

PREDICCIÓN DE LA RADIACIÓN TÉRMICA EN CAVIDADES ESFÉRICAS CON EL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS

Rebollo, Daniel; Velasco, Marisol; Bocca, José Carlos

*Universidad Nacional de San Juan, Facultad de Ingeniería, Departamento de Electromecánica.
Avenida Libertador San Martín (Oeste) 1109 - CPA: J5400ARL - San Juan - Argentina.
drebollo.de.fi.unsj@gmail.com*

Palabras claves: Radiación Térmica, Coordenadas Esféricas, Volúmenes Finitos.

Resumen. En ingeniería existen situaciones en las que el problema radiante está definido en un dominio esférico, como podría ser el caso de contenedores de gases a alta presión y el análisis de combustión en gotas de combustible, para las cuales es posible establecer condiciones de simetría con el consiguiente ahorro de tiempo y esfuerzo en la resolución de problemas.

En trabajos anteriores, en una primera etapa, se analizó el proceso de transferencia de calor por radiación térmica con dispersión anisotrópica en cavidades multidimensionales de forma arbitraria en coordenadas cartesianas y, posteriormente, en coordenadas cilíndricas. El análisis cubría diferentes configuraciones térmicas y variadas condiciones de borde.

En este trabajo se ha simulado numéricamente un proceso de transferencia de calor por radiación térmica en una cavidad esférica rellena con un medio que absorbe, emite y dispersa anisotrópicamente la radiación térmica por medio de un código computacional basado en el método de los volúmenes finitos. Aquí se extiende al análisis a una cavidad tridimensional en coordenadas esféricas, rellena con un medio gris absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante. Las superficies de la cavidad son opacas o transparentes, grises, difusas e isotérmicas. Se analiza la influencia del coeficiente de absorción, coeficiente de dispersión, dimensiones de la cavidad y reflectividad de las paredes.

Se ha realizado un exhaustivo y detallado análisis de error y los resultados obtenidos se han comparado con los resultados disponibles.

1 INTRODUCCIÓN

En situaciones de altas temperaturas el transporte radiante se transforma en el principal mecanismo de transferencia de calor, por lo que es importante desarrollar herramientas que permitan predecir las cantidades de energía transferidas en un rango amplio de situaciones. En la ingeniería existen ejemplos de aparatos y dispositivos de forma esférica en los cuales se necesita calcular el transporte radiante. Esta situación ha sido frecuentemente considerada por los investigadores en aplicaciones prácticas de motores de combustión interna, turbinas térmicas y hornos industriales que queman combustibles fósiles, donde el dióxido de carbono y el vapor de agua, formados como productos de la combustión, absorben y emiten cantidades significativas de radiación térmica. La importancia de la radiación térmica también puede ser apreciable en fenómenos ambientales y procesos de enfriamiento en dispositivos electrónicos. En todos estos fenómenos la radiación térmica juega un rol muy importante por lo que existe un gran interés en desarrollar modelos de análisis que permitan obtener resultados en forma rápida, precisa y económica. Además de la absorción y la emisión, la dispersión también es importante en la radiación térmica, como en el caso de la luz solar absorbida por una nube de polvo o dispersada por la atmósfera, la dispersión de la luz de las estrellas por el polvo interestelar, la propagación de las ondas de radio en la atmósfera y como herramientas de diagnóstico de gases.

Existe una gran cantidad de trabajos relacionados al estudio de la radiación térmica en geometrías esféricas, la mayoría de ellos son simulaciones numéricas donde se aplica una gran variedad de métodos numéricos, entre los que se destaca el método de los volúmenes finitos que se ha transformado en uno de los métodos más usados y con mayor futuro. En el método de los volúmenes finitos la ecuación integral de conservación de la intensidad de radiación térmica se obtiene integrando la ecuación gobernante de la transferencia radiante sobre volúmenes de control y ángulos sólidos discretos. Se usan varios tipos de funciones de interpolación para la intensidad. La formulación captura la aproximación de difusión para medios fuertemente atenuantes y no está tan afectada por el efecto de los rayos como el método de las ordenadas discretas. Este método es totalmente compatible con el método de los volúmenes finitos usado para resolver problemas de dinámica de fluidos computacional y transferencia de calor por conducción y convección.

A continuación se hace una revisión bibliográfica de los trabajos publicados en donde se han considerado problemas de transporte radiante en coordenadas esféricas. Sparrow et al. (1961) hicieron un análisis de la radiación térmica en un gas gris, emisor, absorbente y no isotermo con una fuente de calor volumétrica, confinado entre dos esferas concéntricas de paredes negras e isotérmicas, el principio de conservación de la energía resulta en una ecuación integral que se ha resuelto para una amplia gama de condiciones geométricas y radiativas. Ryhming (1966) estudiaron la transferencia radiante entre dos esferas concéntricas con superficies negras a diferentes temperaturas separadas por un gas absorbente y emisor con coeficiente de absorción constante, obteniendo soluciones para los casos límites de medio fino y grueso. Viskanta y Crosbie (1967) analizaron el problema de la transferencia radiante entre esferas concéntricas con paredes opacas, difusas y a diferentes temperaturas rellenas con un medio gris, absorbente, emisor y con una fuente de calor distribuida uniformemente utilizando un método de superposición. Olfe (1968) usó una aproximación diferencial modificada para obtener expresiones aproximadas del flujo radiante y la distribución de temperatura en un medio gris encerrado entre dos esferas concéntricas mantenidas a diferentes temperaturas. Loyalka (1970) aplicó una técnica variacional, previamente usada en geometrías planas y cilíndricas, para obtener resultados precisos de la transferencia de calor radiante a través de un gas gris encerrado entre esferas concéntricas. Armaly y Saad (1972) desarrollaron un método aproximado para estudiar la transferencia radiante entre dos esferas concéntricas mantenidas a

