, se obtiene, en resumen, que el coeficiente de suba,  $u$ , resulta dado por

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\delta t}\beta_{\delta t}} \quad (31)$$

con probabilidad de suba,  $p_u$ ,

$$p_u = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{\delta t}{12\sigma^2}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (32)$$



el coeficiente de movimiento medio,  $m$ , lo suponemos unitario ( $m = 1$ ) con probabilidad (escogida)

$$p_m = \frac{2}{3} \quad (33)$$

y el coeficiente de descenso,  $d$ , dado por

$$d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{3\delta t}\beta_{\delta t}} \quad (34)$$

con probabilidad de descenso,  $p_d$ ,

$$p_d = \frac{1}{6} - \sqrt{\frac{\delta t}{12\sigma^2}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (35)$$

donde  $\sigma$  es la volatilidad del precio del subyacente,  $\delta t$  es el paso local del tiempo ( $n\delta t = T$  el tiempo de vida de la opción,  $n$  el número de pasos),  $\beta_{\delta t}$  es un coeficiente de ajuste para la dispersión del árbol al tiempo final  $T$ , y  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo.

El factor de corrección  $\beta_{\delta t}$  de la ecuación (31) tiene una doble utilidad: por un lado mejora el ajuste del árbol al movimiento browniano geométrico (cuando es necesario tomarlo distinto de la unidad) que modela la evolución del precio del subyacente y por otro se aplica en el ajuste de las mallas mixtas que explicaremos en la sección siguiente.

En la sección 5 ilustramos en primer término el algoritmo que considera todos los casos posibles de caminos en el árbol (y que, por ende, tiene complejidad computacional  $O(3^n)$ ) lo que configura su principal problema. Para las opciones exóticas de una amplia clase entre las dependientes del camino, de las que las asiáticas que nos ocupan son un ejemplo, es posible elaborar un algoritmo con una complejidad computacional mucho menor utilizando solamente un conjunto fijo de valores por nodo (lo que puede llevarse al extremo de considerar solamente los valores máximo y mínimo, que, por supuesto, deben estar incluidos) e interpolar entre ellos. De este modo es posible reducir el problema en una primera instancia al caso lineal respecto del número de nodos (que es de orden  $O(n^2)$ ). En la siguiente sección planteamos otras simplificaciones del algoritmo que permiten mejorar este problema de complejidad, las soluciones y estimar los errores del método. Para otros detalles del método trinomial como por ejemplo el hecho que coincide con el método de diferencias finitas explícitas para la BSM sugerimos ver las referencias citadas.

Para los ejemplos, las suposiciones básicas (BSM) son

- tasa de interés  $r$  libre de riesgo
- valuación libre de riesgo
- acciones subyacentes que no generan dividendos en el período
- retrorecorrido del árbol en forma inductiva y selectiva
- para el caso de la versión Americana de las opciones se verifica en cada nodo del subconjunto recorrido la posibilidad de ejercicio temprano.

### 3.1. Cambio de probabilidades

En el caso que se suponga, en el caso totalmente análogo al desarrollo anterior, que la probabilidad de movimiento medio es  $\tilde{p}_m = 1/3$  en lugar del doble, las ecuaciones que se obtienen son: las probabilidades

$$\tilde{p}_d = \frac{1 - 3e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} - e^{\delta t(2r+\sigma^2)}(2 + \mathbb{G}) - 2e^{r\delta t}(4 + \mathbb{G}) + 3e^{2r\delta t}(4 + \mathbb{G})}{3 - 24e^{r\delta t} + 36e^{2r\delta t} - 6e^{\delta t(2r+\sigma^2)} - 9e^{2\delta t(2r+\sigma^2)}} \quad (36)$$

$$\tilde{p}_u = \frac{1 - 3e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} + e^{\delta t(2r+\sigma^2)}(-2 + \mathbb{G}) + 2e^{r\delta t}(-4 + \mathbb{G}) - 3e^{2r\delta t}(-4 + \mathbb{G})}{3 - 24e^{r\delta t} + 36e^{2r\delta t} - 6e^{\delta t(2r+\sigma^2)} - 9e^{2\delta t(2r+\sigma^2)}} \quad (37)$$

y el coeficiente de suba

$$\tilde{u} = \frac{1 + 3e^{\delta t(2r+\sigma^2)} + \mathbb{G}}{-2 + 6e^{r\delta t}} \quad (38)$$

donde la variable  $\mathbb{G}$  toma el valor

$$\mathbb{G}(\delta t) = \sqrt{-4(1 - 3e^{r\delta t})^2 + (1 + 3e^{\delta t(2r+\sigma^2)})^2} \quad (39)$$

