

## REPRESENTACIONES CINEMÁTICAS DE ORIENTACIÓN Y ECUACIONES DE ESTIMACIÓN

Martín A. Pucheta<sup>a,b</sup>, Claudio J. Paz<sup>a</sup> y Maira E. Pereyra<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, {mpucheta,cpaz}@scdt.frc.utn.edu.ar, <http://ciii.frc.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras Clave:** Representaciones cinemáticas, Singularidad de orientación, Vehículos aéreos, Estimación de actitud.

**Resumen.** La representación cinemática de orientación ha sido motivo de investigación en diversas áreas, cronológicamente, en astronomía y física, en navegación y control de vehículos aéreos, en mecánica computacional de sólidos y mecanismos flexibles, en animación computada y realidad virtual, entre otras. Las diferentes representaciones de orientación conducen a conjuntos mínimos o redundantes, a diferentes situaciones para corregir singularidades o múltiples soluciones, a ventajas en el álgebra y a ventajas en la integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento en las cuales participan. En este trabajo, se revisan las representaciones con el objetivo de determinar cuál es la más adecuada para ser utilizada en ecuaciones de estimación de orientación, con aplicación a un vehículo aéreo no tripulado en cuyo sistema de control se fusionan señales de diversa naturaleza (giróscopo, acelerómetro y procesamiento de imágenes) para obtener una estimación mejor que las estimaciones individuales. Como resultado del estudio, se elige la representación de cuaternión unitario como la más conveniente, bajo el criterio de simplicidad del álgebra y de la eficiencia computacional. A futuro, se revisarán representaciones en el grupo de desplazamientos en  $SE(3)$  para estimar simultáneamente posición y orientación.

## 1. INTRODUCCIÓN

La representación cinemática de orientación ha sido motivo de investigación en diversas áreas de la ciencia e ingeniería, cronológicamente, se puede mencionar sus inicios en astronomía y física con aportes notables entre los siglos XVI y XIX (G. Cardano, L. Euler, W.R. Hamilton, W.K. Clifford, M.Chasles, A. Cayley, M. O. Rodrigues y C.F. Gauss ([Altmann, 1986](#); [Corke, 2011](#)), y más tarde se aplicaron en navegación y control de vehículos aéreos ([Stevens y Lewis, 1992](#); [Sidi, 1997](#); [Phillips y Hailey, 2001](#)), en cinemática teórica ([Bottema y Roth, 1979](#); [McCarthy, 1990](#)), en mecánica computacional de sólidos y mecanismos flexibles ([Geradin y Cardona, 2001](#)), en visión, animación computada y realidad virtual ([Kuipers, 1994](#); [Ma et al., 2010](#)), en robótica ([Murray et al., 1994](#)), y en control de vehículos no tripulados ([Corke, 2011](#)), entre otras aplicaciones.

Las diferentes representaciones de orientación conducen a conjuntos mínimos o redundantes (con el apropiado número de restricciones), a diferentes situaciones para corregir singularidades o múltiples soluciones de inversión, a ventajas en el álgebra y a ventajas computacionales en la integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento en las cuales participan.

En este trabajo, se revisan las representaciones con el objetivo de determinar cuál es la más adecuada para ser utilizada en ecuaciones de estimación de orientación, con aplicación a un vehículo aéreo no tripulado en cuyo sistema de control se desea fusionar señales obtenidas de orígenes diversos (giróscopo, acelerómetro, magnetómetro y procesamiento de imágenes) para obtener una estimación mejor que las estimaciones individuales ([Araguás et al., 2013](#); [Paz et al., 2013, 2014](#)). Como resultado del estudio, se elige la representación de cuaternión unitario como la más conveniente, bajo el criterio de simplicidad del álgebra y de la eficiencia computacional.

El trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 se describen operadores de rotación y diferentes parametrizaciones, cuyas singularidades se resúmen en la Subsección 2.3.6, y posteriormente, se introducen a los cuaterniones unitarios en la Subsección 2.4. En la Sección 3, se describen las ecuaciones de velocidad en las diferentes representaciones. La teoría anterior se aplica en la Sección 4, para escribir las ecuaciones de filtros Bayesianos de estimaciones de actitud. En la Sección 6 se describen las principales aportes y trabajos a futuro.