diferentes temperaturas asumiendo una distribución de temperatura a través del gas, asignando un salto de temperatura apropiado en las condiciones de borde para evaluar el flujo de calor. Pomraning y Siewert (1982) derivaron una forma integral de la ecuación de la transferencia radiante para una esfera homogénea con fuentes internas, irradiación externa y superficies reflectantes difusas y especulares. Thynell y Ozicik (1985) aplicaron el método de Galerkin para resolver la transferencia radiante en una esfera emisora, absorbente e isotrópicamente dispersante con fronteras que emiten y reflejan en forma difusa. Siewert (1985) utilizaron técnicas de transformación integral y el método FN para resolver problemas de transferencia radiante con dispersión isotrópica en geometrías esféricas y cilíndricas. El-Wakil et al. (1988) resolvieron el problema de la transferencia radiante en una esfera con fuentes de radiación uniformemente distribuidas y de tipo polinomial. Tsai et al. (1989) investigaron el efecto de la variación espacial del coeficiente de absorción y dispersión en la transferencia radiante entre esferas concéntricas rellenas con un medio absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante. Jones y Bayazitoglu (1990) aplicaron el MOD para resolver la transferencia de calor combinada en una esfera absorbente y emisora determinando los límites paramétricos dentro de los cuales la radiación y conducción pueden ser tratadas en forma combinada. Wilson y Nanda (1990) utilizaron un método de colocación para resolver las ecuaciones de la transferencia radiante en una esfera absorbente y emisora con dispersión anisotrópica lineal y paredes reflectantes. Jia et al. (1991) aplicaron el método de Galerkin para estudiar la transferencia radiante entre esferas concéntricas rellenas con un medio gris, absorbente, emisor e isotrópicamente dispersante, con paredes opacas y grises que emiten y reflejan en forma difusa. Pessoa-Filho y Thynell (1994) presentaron una solución aproximada de la ecuación de la transferencia radiante en un medio gris, absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante con paredes isotérmicas que emiten y reflejan en forma difusa, siendo válida tanto en geometrías planas como esféricas. Sghaier et al. (2000) modificaron el MOD para resolver la ecuación de la transferencia radiante en un medio esférico utilizando una expansión en polinomios de Legendre para resolver las derivadas angulares. Ben Abdallah et al. (2001) determinaron el campo de temperatura en un medio esférico, gris, absorbente, emisor y no dispersante con generación interna de calor utilizando una técnica de traceado de los rayos que permite seguir la curvatura esférica. Altaç y Tekkalmaz (2004) corrigieron los resultados de Tsai et al. (1989) obtenidos en una pared esférica con propiedades radiantes variables con el radio. Trabelsi et al. (2005) modificaron el MOD para resolver la ecuación de la transferencia radiante en un medio esférico partiendo la intensidad de radiación térmica en dos componentes, la proveniente de las paredes de la cavidad, llamada directa, y la proveniente del medio participante, llamada difusa, transformando la ecuación de la transferencia radiante en dos ecuaciones simultáneas. Cassell y Williams (2006) construyeron una ecuación integral para la intensidad de flujo en un medio absorbente y dispersante usando la forma integro-diferencial de la ecuación de la transferencia radiante en una esfera uniformemente irradiada desde una fuente externa con una distribución angular arbitraria, obteniendo, además, una solución analítica para el caso de un medio no dispersante en el límite de ópticamente transparente. Cassell y Williams (2007) ampliaron su trabajo anterior incluyendo dispersión anisotrópica y condiciones de borde de Fresnel incorporando reflexión y refracción en la superficie externa y en la interfase entre dos regiones internas. Aouled-Dlala et al. (2006) presentaron una nueva técnica para mejorar el desempeño del MOD resolviendo problemas acoplados de radiación y conducción en coordenadas cilíndricas y esféricas aproximando el término de la derivada angular usando una expansión en polinomios de Chebyshev. Tekkalmaz y Altaç (2007) emplearon la aproximación del Núcleo Sintético SK_n , el cual se basa en aproximar la integral de los núcleos de transferencia por núcleos sintéticos, reduciendo la ecuación integral de la transferencia radiante a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, para resolver la transferencia radiante entre dos esferas concéntricas rellenas con un medio participante y dispersión anisotrópica

lineal. Kim et al. (2008a) fueron los primeros en aplicar el MVF para resolver la ecuación de la transferencia radiante entre dos esferas concéntricas rellenas con un medio emisor, absorbente e isotrópicamente dispersante, introduciendo una técnica de mapeo para simplificar la solución de problemas con simetría esférica, transformando la dependencia unidimensional espacial - unidimensional angular en una bidimensional espacial, simplificando el tratamiento de las derivadas angulares. Kim et al. (2008b) ampliaron su trabajo anterior a una mezcla bifásica de un gas no gris y una nube de partículas usando una versión extendida del WSGGM. Finalmente, He et al. (2011) usaron el software TracePro basado en el método de traceado de rayos para modelar una fuente de radiación uniforme de forma esférica de gran tamaño con el objeto de calibrar la imagen de sensores remotos con grandes campos de visión.

De la revisión bibliográfica presentada se desprende que existe un marcado interés en desarrollar herramientas computacionales que permitan predecir el transporte radiante en geometrías esféricas multidimensionales. Estas herramientas computacionales pueden ser usadas para facilitar el cálculo y diseño de dispositivos industriales, análisis y estudio de fenómenos ambientales y en todas las situaciones en la que estén involucrado el transporte radiante.

2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

2.1 Ecuación de la transferencia radiante

La ecuación de la transferencia radiante para un medio gris, absorbente, emisor y dispersante viene dada por (Kim, 1990; Chui, 1990; Siegel y Howell, 1992; Brewster, 1992; Modest, 1993; Chai, 1994)

$$\mathbf{s} \cdot \nabla i = -\beta i + S \quad (1)$$

donde $i(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ es la intensidad de radiación térmica, \mathbf{r} es el vector de posición en el sistema de coordenadas adoptado, \mathbf{s} es el vector de dirección, $\beta = \kappa + \sigma$ es el coeficiente de extinción y S el término fuente, dado por:

$$S = \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (2)$$

donde κ coeficiente de absorción, σ es el coeficiente de dispersión, i_b es la intensidad de radiación térmica perteneciente al cuerpo negro, Φ es la función de dispersión y ω es el ángulo sólido.

2.2 Función de dispersión

La función de dispersión expresada como una serie de polinomios de Legendre, es (Kim, 1990; Modest, 1993; Dombrosky, 1996; Rebollo, 2007, 2008a, 2009a)

$$\Phi(\theta^l, \theta^k) = 1 + \sum_{m=1}^M A_m P_m(\cos \theta^l) P_m(\cos \theta^k) \quad (3)$$

donde θ es el ángulo polar, k representa la dirección incidente, l representa la dirección emitida, A_m son los coeficientes de la serie de Legendre y P_m son los polinomios de Legendre.

Para poder calcular la función de dispersión es necesario conocer los coeficientes A_m , los cuales están relacionados a los coeficientes de dispersión de Mie por medio de un conjunto de ecuaciones (Modest, 1993), y se encuentran tabulados en los trabajos de Kim (1990), An et al. (2005), Byun et al. (2004) y Hao et al. (2003).

2.3 Divergencia de la energía radiante

El flujo de calor en la dirección \mathbf{s} se relaciona con la intensidad i de la siguiente manera (Brewster, 1992; Chai, 1994; Chui, 1990; Kim, 1990; Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992)

$$\mathbf{q}_r = \int_{\omega=0}^{4\pi} i \mathbf{s} d\omega \quad (4)$$

así, la divergencia de la energía radiante se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_r = \kappa \left(4\gamma T^4 - \int_{\omega=0}^{4\pi} i d\omega \right) \quad (5)$$

donde γ es la constante de Stefan–Boltzmann y T es la temperatura absoluta.