$\tilde{d} = \frac{1}{\tilde{u}}$ ,  $\tilde{m}^2 = \tilde{u}\tilde{d} = 1$  y  $\mathbb{G}(\delta t)$  tiene una forma y propiedades similares a su análoga  $\mathbb{F}(\delta t)$ . Las probabilidades  $\tilde{p}_u$  y  $\tilde{p}_d$  ahora son del orden de  $1/3$ . Una deducción similar a la realizada para la primera versión conduce a las expresiones aproximadas que son útiles para la construcción del árbol trinomial en este caso, sin embargo, eligiendo todo igual pero  $\bar{p}_m = 1/2$  se obtiene —resolviendo el sistema análogo al dado por las ecuaciones (21-23) con las modificaciones que corresponden en las constantes— un nuevo conjunto de valores de los parámetros que aplicamos en el ejemplo 5.2. Estos son

$$\bar{u} = \frac{2e^{\delta t(2r+\sigma^2)} + \mathbb{H}}{-2 + 4e^{r\delta t}} \quad (40)$$

con las probabilidades

$$\bar{p}_d = \frac{2 - 2e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} + \mathbb{H} - e^{\delta t(2r+\sigma^2)}\mathbb{H} - 4e^{r\delta t}(2 + \mathbb{H}) + 4e^{2r\delta t}(2 + \mathbb{H})}{8(1 - 4e^{r\delta t} + 4e^{2r\delta t} - e^{2\delta t(2r+\sigma^2)})} \quad (41)$$

y

$$\bar{p}_u = \frac{2 - 2e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} - \mathbb{H} + e^{\delta t(2r+\sigma^2)}\mathbb{H} + 4e^{r\delta t}(-2 + \mathbb{H}) - 4e^{2r\delta t}(-2 + \mathbb{H})}{8(1 - 4e^{r\delta t} + 4e^{2r\delta t} - e^{2\delta t(2r+\sigma^2)})} \quad (42)$$

donde

$$\mathbb{H}(\delta t) = \sqrt{4e^{2\delta t(2r+\sigma^2)} - 4(1 - 2e^{r\delta t})^2} \quad (43)$$

realizando simplificaciones análogas a las ya explicadas se obtiene

$$\mathbb{H}(\delta t) \simeq \sigma\sqrt{8\delta t} \quad (44)$$

de modo que

$$\bar{u} \simeq \frac{1 + \sigma\sqrt{2\delta t} + (2r + \sigma^2)\delta t}{1 + 2r\delta t} \quad (45)$$

es decir

$$\bar{u} \simeq 1 + \sigma\sqrt{2\delta t} + \frac{\sigma^2 2\delta t}{2} \simeq e^{\sigma\sqrt{2\delta t}} \quad (46)$$

Análogamente

$$\bar{p}_u = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{\delta t}{8\sigma^2}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (47)$$

y

$$\bar{p}_d = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{\delta t}{8\sigma^2}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (48)$$

### 3.2. Comparación de métodos

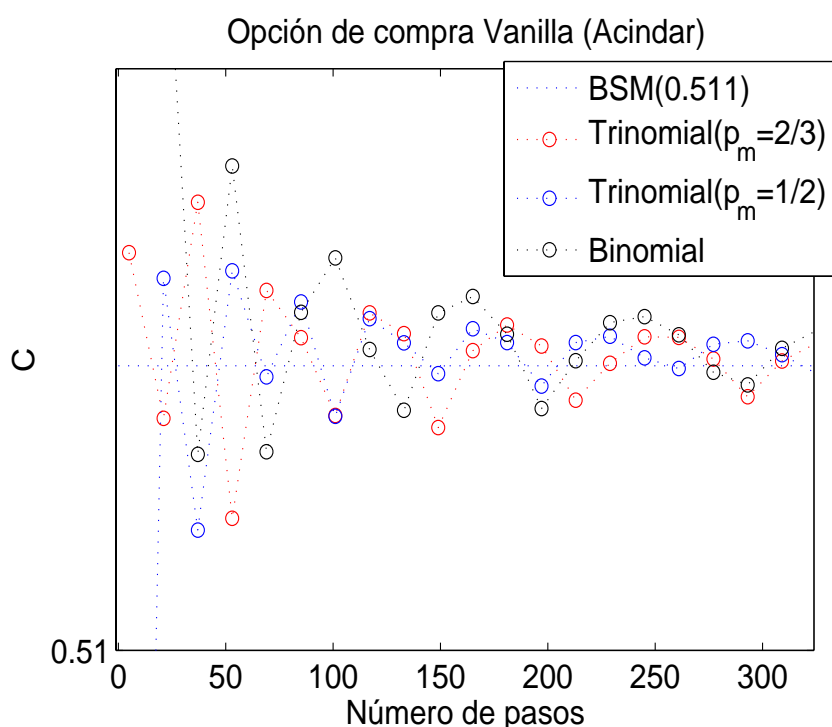


Figura 4: Comparación entre los métodos trinomiales y el método binomial para el caso del ejemplo 2 (ver sección 5.2)