## 2. REVISION DE OPERADORES DE ROTACION Y PARAMETRIZACIONES

En este trabajo se muestran las derivaciones de operadores de rotación utilizados para describir el movimiento esférico de un cuerpo rígido, teniendo en cuenta que existe una diferencia con el cambio de coordenadas. Si bien, la diferencia es sutil, es de gran importancia. Cuando el interés es describir la orientación de un cuerpo rígido en el marco inercial, se utilizará el operador de rotación, esto es lo más común en sistemas multicuerpos, mecánica de sólidos y mecanismos para describir matricialmente el movimiento esférico.

En esta sección se muestran las formas de obtener las matrices de operadores de rotación disponibles en la literatura: [Bottema y Roth \(1979\)](#), [McCarthy \(1990\)](#), [Geradin y Cardona \(2001, Caps. 3 y 4\)](#) y [Trainelli \(2002\)](#). Por otro lado, en aplicaciones aeronáuticas, espaciales y, en general, en Sistemas de Navegación Inercial (SNI), es muy común tener información (adquirida con acelerómetros, giróscopos, magnetómetros, etc.) medida en terna del vehículo que se debe llevar al sistema fijo mediante un cambio de coordenadas, esta diferencia se aclarará al finalizar esta sección.

Para describir el movimiento esférico de un cuerpo rígido se considera una terna fija al mismo (denominada terna móvil, de cuerpo, material o no inercial), y otra terna fija de referencia denominada absoluta, inercial, o espacial. Aunque el cuerpo rígido puede rotar y además

trasladarse, para el análisis de las rotaciones se suponen a los orígenes de las ternas superpuestos.

Para producir el cambio de una terna a otra se recurre matemáticamente a una operación matricial que se demuestra que debe ser la multiplicación de cada vector base de la terna por una matriz ortogonal. Siguiendo a Geradin y Cardona (2001, Caps. 3 y 4), los vectores base de la terna fija se denotan como  $E_1, E_2, E_3$  y los de la terna móvil como  $e_1, e_2, e_3$ . Un vector posición en terna fija  $X$  rota a uno  $x$  mediante la transformación

$$x = RX \tag{1}$$

La matriz ortogonal multiplicada por un vector produce la rotación de un vector. Estas matrices tienen un elemento inverso, un elemento identidad y la multiplicación de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal, pero en general el producto no es conmutativo. Con estas propiedades las matrices ortogonales forman el grupo Especial de Orientación  $SO(3)$  (del inglés, *Special Orthogonal Group*) y el álgebra no conmutativa asociada es denotada  $so(3)$ .

El tensor ortogonal en el espacio Euclideo se puede representar por una matriz de nueve componentes para operar con el álgebra matricial. Los vectores de las columnas de la matriz de rotación son las coordenadas de los vectores de la terna móvil expresados en la terna fija, o bien, son los vectores base de la terna fija luego de la transformación de rotación, ver Fig. (1). La aplicación de un tensor ortogonal a un vector posición, preserva la longitud de un vector y

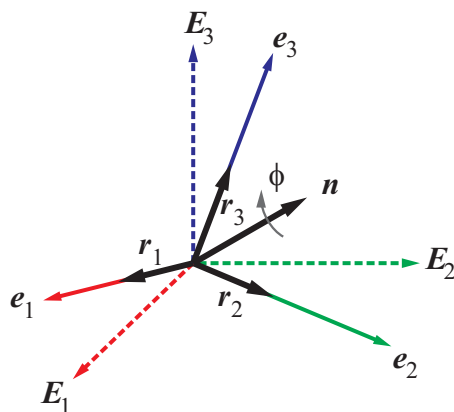


Figura 1: Interpretación del significado de las columnas de la matriz de rotación (adaptado de Ma et al. (2010))

para dos direcciones fijas al cuerpo, el ángulo entre las mismas también se preserva luego de la transformación. De aquí se deriva el requerimiento que debe cumplir una matriz ortogonal

$$x^T x = (RX)^T (RX) = X^T (R^T R) X = X^T X \Rightarrow R^T R = I \Rightarrow R^T = R^{-1} \tag{2}$$