2.5 Condición de frontera radiante

En este trabajo se consideran superficies radiantes grises, opacas o transparentes, difusas e isotérmicas. La condición de borde para esta situación se puede escribir como (Chai, 1994; Chui, 1990; Kim, 1990):

$$i_w^i = i_{\text{ext}} + \varepsilon_w i_{bw} + \frac{\rho_w H_w}{\pi} \quad (6)$$

donde el subíndice w representa la pared, ε es la emisividad, ρ la reflectividad, i_b es la intensidad de radiación del cuerpo negro, la cual depende de la cuarta potencia de la temperatura absoluta de la pared, y H es la irradiación hemisférica, es decir, el flujo de calor radiante incidente en la pared. Estos últimos se calculan como:

$$i_{bw} = \frac{\gamma T_w^4}{\pi} \quad (7)$$

$$H_w = \int_{s^k \cdot n_w < 0} i_w^k |s^k \cdot n_w| d\omega^k \quad (8)$$

donde \mathbf{n} es la normal unitaria a la pared. La ecuación (6) muestra que en la superficie pueden existir tres componentes, la incidencia externa difusa, la emisión debida al estado térmico de la superficie y la parte reflejada de la intensidad incidente sobre la superficie.

En todos los problemas analizados en este trabajo, se supone que las superficies de la cavidad son opacas o transparentes, grises y difusas. La rugosidad de la superficie y la deposición de productos de la combustión hacen que estas dos últimas suposiciones sean validas en muchas aplicaciones de la ingeniería.

2.6 Formulación en coordenadas esféricas

La formulación matemática de la ecuación (1-2) de la transferencia radiante, presentada anteriormente, está dada en forma tensorial, vectorial y direccional, es decir, independiente del sistema de coordenadas adoptado. Aquí se da una descripción muy breve de la formulación matemática para el caso particular de coordenadas esféricas, una descripción más detallada se puede encontrar en Peraiah A. (2004).

Las ecuaciones de la transferencia radiante (1-2), para un sistema de coordenadas esféricas, viene dada por

$$\mu \frac{\partial i}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial i}{\partial \Theta} + \frac{\xi}{r \sin \Theta} \frac{\partial i}{\partial \Phi} - \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial i}{\partial \mu} - \frac{\xi \cot \Theta}{r} \frac{\partial i}{\partial \varphi} = -\beta i + \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (9)$$

en la que la intensidad radiante $i = (\mathbf{r}, \mathbf{s})$ se expresa como $i = (r, \Theta, \Phi, \theta, \varphi)$ donde

(r, Θ, Φ) son las coordenadas del sistema esférico, (θ, φ) el ángulo polar y azimutal de la dirección radiante y (μ, η, ξ) los cosenos directores de la dirección radiante expresados como $\mu = \cos \theta$, $\eta = \sin \theta \sin \varphi$ y $\xi = \sin \theta \cos \varphi$.

T_e / T_i	ϵ_i	ϵ_e	Galerkin Jia et al. (1991)	DOM Sghaier et al. (2000)	FLT- DOM Sghaier et al. (2000)	FLT- MDOM Trabelsi et al. (2005)	MDOM Kim et al. (2008a)	FVM Kim et al. (2008b)	MVF Rebollo
0,5	0,5	0,5	0,09914	0,09248	0,09977	0,09890	0,09869	0,09866	0,09733
		1,0	0,11087	0,10360	0,11312	0,11055	0,11030	0,11027	0,10862
	1,0	0,5	0,17183	0,15195	0,17281	0,17108	0,17046	0,17038	0,16892
		1,0	0,21038	0,18456	0,21733	0,20883	0,20834	0,20827	0,20617
2,0	0,5	0,5	-1,58604	-1,49584	-1,61580	-1,59339	-1,57897	-1,58034	-1,55681
		1,0	-1,77357	-1,64680	-1,79980	-1,79316	-1,76474	-1,76643	-1,74002
	1,0	0,5	-2,74880	-2,47264	-2,81600	-2,75925	-2,72734	-2,72926	-2,70170
		1,0	-3,36557	-2,95330	-3,47938	-3,41774	-3,33344	-3,33625	-3,29950

Tabla 1: Flujo de calor radiante adimensional para incidencia difusa desde la pared con $R_i/R_e=0.5$ y $\tau_e=1.0$

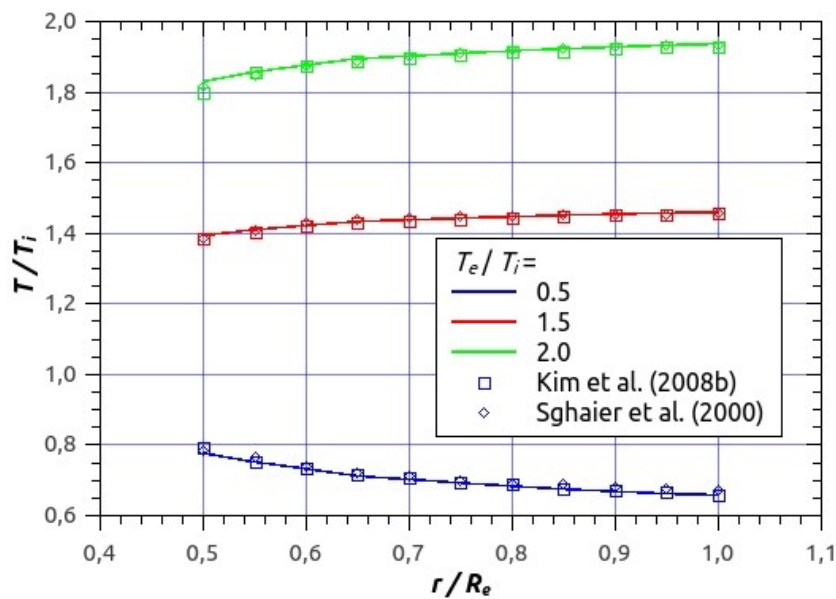


Figura 1: Influencia de la relación entre las temperaturas de la esfera exterior e interior sobre la distribución de la temperatura adimensional para $\epsilon_i=\epsilon_e=0.5$, $R_i/R_e=0.5$ y $\tau_e=1.0$.