En la figura 4 se comparan los métodos trinomiales precedentemente deducidos para el caso de los datos de la opción de acciones de Acindar (pero ahora considerada como una opción de compra Vanilla, o clásica, con el fin de tener un valor exacto de la solución, dado por BSM, para poder realizar la comparación, se trata luego en el ejemplo 2, ver sección 5.2). Asimismo se incluye el resultado de BSM y el de realizar el cálculo utilizando el método clásico binomial. Se advierte claramente que cualquiera de los dos trinomiales supera al binomial en cuanto a la calidad de la aproximación, en todo el rango de pasos representados y que todos ellos, cuando se supera un número pequeño de pasos, aproximan correctamente dentro del error de estos métodos que calculamos en la sección de ejemplos para el caso de las opciones Asiáticas (cabe suponer que el error en este caso Vanilla sea menor, pero aun así las aproximaciones son muy buenas). Es más difícil dar una respuesta a la pregunta de cuál de los dos trinomiales representados supera

al otro. En este caso parece ser mejor el que corresponde a la probabilidad  $\bar{p}_m = \frac{1}{2}$  respecto del que corresponde a la elección de la probabilidad  $p_m = \frac{2}{3}$ , pero queda todavía terreno para investigar al respecto.

#### 4. EXTRAPOLACIÓN, ESTIMACIÓN DE ERRORES, MEJORAMIENTO DE LA SOLUCIÓN Y EL MÉTODO DE MALLAS MIXTAS

En los artículos Bergallo et al. (2000a) y Bergallo et al. (2000b) damos los detalles del método de mallas mixtas para la estimación de errores (*a posteriori*) y el mejoramiento de la solución que produce el método trinomial. Esta teoría se puede aplicar aquí debido a que el árbol trinomial es en realidad parte de la malla de diferencias finitas explícitas de la ecuación BSM correspondiente. Un factor de ventaja adicional es que el método puede aplicarse aun en el caso en que no se tienen condiciones de formulación o de frontera e iniciales totalmente correctas en la BSM permitiendo obtener resultados aproximados en los casos en que no se cuenta con los exactos (que es justamente el caso del trabajo que nos ocupa).

##### 4.1. Extrapolación

La extrapolación de los resultados (denominada en Análisis Numérico: “de Richardson”) consiste en utilizar las expansiones del error asintótico —asociado a la magnitud calculada— para distintos pasos  $h$  (que en nuestro caso los denominamos  $\delta t$ ). Generalmente estos son  $2h$  y  $h$ . Se utilizan los resultados para obtener un “extrapolado a paso cero” en función del orden del método en cuestión. En nuestro caso el orden resulta ser dos (i.e.  $O(h^2)$ ) puesto que el árbol trinomial es un subconjunto de la malla de diferencias finitas explícitas correspondiente a la ecuación BSM (es interesante notar que, si se desea utilizar un método de diferencias finitas (parcialmente) implícitas debe aplicarse un árbol multinomial que abarque todos los nodos de cada paso, lo que, en general, resulta impráctico).

Este método podría ser utilizado, pero la base del concepto de mallas mixtas o mallas mezcla en su faceta de mejoramiento de la solución es superior en varios aspectos como ha sido ya expuesto en las referencias citadas.

##### 4.2. Mallas mixtas

La idea de mezclar mallas proviene del Análisis Numérico de problemas ingenieriles en los cuales se presentan mezclas de sustancias con distintas propiedades físicas y químicas.

En nuestro caso, para abreviar, una vez calculada la malla base, se construye una nueva malla con la mitad de pasos y la mitad de niveles de interpolación (esto último es opcional, y, por supuesto, no se aplica cuando estos niveles son 2). Se extrae de la malla base, que llamamos *malla fina* el conjunto de valores que superpone exactamente con los de la malla mitad, llamada *malla gruesa* y con los dos conjuntos de valores se realiza una mezcla con pesos que, dependiendo de cómo se elijan, permiten obtener soluciones mejoradas o, alternativamente, estimar los errores de aproximación mediante el cálculo de diferencias o *residuos*. Para los detalles de la implementación referimos al lector a las referencias específicas citadas, de autoría propia.

##### 4.3. Estimación de errores

El proceso realizado con las mallas fina y gruesa con el objetivo de estimar los errores es mezclarlas con pesos iguales y realizar el retrorecorrido del árbol resultante. El resultado de este proceso es comparado con el resultado obtenido de la extracción explicada de la malla fina y de la diferencia se obtienen los residuos que permiten estimar los errores asociados a las

magnitudes calculadas.

#### 4.4. Mejoramiento de la solución

Para el mejoramiento de la solución mediante las mallas mezcla es necesario escoger los pesos de la mezcla en función del orden del método subyacente (en nuestro caso es 2). De este modo los pesos utilizados en este trabajo son  $\frac{4}{3}$  para la malla extraída de la malla fina y  $-\frac{1}{3}$  para la malla gruesa. Con ellos se obtienen los resultados que detallamos y explicamos en la sección siguiente.

### 5. RESULTADOS

Presentaremos dos ejemplos de aplicación de los métodos expuestos, el primero de ellos para comparar con la literatura clásica en el tema y el segundo para realizar una aplicación al caso de una opción local

#### 5.1. Ejemplo 1: Comparación con resultados de las referencias específicas

En la figura 5 se representan los resultados de calcular con el algoritmo simplificado el valor de la opción de compra de promedio (aritmético) en el precio, para distintos pasos, 4 ó 20 niveles de interpolación y los valores de  $S_0 = 50\$$ ,  $K = 50\$$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0,1$ ,  $\sigma = 0,4$ , ver ecuación (10) que produce el valor aproximado del valor de la opción.