Los vectores base de la terna espacial,  $E_1, E_2, E_3$ , forman un conjunto ortogonal derecho cuyo producto mixto es 1. La aplicación de la matriz de rotación debe preservar ortogonalidad y ser derecho también. Esto implica que la matriz de rotación tiene determinante 1 y es ortogonal propia. Esto se muestra considerando que la terna espacial, y respectivamente, la terna móvil satisfacen,

$$\begin{aligned} E_i \cdot E_j &= \delta_{ij} \quad \wedge \quad E_3 = E_1 \times E_2 \Rightarrow (E_1 \times E_2) \cdot E_3 = 1 \\ e_i \cdot e_j &= \delta_{ij} \quad \wedge \quad e_3 = e_1 \times e_2 \Rightarrow (e_1 \times e_2) \cdot e_3 = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

es decir, que arreglando a los vectores base de la terna fija y de la móvil como columnas de las matrices  $B$  y  $A$  respectivamente, por las Ecs. (3), tendrán determinante 1, luego la matriz de

rotación de la Ec. (1) es ortogonal propia,

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \quad \wedge \quad \det(\mathbf{B}) = 1$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{B} \therefore 1 = \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{R})\det(\mathbf{B}) = 1 \Rightarrow \det(\mathbf{R}) = 1, \quad (4)$$

Nótese que tomando determinante a la definición  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  obtendríamos  $\det(\mathbf{R}^T)\det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{I}) = 1$  que nos indica que  $\det(\mathbf{R}^T) = \pm 1$ , en donde las matrices ortogonales con determinante  $-1$  son reflexiones.

Para representar tres grados de libertad de rotación, en las nueve componentes de la matriz de rotación existen seis restricciones complementarias. Además, es fácil probar que la matriz de rotación está compuesta por los cosenos directores de los vectores base de las ternas que transforma,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{11}) & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{13}) \\ \cos(\alpha_{21}) & \cos(\alpha_{22}) & \cos(\alpha_{23}) \\ \cos(\alpha_{31}) & \cos(\alpha_{32}) & \cos(\alpha_{33}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Las seis restricciones complementarias, consisten de que los vectores columna son unitarios y las proyecciones entre ellos son nulas,

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \wedge i \leq j. \quad (6)$$

Euler demostró que existe un eje que se preserva fijo en la rotación. Utilizando álgebra lineal y la descomposición espectral de la matriz de rotación se puede demostrar que el tensor ortogonal tiene un solo autovalor real de valor unitario  $\lambda_1 = 1$  y su autovector real asociado  $\mathbf{n}$  define el eje de rotación, de modo que

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \lambda_1 \mathbf{n} = \mathbf{n}. \quad (7)$$

Los otros dos autovalores ( $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ ) son complejos y sus respectivos autovectores complejos ( $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{w}^*$ ) definen un plano ortogonal al eje de  $\mathbf{n}$ .

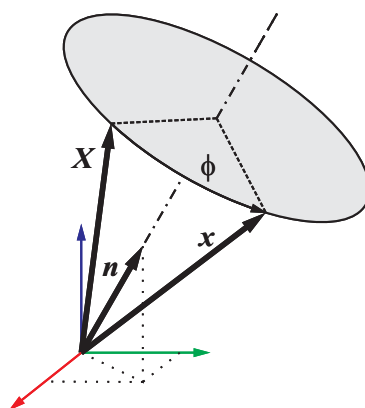
$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{w} &= \mathbf{R}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \lambda_2(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \exp(i\phi)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi) + i(\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi), \\ \mathbf{R}\mathbf{w}^* &= \mathbf{R}(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) = \lambda_3(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) = \exp(-i\phi)(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi) - i(\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi). \end{aligned} \quad (8)$$

A partir de los autovectores complejos se pueden construir dos vectores reales ortogonales