Donde Θ es el ángulo polar entre el radio vector \mathbf{r} y el eje z , Φ es el ángulo azimutal entre el eje x y la proyección de \mathbf{r} en el plano $x-y$, θ es el ángulo polar entre el vector posición \mathbf{r} y el vector de dirección \mathbf{s} , y ϕ es el ángulo azimutal entre el vector posición \mathbf{r} y la proyección del vector dirección \mathbf{s} en el plano $x-y$. En el cálculo de las integrales sobre el ángulo sólido se debe tener en cuenta que en el sistema de coordenadas esférico, a diferencia del sistema de coordenadas cartesiano, cambia el ángulo entre la dirección radial y la dirección radiante con el

ángulo polar y azimutal, en el sistema cartesiano los ángulos entre las direcciones espaciales y las direcciones radiales se mantienen constantes.

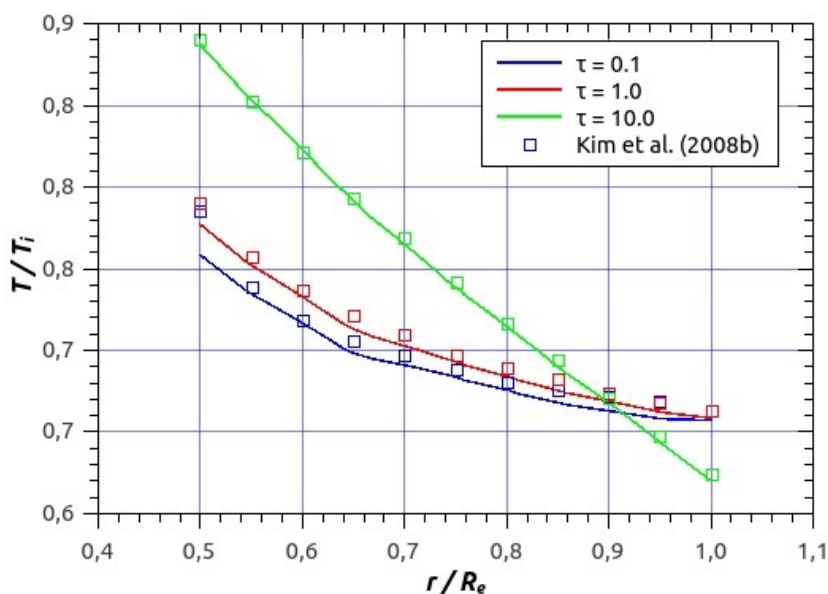


Figura 2: Influencia del espesor óptico sobre la distribución de temperatura adimensional para $\epsilon_i = \epsilon_e = 0.5$, $T_e/T_i = 2.0$ y $R_i/R_e = 0.5$.

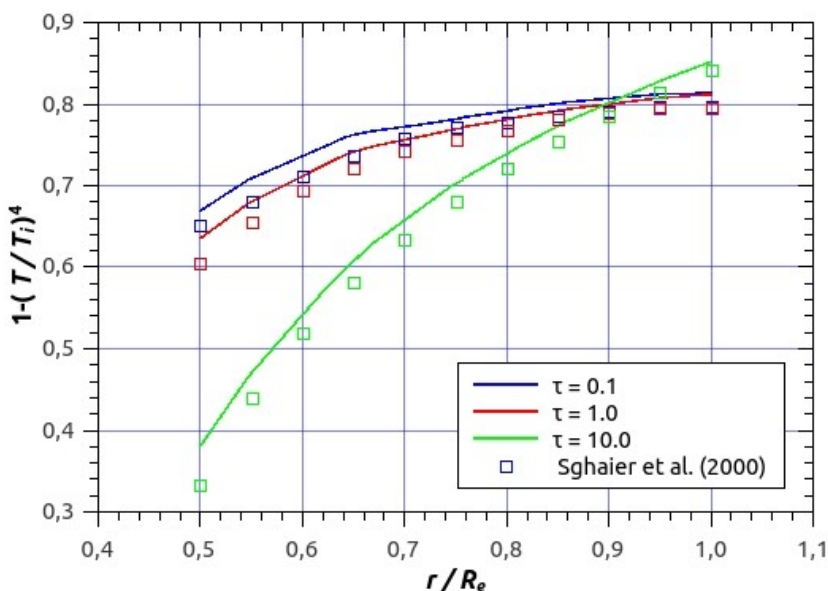


Figura 3: Influencia del espesor óptico sobre la distribución de temperatura adimensional para $\epsilon_i = \epsilon_e = 0.5$, $T_e/T_i = 2.0$ y $R_i/R_e = 0.5$.

Para el caso de simetría esférica, el problema radiante es independiente de los ángulos Θ , Φ y φ y la ecuación (9) se simplifica notablemente, resultando

$$\mu \frac{\partial i}{\partial r} - \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial i}{\partial \mu} = -\beta i + \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (10)$$

en la que la intensidad radiante se expresa como $i = i(r, \theta)$.

Toda la formulación matemática presentada en este trabajo está basada en la suposición de comportamiento gris del medio participante, es decir, independiente de la longitud de onda de la radiación térmica. En trabajos previos (Rebollo, 2008b, 2009b; Rebollo et al. 2010; Rebollo y Rodriguez, 2011) se han presentados diferentes modelos para el tratamiento de gases no grises, los cuales no han sido implementados, por el momento, en este trabajo en geometrías esféricas.

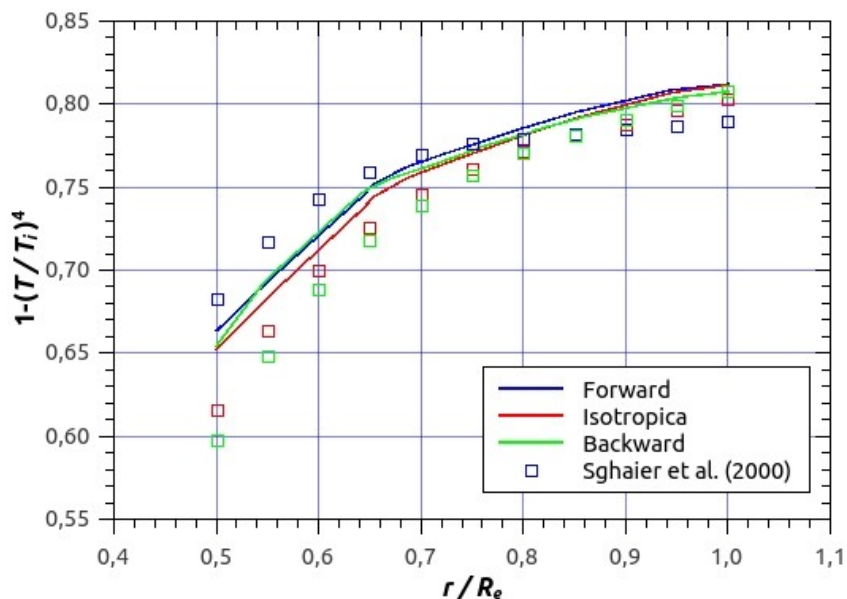


Figura 4: Influencia de la función de dispersión sobre la distribución de temperatura adimensional para $\varepsilon_i = \varepsilon_e = 0.5$, $T_e/T_i = 0.5$, $R_i/R_e = 0.5$ y $\tau_e = 1.0$.