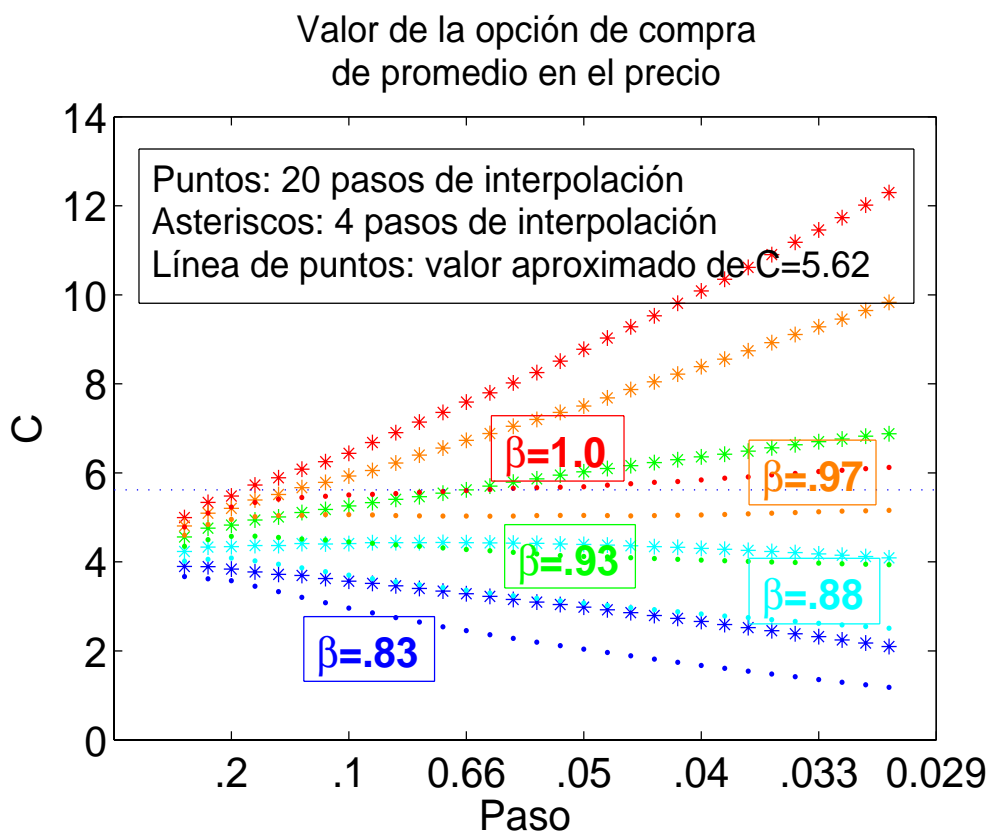


Figura 5: Cálculo del valor de la opción de compra de promedio (aritmético) en el precio para distintos pasos, 4 ó 20 niveles de interpolación y los valores de  $r=0,1$ ,  $\sigma=0,4$ , ver ecuación (10) y secciones 2 a 4. El valor de  $\beta = 1/\sqrt{\beta_{\delta t}}$ , donde se expresa solamente el radicando del denominador, es un factor de corrección para los coeficientes de suba,  $u$ , o baja,  $d$ , del subyacente.

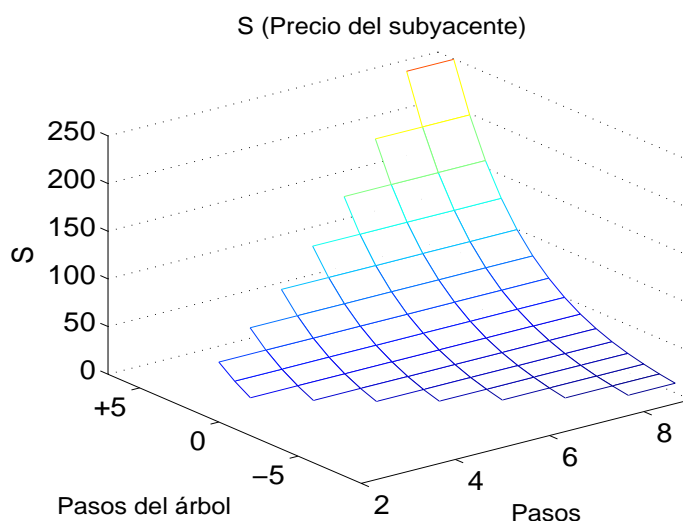


Figura 6: Precio  $S$  del subyacente en el árbol trinomial. El precio inicial es  $S_0 = 50$  y el valor de ejercicio es  $K = 50$

Para estos parámetros se representa en la figura 6 el árbol trinomial del valor del subyacente para un número pequeño de pasos con el objetivo de no hacer muy densa la figura. En este conjunto de ejemplos se aplican los desarrollos de las secciones 2 a 4. El valor de  $\beta = 1/\sqrt{\beta_{\delta t}}$  —que se representa en la figura 5—, donde se expresa solamente el radicando del denominador, es un factor de corrección para los coeficientes de suba,  $u$ , o baja,  $d$ , del subyacente.