3 RESULTADOS Y DISCUSIONES

En esta sección se hace una descripción muy breve de las configuraciones analizadas en este trabajo, las cuales fueron propuestas por algunos autores hace ya algún tiempo, y reproducidas a lo largo de los años en muchos trabajos publicados, por lo que se han transformado en configuraciones clásicas en el análisis de la transferencia radiante. Se presentan los resultados obtenidos al reproducir estas diferentes configuraciones térmicas, se hace un muy breve análisis de resultados y se comparan resultados mostrando algunos errores. Todos los resultados están expresados en el sistema internacional para facilitar la comparación con los publicados originalmente.

3.1 Incidencia difusa desde la pared isotérmica

Para el problema de la incidencia difusa desde la pared se consideran dos esferas concéntricas, isotérmicas, opacas, difusas y grises, de radio R_i y R_e , de temperaturas T_i y T_e y emisividades ε_i y ε_e . La cavidad entre las dos esferas concéntricas está rellena con un gas gris, absorbente, emisor y dispersante, de temperatura T_g , variable con el radio r , con un coeficiente de absorción κ , un coeficiente de dispersión σ y un espesor óptico $\tau = \beta r$. Este problema fue

estudiado por [Jia et al. \(1991\)](#), [Sghaier et al. \(2000\)](#), [Trabelsi et al. \(2005\)](#) y [Kim et al. \(2008a,b\)](#).

Tekkalmaz, Altac (2007)								
Ω	MVF Rebollo		Exacta		SK ₁		SK ₂	
	ρ	Γ	ρ	Γ	ρ	Γ	ρ	Γ
dispersión isotrópica								
0,1	0,14750	0,32817	0,14108	0,32366	0,14094	0,32372	0,14112	0,32376
0,3	0,22878	0,37639	0,22045	0,37226	0,21890	0,37280	0,22090	0,37340
0,5	0,33240	0,44297	0,32261	0,43931	0,31736	0,44077	0,32454	0,44363
0,7	0,47110	0,53979	0,46060	0,53669	0,44757	0,53911	0,46689	0,54898
0,9	0,67040	0,69119	0,66044	0,68867	0,63137	0,69036	0,67912	0,72087
dispersión anisotrópica lineal hacia adelante								
0,1	0,14252	0,33478	0,13626	0,33021	0,13614	0,33029	0,13633	0,33025
0,3	0,21491	0,39817	0,20695	0,39389	0,20560	0,39454	0,20782	0,39446
0,5	0,31182	0,48275	0,30240	0,47889	0,29788	0,48041	0,30584	0,48124
0,7	0,44722	0,60015	0,43676	0,59687	0,42550	0,59824	0,44683	0,60394
0,9	0,64784	0,77236	0,63694	0,76975	0,61132	0,76791	0,66367	0,78903
dispersión anisotrópica lineal hacia atrás								
0,1	0,15238	0,32175	0,14581	0,31730	0,14564	0,31732	0,14581	0,31740
0,3	0,24187	0,35630	0,23316	0,35233	0,23144	0,35259	0,23333	0,35358
0,5	0,35111	0,40791	0,34088	0,40445	0,33512	0,40530	0,34184	0,40930
0,7	0,49198	0,48849	0,48132	0,48557	0,46711	0,48734	0,48501	0,49972
0,9	0,68929	0,62402	0,68002	0,62157	0,64867	0,62378	0,69299	0,65994

Tabla 2: Reflectividad ρ y transmisividad Γ para diferentes albedos de dispersión Ω , dispersión isotrópica y anisotrópica, correspondientes al Caso A $\tau_i=1.0$, $\tau_e=2.0$.

En la [Tabla 1](#) se muestran resultados del flujo de calor adimensional en la misma forma que fue presentado en los trabajos citados $q^* = (r/R_e)(q_r/\gamma T_i^4)$ para diferentes combinaciones de temperaturas T_e/T_i , emisividades ε_i y ε_e , con una relación de radios $R_i/R_e=0.5$ y un espesor óptico $\tau_e=1.0$. Junto a los resultados obtenidos en este trabajo se incluyen los resultados de [Jia et al. \(1991\)](#), [Sghaier et al. \(2000\)](#), [Trabelsi et al. \(2005\)](#) y [Kim et al. \(2008a,b\)](#), de la comparación surge que el error máximo, en valor absoluto, tomando los resultados de este trabajo como valores de referencia, son respectivamente del 2.07%, 10.49%, 5.45%, 3.58%, 1.55% y 1.52%. Los resultados de [Sghaier et al. \(2000\)](#) son los que muestran mayores errores si se los compara con todos los resultados publicados. Comparando con los resultados de [Kim et al. \(2008b\)](#), que utilizan el MVF, se aprecia que el mayor error máximo es del 1.52%.

En la [Figura 1](#) se puede observar la influencia de la relación entre las temperaturas de la esfera exterior e interior sobre la distribución de la temperatura adimensional en el medio para $\varepsilon_i=\varepsilon_e=0.5$, $R_i/R_e=0.5$ y $\tau_e=1.0$. Allí se pueden comparar los resultados obtenidos en este trabajo con los resultados de [Sghaier et al. \(2000\)](#) y [Kim et al. \(2008b\)](#) donde se observa un muy buen nivel de coincidencia. Se advierte el salto de temperatura entre el gas, próximo a las esferas, y las paredes sólidas, como consecuencia de que la radiación térmica es el único modo de transferencia de energía presente, este salto se incrementa con la relación de temperaturas en las proximidades de la pared interior y no parece modificarse en las proximidades de la pared exterior. Como es natural, la temperatura adimensional se incrementa con el radio cuando la

temperatura de la pared exterior es mayor que la interior y disminuye en el caso contrario.