Con 20 pasos y 20 niveles de interpolación se obtiene  $C_{(20,20)} = 5,0390$  y con 40 pasos y los mismos niveles de interpolación se obtiene  $C_{(40,20)} = 5,3135$ . Si realizamos la extrapolación

$$\frac{4}{3}5,3135 - \frac{1}{3}5,0390 = 5,41 \quad (49)$$

que resulta muy similar al obtenido mediante otras suposiciones aproximadas ( $C = 5,62$ ) y por lo tanto una buena estimación del valor de la opción estudiada.

Cuando se realiza el cálculo con 130 pasos —lo que corresponde a un paso de tiempo de  $\delta t \simeq 0,0077$ —, 40 promedios y un coeficiente  $\frac{1}{\sqrt{0,97}}$  se obtiene un valor de  $C_{(130,40)} = 5,6145$  que coincide prácticamente con el calculado por nosotros mediante la ecuación 10 que resulta ser de  $C = 5,6168$ . El valor, si no se tiene en cuenta el factor de corrección  $\frac{1}{\sqrt{0,97}}$ , difiere mucho más del aproximado. Esto justifica calibrar heurísticamente el árbol trinomial con el objeto de obtener resultados más ajustados.

Podemos aceptar, en consecuencia, que nuestros resultados son similares a los de las referencias específicas.

Aplicando los métodos de mallas mixtas se obtiene en este caso  $C = 5,86$  con un error estimado del orden del 3%.

## 5.2. Ejemplo 2: Aplicación al caso de una opción local

El ejemplo elegido para ilustrar esta sección corresponde a los valores del 28 de junio de 2006 de la acción de Acindar

$S_0 = 4,40$ \$, valor inicial (correspondiente al día anterior, del subyacente)

$K = 4,00$ \$, valor de ejercicio de la opción de compra (que después valuaremos como Asiática del tipo de precio promedio (*average price call*))

$r = 0,0852$ , tasa anual de interés libre de riesgo compuesta continua

$T = \frac{1,5}{12} = 0,125$ , tiempo total de evaluación ( $T = 1$  corresponde a un año)

$\sigma = 0,38$ , volatilidad anual del subyacente

$C = 0,525\$$ , valor teórico de la opción de compra clásica (*Vanilla call*) asociada a este problema (que incluimos simplemente con fines ilustrativos, el valor obtenido por nosotros (BSM) es  $c = 0,511\$$ )

$C(27/JUN/2006) = 0,440\$$ , cotización del *Vanilla call*

$C(26/JUN/2006) = 0,540\$$ , idem anterior.

Ver, para otros detalles de esta acción de Acindar, la referencia [Neuman y Zanor \(2005\)](#).

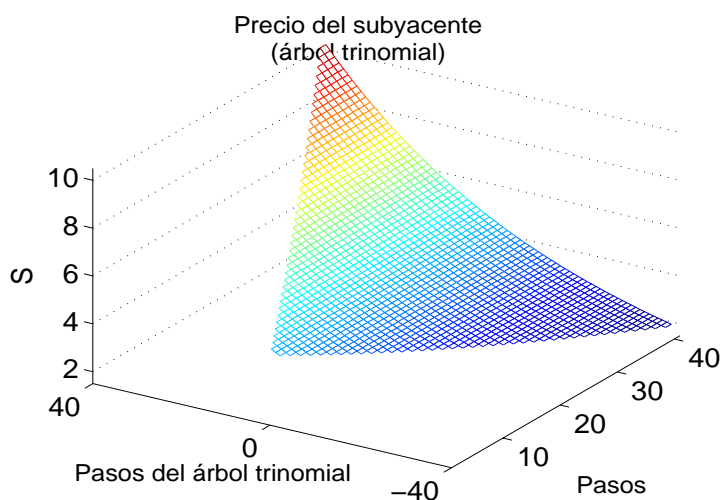


Figura 7: Precio  $S$  del subyacente en el árbol trinomial. El precio inicial es  $S_0 = 4,40$  y el valor de ejercicio es  $K = 4,00$

Vamos a presentar los resultados obtenidos mediante dos mallas trinomiales obtenidas con dos juegos de probabilidades distintos, según se explica en la sección 3.1. En primer término los valores de probabilidades provenientes de la literatura correspondientes a la elección  $p_m = \frac{2}{3}$  y en segundo lugar los correspondientes a la elección  $p_m = \frac{1}{2}$  deducidos en este trabajo.