Tekkalmaz, Altac (2007)								
Ω	MVF Rebollo		Exact		SK ₁		SK ₂	
	ρ	Γ	ρ	Γ	ρ	Γ	ρ	Γ
dispersión isotrópica								
0,1	0,06467	0,04758	0,05996	0,04412	0,05983	0,04414	0,05995	0,04414
0,3	0,13948	0,06453	0,13016	0,06036	0,12882	0,06071	0,13006	0,06069
0,5	0,23949	0,09644	0,22620	0,09109	0,22179	0,09302	0,22600	0,09263
0,7	0,38749	0,16804	0,37216	0,16063	0,36163	0,16922	0,37216	0,16674
0,9	0,66157	0,38898	0,64996	0,37814	0,63115	0,42233	0,65371	0,40910
dispersión anisotrópica lineal hacia adelante								
0,1	0,05725	0,05027	0,05313	0,04664	0,05299	0,04661	0,05312	0,04665
0,3	0,11787	0,07558	0,11012	0,07081	0,10870	0,07060	0,11005	0,07097
0,5	0,20612	0,12279	0,19503	0,11633	0,19034	0,11660	0,19496	0,11708
0,7	0,34945	0,22342	0,33620	0,21460	0,32511	0,22011	0,33679	0,21778
0,9	0,63856	0,49510	0,62749	0,48426	0,60835	0,52514	0,63396	0,50178
dispersión anisotrópica lineal hacia atrás								
0,1	0,07189	0,04507	0,06660	0,04177	0,06649	0,04180	0,06659	0,04179
0,3	0,15945	0,05543	0,14853	0,05179	0,14738	0,05225	0,14843	0,05211
0,5	0,26876	0,07679	0,25325	0,07240	0,24932	0,07458	0,25299	0,07397
0,7	0,41944	0,12902	0,40193	0,12293	0,39234	0,13160	0,40165	0,12946
0,9	0,68053	0,31213	0,66813	0,30197	0,65012	0,34430	0,67029	0,33749

Tabla 3: Reflectividad ρ y transmisividad Γ para diferentes albedos de dispersión Ω , dispersión isotrópica y anisotrópica, correspondientes al Caso B $\tau_i=1.0$, $\tau_e=4.0$.

La [Figura 2](#) muestra la influencia del espesor óptico sobre la distribución de temperatura adimensional para $\varepsilon_i=\varepsilon_e=0.5$, $T_e/T_i=2.0$, $R_i/R_e=0.5$ y tres valores del espesor óptico τ . Junto a los resultados de este trabajo se muestran los correspondientes a [Kim et al. \(2008b\)](#). Se advierte que para el menor espesor óptico (medio ópticamente fino) la distribución de temperatura es más uniforme, al aumentar el espesor óptico se incrementa el gradiente de temperatura, llegando a un extremo casi lineal para el mayor espesor óptico (medio ópticamente grueso), semejante al caso de conducción. También se observa que los saltos de temperatura, entre las paredes de las esferas y el gas, en las inmediaciones de las paredes, se reducen al incrementarse el espesor óptico, debido al incremento de la absorción y emisión con el coeficiente de extinción.

En la [Figura 3](#) se puede observar la influencia del espesor óptico sobre la distribución de temperatura adimensional para las mismas condiciones de la [Figura 2](#), $\varepsilon_i=\varepsilon_e=0.5$, $T_e/T_i=2.0$, $R_i/R_e=0.5$ y $\tau=0.1;1.0;10.0$, donde la temperatura adimensional se presenta por medio de una función de la temperatura elevada a la cuarta potencia, tal cual la presentaron originalmente [Sghaier et al. \(2000\)](#). Esta función de la cuarta potencia de la temperatura dificulta la interpretación de los resultados, pero el análisis hecho para la [Figura 2](#) sigue siendo válido y solo se incluye por motivos de comparación.

Todos los resultados mostrados corresponden al caso de dispersión isotrópica, en la [Figura 4](#) se puede ver la influencia de la función de dispersión sobre la distribución de temperatura adimensional para $\varepsilon_i=\varepsilon_e=0.5$, $T_e/T_i=0.5$, $R_i/R_e=0.5$ y $\tau_e=1.0$, donde se incluyen los resultados de

Sghaier et al. (2000). Como en el caso de la Figura 3, Sghaier et al. (2000) emplean una función de la temperatura elevada a la cuarta potencia, lo que dificulta la interpretación de resultados. La función de dispersión anisotrópica hacia adelante (forward) y hacia atrás (backward) empleada por Sghaier et al. (2000) son las mismas que utilizaron Tsai y Özişik (1990). Si las paredes de las esferas fuesen negras, se debería esperar que los valores de la temperatura sean superiores para dispersión anisotrópica hacia adelante, intermedios en dispersión isotrópica y menores para dispersión hacia atrás, como las paredes reflejan en forma difusa la mitad de la radiación incidente, la componente reflejada por ambas paredes perturba esta distribución produciéndose un cruzamiento, tal cual lo reflejan los resultados de Sghaier et al. (2000). Este cruzamiento no es tan evidente en nuestros resultados, además, se observan diferencias apreciables entre nuestros resultados y los de Sghaier et al. (2000), estas diferencias son más notables en las cercanías de la pared interior que en la pared exterior. Recordando las diferencias expuestas en el análisis de la Tabla 1 respecto a los resultados de Sghaier et al. (2000), es muy probable que el problema se encuentre en la formulación matemática de las condiciones de borde, que para el caso de radiación térmica, resulta siempre un tema de controversia.

Tekkalmaz, Altac (2007)								
Ω	MVF Rebollo		Exact		SK ₁		SK ₂	
	ρ	Γ	ρ	Γ	ρ	Γ	ρ	Γ
dispersión isotrópica								
0,1	0,04857	0,27988	0,04566	0,27349	0,04552	0,27349	0,04566	0,27351
0,3	0,11500	0,31843	0,10750	0,31131	0,10597	0,31095	0,10749	0,31149
0,5	0,19932	0,37128	0,18786	0,36399	0,18248	0,36228	0,18796	0,36470
0,7	0,31153	0,44766	0,29797	0,44162	0,28387	0,43580	0,29867	0,44375
0,9	0,47166	0,56655	0,46120	0,56562	0,42731	0,54787	0,46416	0,57155
dispersión anisotrópica lineal hacia adelante								
0,1	0,04107	0,28643	0,03881	0,27968	0,03867	0,27968	0,03881	0,27969
0,3	0,09256	0,33993	0,08686	0,33197	0,08534	0,33174	0,08690	0,33210
0,5	0,16250	0,41078	0,15365	0,40250	0,14827	0,40107	0,15394	0,40305
0,7	0,26185	0,50891	0,25097	0,50205	0,23679	0,49648	0,25223	0,50384
0,9	0,41233	0,65392	0,40270	0,65209	0,36832	0,63405	0,40709	0,65736
dispersión anisotrópica lineal hacia atrás								
0,1	0,05590	0,27354	0,05234	0,26751	0,05221	0,26745	0,05223	0,26752
0,3	0,13589	0,29878	0,12660	0,29254	0,12516	0,29190	0,12657	0,29274
0,5	0,23192	0,33717	0,21789	0,33094	0,21277	0,32855	0,21788	0,33171
0,7	0,35321	0,39746	0,33704	0,39225	0,32355	0,38535	0,33740	0,39451
0,9	0,51851	0,49837	0,50720	0,49791	0,47465	0,47892	0,50925	0,50407

Tabla 4: Reflectividad ρ y transmisividad Γ para diferentes albedos de dispersión Ω , dispersión isotrópica y anisotrópica, correspondientes al Caso C $\tau_i=4.0$, $\tau_e=5.0$.