En la figura 7 representamos el árbol trinomial de precios correspondientes al subyacente descripto, aquí trabajamos con 40 pasos y 41 promedios en cada nodo con lo que en la malla original se tiene

$u = 1,0218$ ,  $p_u = 0,1672$ , el coeficiente y probabilidad de suba

$m = 1$ ,  $p_m = 0,6667$ , idem medio

$d = 0,9787$ ,  $p_d = 0,1661$ , idem baja

$C = 0,4058\$$ , valuación calculada de la opción (Europea)

$C = 0,4613\$$ , valuación calculada de la opción (Americana)

y, para la malla con 20 pasos y 21 promedios por nodo (malla mitad)

$u = 1,0375$ ,  $p_u = 0,1674$ , suba

$m = 1$ ,  $p_m = 0,6667$ , medio

$d = 0,9639$ ,  $p_d = 0,1659$ , baja

$C = 0,4117\$$  valuación calculada de la opción (Europea) con la malla gruesa

en todos los casos el valor del coeficiente de ajuste es

$\frac{1}{\beta_{\delta t}}$ , con  $\beta_{\delta t} = 0,97$ .

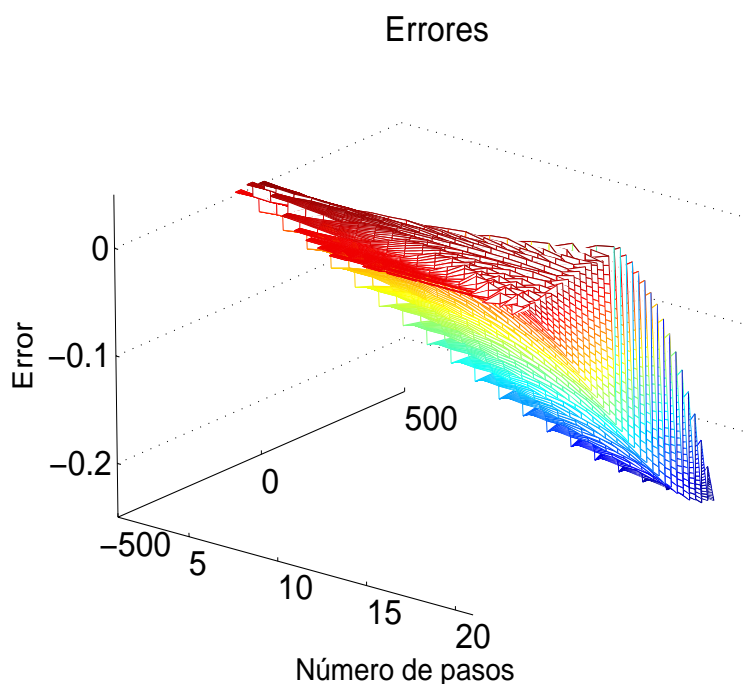


Figura 8: Errores en el valor de la opción obtenidos mediante el método de doble malla o malla mixta descrito en la sección 4.3

En la figura 8 se representan los errores en el valor de la opción obtenidos mediante el método de doble malla o malla mixta descrito en la sección 4.3. El valor que interesa es el correspondiente al vértice del árbol, los restantes errores representados solamente se incluyen para formar una idea de cual es el resultado del cálculo de errores en toda la malla. Cabe destacar que los valores donde los errores son más altos en valor absoluto están asociados, en general, con promedios de muy baja probabilidad (ver figuras 1 y 2).

El valor que nos interesa en particular es el precio de la opción: en primer lugar está el valor  $C = 0,461\$$  calculado con la malla fina y la estimación del error correspondiente que resulta ser  $|E| = 0,03\$$ . Cuando calculamos el valor de la misma opción utilizando el método de mejoramiento de la solución descrito en la sección 4.4 se obtiene  $C = 0,478\$$ , que podemos adoptar como el mejor valor conseguible con este método en el que la probabilidad de movimiento al medio es  $p_m = \frac{2}{3}$  (más abajo consideramos valores diferentes obtenidos con otro juego de probabilidades). El valor que produce la aproximación, calculado mediante la ecuación (10) es  $C = 0,434\$$  que también se halla en el intervalo de confianza provisto por el método para esta versión de la discretización.

### 5.2.1. Cálculo con el conjunto de probabilidades alternativas

En la figura 9 representamos el árbol trinomial de precios correspondientes al subyacente descrito, aquí también trabajamos con 40 pasos y 41 promedios en cada nodo con lo que en la malla original se tiene

$\bar{u} = 1,0149$ ,  $\bar{p}_u = 0,2507$ , el coeficiente y probabilidad de suba

$\bar{m} = 1$ ,  $\bar{p}_m = 0,5$ , idem medio

$\bar{d} = 0,9853$ ,  $\bar{p}_d = 0,2493$ , idem baja

y, para la malla con 20 pasos y 21 promedios por nodo (malla mitad)

$\bar{u} = 1,0276$ ,  $\bar{p}_u = 0,251$ , suba



$\bar{m} = 1$ ,  $\bar{p}_m = 0,5$ , medio

$\bar{d} = 0,9731$ ,  $\bar{p}_d = 0,249$ , baja

$C = 0,4079\$$ , valuación calculada de la opción (Europea) con la malla gruesa en todos los casos el valor del coeficiente de ajuste es

$\frac{1}{\beta_{\delta t}}$ , con  $\beta_{\delta t} = 0,97$ .

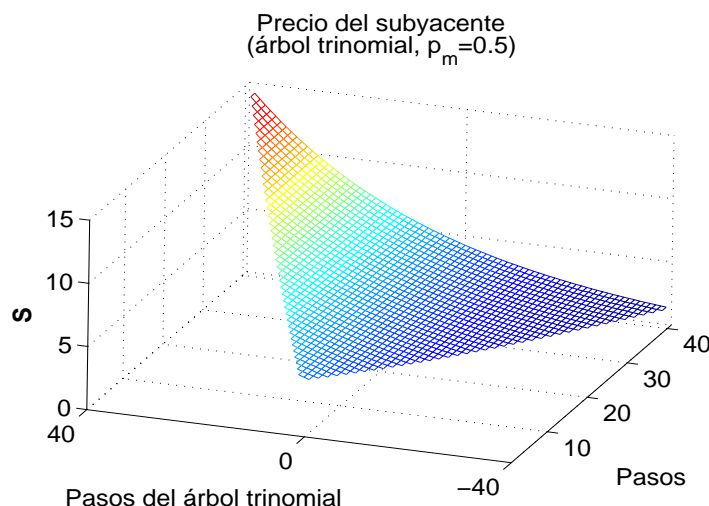


Figura 9: Precio  $S$  del subyacente en el árbol trinomial. El precio inicial es  $S_0 = 4,40$  y el valor de ejercicio es  $K = 4,00$ . Aquí la probabilidad de movimiento medio es  $\bar{p}_m = \frac{1}{2}$ , comparar con la figura 7

En este caso el valor de la opción mejorado por el método es de  $C = 0,401\$$  y el error provisto por el método es el mismo que antes  $|E| = 0,03\$$ , mientras que el valor dado por la malla fina es de  $C = 0,4026\$$ . Con este juego nuevo de probabilidades basado en la elección  $\bar{p}_m = \frac{1}{2}$  se obtiene un valor más conservador para el precio de la opción que coloca al analista en una posición más segura.

Este segundo juego de coeficientes y probabilidades es superior al anterior puesto que es más conservativo y produce resultados favorables al posible comprador de la opción (consecuentemente desfavorables para el emisor de la misma)

En la figura 10 se representa todo el árbol de valores de la opción de compra Americana de precio promedio calculada con el método de mejoramiento de la solución. El objetivo de incluirla es meramente informativo puesto que en este caso el valor que interesa es el precio del vértice del árbol establecido más arriba.

Por último, en la figura 11 se representan las curvas de precio  $C$  de la opción de compra de promedio en el precio, correspondiente a estos datos, para distinta cantidad de pasos, 41 niveles de interpolación y distintos coeficientes de ajuste (ver figura 5. En la figura se incluye, en línea de puntos, el valor calculado mediante la ecuación (10): i.e.  $C = 0,434\$$  como referencia para los restantes valores.

## 6. CONCLUSIONES

Los principales resultados de este trabajo son

1. haber logrado calcular en forma eficiente el valor de un derivado exótico dependiente del camino, como ejemplo de una clase muy amplia de ellos —en este caso las opciones

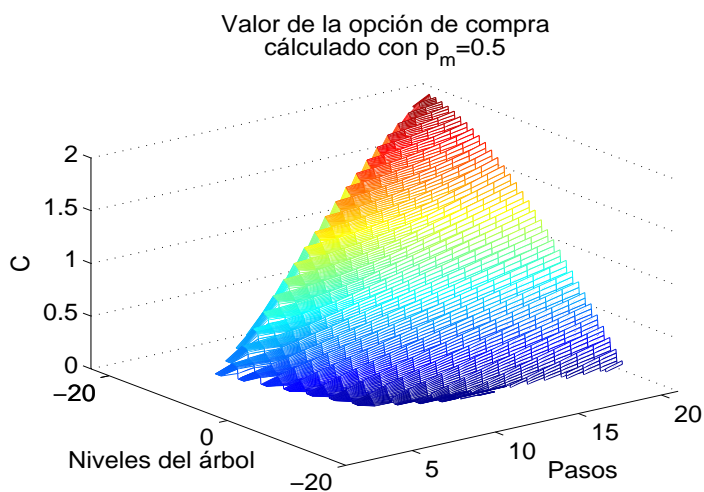


Figura 10: Precio  $C$  de la opción de compra de promedio en el precio correspondiente a estos datos para todo el árbol, calculada con el método de mejoramiento de la solución. El precio inicial del subyacente es  $S_0 = 4,40$  y el valor de ejercicio es  $K = 4,00$ .