3.2 Incidencia difusa externa

El problema de la incidencia externa difusa en coordenadas esféricas consiste en un par de esferas concéntricas, cuyas superficies interior y exterior, junto con el medio que las separa, son transparentes a la radiación térmica externa. Para el caso analizado en este trabajo, la intensidad de radiación externa, ecuación (6), es unitaria $i_e=1W m^{-2} sr^{-1}$ y es la única fuente de

radiación, por lo que la intensidad incidente interna y las temperaturas de las paredes y del gas son nulas, $i_i=0$, $T_e=T_i=T_g=0$ K, las paredes son transparentes $\rho_i=\rho_e=1$, el coeficiente de extinción es constante $\beta=1\text{m}^{-1}$, el espesor óptico $\tau=\beta r$ en las paredes toma valores $\tau_i=1;4$ y $\tau_e=2;4;5$, el albedo de dispersión $\Omega=\sigma/\beta=0.1;0.3;0.5;0.7;0.9$ y, finalmente, la función de dispersión, ecuación (3), se considera isotrópica $M=0$, anisotrópica lineal $M=1$ hacia adelante $A_1=1$ y hacia atrás $A_1=-1$. Esta configuración fue estudiada primeramente por Tsai et al. (1989), para un medio homogéneo y heterogéneo, posteriormente, Altaç y Tekkalmaz (2004) fueron los primeros en mostrar que los resultados de Tsai et al. (1989) eran erróneos. Sin embargo, los resultados de Altaç y Tekkalmaz (2004) seguían siendo inseguros, incluso los presentados en Tekkalmaz y Altaç (2007) para un medio heterogéneo. Por este motivo, en este trabajo solo se comparan resultados para un medio homogéneo, dados por Tekkalmaz y Altaç (2007) que sí resultan precisos.

Las Tablas 2, 3 y 4 muestran resultados correspondientes a la reflectividad y transmisividad hemisférica tal cual la definieran Tsai et al. (1989), la reflectividad se calcula como la relación entre el flujo de calor saliente y el flujo de calor entrante sobre la esfera exterior $\rho=q^+(\tau_e)/q^-(\tau_e)$, mientras que la transmisividad se calcula como la relación entre el flujo de calor saliente por la esfera interior respecto al flujo de calor entrante por la esfera exterior $\Gamma=q^-(\tau_i)/q^-(\tau_e)$. Se incluyen resultados de Tekkalmaz y Altaç (2007) obtenidos al resolver la ecuación de la transferencia radiante con una solución exacta y una solución aproximada SK_n de primer orden ($n=1$) y segundo orden ($n=2$) para tres tamaños de esferas diferentes identificadas como Caso A ($\tau_i=1.0$, $\tau_e=2.0$), Caso B ($\tau_i=1.0$, $\tau_e=4.0$) y Caso C ($\tau_i=4.0$, $\tau_e=5.0$). Si se calculan los errores relativos tomando como valor de referencia los resultados correspondientes a la solución exacta, tal cual lo hicieron Tekkalmaz y Altaç (2007), se puede constatar que para el Caso A, con dispersión isotrópica, el error máximo en la reflectividad es del 4,55%, 4,40% y 2,38% para nuestros resultados, y los obtenidos con SK_1 y SK_2 respectivamente, mientras que para la transmisividad los errores son del 1,39%, 0,45% y 4,68%. Para dispersión anisotrópica lineal hacia adelante los errores son del 4,59%, 4,02% y 4,20% para la reflectividad y del 1,38%, 0,32% y 2,50% para la transmisividad y, para dispersión anisotrópica lineal hacia atrás, los errores son del 4,50%, 4,61% y 1,91% para la reflectividad y del 1,40%, 0,36% y 6,17% para la transmisividad. Para el Caso B se puede verificar que para dispersión isotrópica el error máximo en la reflectividad es del 7,85%, 2,89% y 0,58% mientras que para la transmisividad los errores son del 7,84%, 11,69% y 8,19%, para dispersión anisotrópica lineal hacia adelante, los errores son del 7,76%, 3,30% y 1,03% para la reflectividad y del 7,78%, 8,44% y 3,62% para la transmisividad, y para dispersión anisotrópica lineal hacia atrás, los errores son del 7,95%, 2,70% y 0,32% para la reflectividad y del 7,89%, 14,02% y 11,76% para la transmisividad. Finalmente, para el caso C, con dispersión isotrópica, el error máximo en la reflectividad es del 6,97%, 7,35% y 0,64% mientras que para la transmisividad los errores son del 2,34%, 3,14% y 1,05%, para dispersión anisotrópica lineal hacia adelante los errores son del 6,56%, 8,54% y 1,09% para la reflectividad y del 2,41%, 2,77% y 0,81% para la transmisividad, y para dispersión anisotrópica lineal hacia atrás, los errores son del 7,34%, 6,42% y 0,40% para la reflectividad y del 2,25%, 3,81% y 1,24% para la transmisividad.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un código computacional para el cálculo de la transferencia radiante en cavidades esféricas con paredes grises, difusas, reflectantes y transparentes, rellenas con un medio gris absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante.

El código computacional utiliza el método de los volúmenes finitos para resolver las

ecuaciones de la transferencia radiante junto con una expansión de los polinomios de Legendre para tener en cuenta los efectos de la dispersión anisotrópica.

Se han reproducido una gran cantidad de configuraciones geométricas y térmicas existentes en la literatura y se han evaluado la influencia de los parámetros radiantes más importantes.

Los resultados obtenidos fueron comparados con los resultados existentes en la literatura, donde se han usado métodos numéricos diferentes para resolver la ecuación de la transferencia radiante.

De la comparación de resultados se puede concluir que las herramientas computacionales desarrolladas en este trabajo proporcionan resultados con un grado de precisión aceptable.

Se ha verificado la capacidad del método de los volúmenes finitos para resolver problemas de radiación térmica siendo totalmente confiable y seguro para resolver las configuraciones térmicas analizadas en este trabajo.