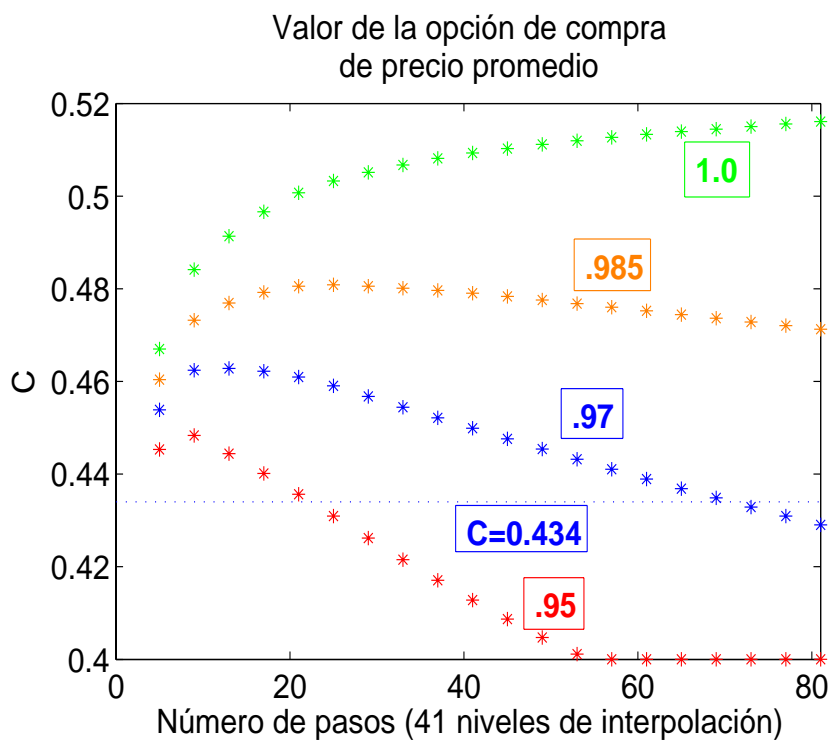


Figura 11: Precio  $C$  de la opción de compra de promedio en el precio, correspondiente a estos datos, para distinta cantidad de pasos, 41 niveles de interpolación y distintos coeficientes de ajuste  $\beta$  (ver figura 5, en esta figura se expresa solamente el valor asociado a cada curva de puntos). El valor  $C = 0,434$ \$, nivel de la línea horizontal de puntos azules representa el precio de la opción de compra calculado mediante la ecuación (10).

Asiáticas, Europeas y, sobre todo, Americanas—, verificando, ampliando y modificando las ecuaciones provenientes de la literatura en el tema y diseñando algoritmos simples y de muy veloz desarrollo para su cálculo, y

2. asimismo adaptado un método desarrollado por los autores para la estimación de errores *a posteriori* y el mejoramiento de las soluciones basados en lo que denominamos mallas mezcla o mallas mixtas, que tiene la propiedad de lograr el objetivo buscado sin incrementar la complejidad del proceso de obtención de los resultados,
3. permite dar una solución y estimación del error de aproximación que es útil para el Ingeniero Financiero, y le facilita tomar una posición ventajosa en la negociación de estos derivados exóticos dependientes del camino, que se transan habitualmente fuera de los mercados mediante grandes contratos particulares entre instituciones financieras de gran envergadura.

El método trinomial adaptado aplicado en el presente trabajo supera los métodos habituales de valuación discreta pese que aquí solamente se lo ha optimizado hasta el orden de complejidad  $O(n^2)$  (proporcional a la cantidad  $n$  de nodos), que, de cualquier modo, calcula en forma prácticamente instantánea en una PC nueva estándar (cuando el *script* de Matlab está vectorizado correctamente).

Se trata de un método totalmente superior al popular método de MonteCarlo.

El algoritmo desarrollado facilita el muestreo discreto del estimador dependiente del camino del cual se trate, en este caso la media aritmética.

La forma de desarrollo del algoritmo en Matlab hace que sea fácilmente paralelizable.

Asimismo admite una mejora sustancial (que no se implementa en este trabajo puesto que su objetivo es otro): si se tienen en cuenta de modo apropiado solamente los nodos de alta probabilidad es posible reducir el orden de complejidad a casi lineal en el número de nodos. Esta faceta está en un grado avanzado de desarrollo en lo que respecta al diseño de un algoritmo eficiente y robusto.

Cabe destacar, en resumen, que hemos satisfecho las condiciones establecidas como requisitos en la Introducción del presente artículo.

## REFERENCIAS

- M. B. Bergallo, C. E. Neuman, y V. E. Sonzogni. Composite mesh concept based fem error estimation and solution improvement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:755–774, 2000a.
- M. B. Bergallo, C. E. Neuman, y V. E. Sonzogni. Composite mesh fem for parabolic evolution problems. *Proceedings of ECCOMAS2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, España, Paper 622*, 1:1–20, 2000b.
- J. C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, fourth edition, 1999.
- C. E. Neuman y M. Zanol. *Tópicos en la Valuación de Derivados Dependientes del Camino* en Legnani, W., Jacovkis, P. y Armentano, R. (eds): *Modelización Aplicada a la Ingeniería*, pages 261–283. FRBA, Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires, Argentina, 2005.