REFERENCIAS

- Altaç Z., Tekkalmaz M., Radiative transfer in one-dimensional hollow sphere with anisotropic scattering and variable medium properties, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 83, Issue 1, Pages 115–117, 2004.
- An W., Ruan L. M., Qi H., Liu L. H., Finite element method for radiative heat transfer in absorbing and anisotropic scattering media, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 96, 409-422, 2005.
- Aouled-Dlala N., Sghaier T., Seddiki E., Numerical solution of radiative and conductive heat transfer in concentric spherical and cylindrical media, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 107, pp. 443–457, 2007.
- Armaly B. F., Saad A. N., Approximate solution to the radiative equilibrium between concentric spheres, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 12, Issue 4, Pages 511–518, 1972.
- Ben Abdallah P., Charette A., Le Dez V., Influence of a spatial variation of the thermo-optical constants on the radiative transfer inside an absorbing–emitting semi-transparent sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 70, Issue 3, Pages 341–365, 2001.
- Brewster M. Q., *Thermal radiative transfer and properties*, John Wiley & Sons, 1992.
- Byun D., Lee C., Baek S. W., Radiative heat transfer in discretely heated irregular geometry with an absorbing, emitting, and anisotropically scattering medium using combined Monte-Carlo and finite volume method, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 4195-4203, 2004.
- Cassell J. S., Williams M. M. R., Radiation transport and internal reflection in a sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 101, Issue 1, Pages 16–28, 2006.
- Cassell J. S., Williams M. M. R., Radiation transport and internal reflection in a two region, turbid sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 104, Issue 3, Pages 400–427, 2007.
- Chai J. C. K., *A finite volume method for radiation heat transfer*, PhD Thesis, 1994.
- Chui E. H. K., *Modeling of radiative heat transfer in participating media by the finite volume method*, PhD Thesis, 1990.
- Dombrovsky L. A., *Radiation heat transfer in disperse system*, Begell House, 1996.
- El-Wakil S. A., Haggag M. H., Attia M. T., Saad E. A., Radiative transfer in an inhomogeneous sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 40, Issue 1, Pages 71–78, 1988.
- Hao J., Ruan L., Tan H., Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular media, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*,

- 78, 151-161, 2003.
- He Y., Li P., Feng G., Wang Y., Liu Z., Zheng C., Wu H., Sha D., Computer modeling of a large-area integrating sphere uniform radiation source for calibration of satellite remote sensors, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, Vol. 122, Issue 13, Pages 1143–1145, 2011.
- Jia G., Yener Y., Cipolla Jr J. W., Radiation between two concentric spheres separated by a participating medium, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 46, pp. 11–19, 1991.
- Jones P. D., Bayazitoglu Y., Combined radiation and conduction from a sphere in a participating medium, *Proceedings of the Ninth International Heat Transfer Conference*, vol. 6, pp. 397-402, Hemisphere, Washington D.C., 1990.
- Kim M. Y., Baik S. W., Lee C. Y., Prediction of radiative heat transfer between two concentric spherical enclosures with the finite volume method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, Issues 19–20, Pages 4820–4828, 2008a.
- Kim M. Y., Cho J. H., Baik S. W., Radiative heat transfer between two concentric spheres separated by a two-phase mixture of non-gray gas and particles using the modified discrete-ordinates method, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 109, Issue 9, Pages 1607–1621, 2008b.
- Kim T. K., *Radiation and combined mode heat transfer analysis in absorbing, emitting, and Mie-anisotropic scattering media using the s-n discrete ordinates method*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1990.
- Loyalka S. K., Application of a variational technique to radiative transfer in a gray medium between concentric spheres, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 10, Issue 5, Pages 523–528, 1970.
- Modest M. F., *Radiative heat transfer*, Mc Graw-Hill, 1993.
- Olfe D. B., Application of a modified differential approximation to radiative transfer in a gray medium between concentric spheres and cylinders, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 8, Issue 3, Pages 899–907, 1968.
- Peraiah A., *An Introduction to Radiative Transfer, Methods and applications in astrophysics*, Cambridge University Press 2004.
- Pessoa-Filho J., Thynell S.T., Development of approximate solutions to radiative transfer in slabs and spheres, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 52, Issue 1, Pages 59–73, 1994.
- Pomraning G. C., Siewert C. E., On the integral form of the equation of transfer for a homogeneous sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 28, no. 6, pp. 503-506, 1982.
- Rebollo D., Análisis de la radiación térmica con dispersión anisotrópica de Mie en cavidades bidimensionales mediante el método de los volúmenes finitos, *XVIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2009a.
- Rebollo D., Análisis de la radiación térmica con dispersión anisotrópica en placas planas, *I Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, Octubre del 2008a.
- Rebollo D., Olivera M., Romero C., Simulación numérica de la radiación térmica no gris del vapor de h₂O en un medio plano, *II Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, San Juan, Argentina, Noviembre del 2010.
- Rebollo D., Rodríguez C., Análisis de la radiación térmica no gris del dióxido de carbono en un medio plano no isotérmico, *XIX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2011)*, Rosario, Argentina, Noviembre del 2011.
- Rebollo D., Simulación Numérica de la Radiación Térmica con Dispersión Anisotrópica de Mie mediante el Método de los Volúmenes Finitos, *XVI Congreso sobre Métodos*

- Numéricos y sus Aplicaciones*, Córdoba, Argentina, Octubre del 2007.
- Rebollo D., Simulación numérica de la radiación térmica de gases no grises en cavidades multidimensionales, *XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, San Luis, Argentina, Noviembre del 2008b.
- Rebollo D., Simulación numérica de la radiación térmica de gases no grises en un medio plano, *XVIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2009b.
- Ryhming, I. L., Radiative transfer between two concentric spheres separated by an absorbing and emitting gas, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 9, pp. 315-324, 1966.
- Sghaier T., Sifaoui M. S., Soufiani A., Study of radiation in spherical media using discrete ordinates method associated with the finite Legendre transform, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 64, pp. 339–351, 2000.
- Siegel R., Howell J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1992.
- Siewert C. E., Radiative transfer calculations in spheres and cylinders, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 34, Issue 1, Pages 59–64, 1985.
- Sparrow, E. M., Usiskin, C. M. y Hubbard H. A., Radiation heat transfer in a spherical enclosure containing a participating, heat-generating gas, *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 83, pp. 199-206, 1961.
- Tekkalmaz M., Altac Z., *Solution of radiative transfer problems in participating, linearly anisotropically scattering hollow spherical medium with SK_n method*, *J. of Thermal Science and Technology* 27, 1, 23-38, 2007.
- Thynell S. T., Ozicik M. N., Radiation transfer in an isotropically scattering homogeneous solid sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 33, no. 4, pp. 319-330, 1985.
- Trabelsi H., Sghaier T., Sifaoui M. S., A theoretical study of radiation between two concentric spheres using a modified discrete ordinates method associated with Legendre transform, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 93, pp. 415–428, 2005.
- Tsai J. R., Ozisik M. N., Santarelli F., Radiation in spherical symmetry with anisotropic scattering and variable properties, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 42, pp. 187–199, 1989.
- Viskanta R., Crosbie A. L., Radiative transfer through a spherical shell of an absorbing–emitting gray medium, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 7, pp. 871–889, 1967.
- Wilson S. J., Nanda T. R., Radiative transfer in absorbing, emitting and linearly anisotropically scattering inhomogeneous solid spheres, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 44, Issue 3, Pages 345–350, 1990.