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= (\mathbf{w} + \mathbf{w}^*)/2 \\ \mathbf{c}_2 &= i(\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)/2. \end{aligned} \quad (9)$$

que ante la rotación, permanecen sobre el plano mencionado barriendo un ángulo  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \mathbf{R}\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1 \cos \phi - \mathbf{c}_2 \sin \phi \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{R}\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 \sin \phi + \mathbf{c}_2 \cos \phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Figura 2: Eje  $\mathbf{n}$  y ángulo de rotación  $\phi$  del movimiento esférico

El eje y el ángulo rotado forman un par de invariantes de la rotación  $(\mathbf{n}, \phi)$  muy intuitivos (ver Fig. 2) y permiten construir la matriz de rotación mediante una gran variedad de expresiones. Por otro lado, no configuran un conjunto mínimo, son un sistema de cuatro componentes ligadas por la condición de normalidad  $\|\mathbf{n}\| = 1$  (de modo que dadas dos componentes  $n_1$  y  $n_2$  del vector  $\mathbf{n}$  la tercera queda determinada  $n_3 = (1 - n_1^2 - n_2^2)^{0,5}$ ).

Utilizando el Teorema de Euler, es oportuno remarcar la relación entre el operador de rotación  $\mathbf{R}$  y un cambio de coordenadas expresado por la matriz de cambio de base  $\mathbf{C}$ . Como se ha mencionado, el operador  $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi)$  permite rotar vectores manteniendo fijo el sistema de coordenadas; a esta rotación se la llama rotación activa (Goldstein et al., 2001). Si dado un vector expresado en coordenadas en un sistema se requiere convertirlo a otro, el problema es un cambio de coordenadas. En la práctica, se necesita expresar un vector físico en coordenadas de ternas diferentes, por ejemplo, en una terna inercial  $I$  y en una terna de cuerpo  $B$ , o en más ternas según convenga, manteniendo el vector invariante. La rotación del marco coordenado se la considera una rotación pasiva. La relación entre el operador de rotación es tal que la matriz  $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi)$  al multiplicar por izquierda a un vector, lo gira en un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $\mathbf{n}$ , y esta matriz tiene las mismas componentes que la matriz de cambio de coordenadas que está girada un ángulo  $-\phi$  con respecto a la terna de origen, es decir, existe la correspondencia

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi) = \mathbf{C}(\mathbf{n}, -\phi)_I^B = \mathbf{C}(\mathbf{n}, \phi)_B^I = [\mathbf{C}(\mathbf{n}, -\phi)_I^B]^T. \quad (11)$$

Por ejemplo, un vehículo aéreo tiene una actitud dada por un conjunto de ángulos de Euler equivalentes a rotar el vehículo desde la orientación alineada con la terna inercial a aquella actual, mediante el operador  $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi)$ . Luego, el vector de empuje  $\mathbf{t}_B = [T \ 0 \ 0]^T$  expresado en coordenadas de terna del vehículo  $B$  puede expresarse en terna inercial como  $\mathbf{t}_I = \mathbf{C}(\mathbf{n}, \phi)_B^I \mathbf{t}_B$ , ó, utilizando su actitud, como  $\mathbf{t}_I = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi) \mathbf{t}_B$ .

A continuación se repasan métodos alternativos a la matriz de cosenos directores Ec. (5) para generar la matrices correspondientes a distintos operadores de rotación.

## 2.1. Secuencia de tres rotaciones sucesivas

La matriz de rotación se puede expresar en términos de tres ángulos independientes, que son los ángulos de rotación alrededor de tres ejes ortogonales, en una secuencia de rotaciones sucesivas con la restricción de que no haya repetición consecutiva del mismo eje. Esta restricción conduce a 12 combinaciones de secuencias de rotaciones, y se debe adoptar una convención. Por ejemplo, la secuencia  $x - y - z$  es utilizada en aeronáutica, y la secuencia con repetición de

ejes del tipo  $z-x-z$  es usada en física y en mecánica orbital. Con la secuencia de rotaciones se obtienen las expresiones para las matrices ortogonales  $3 \times 3$  que multiplicadas permiten obtener la matriz de rotación. El conjunto de parámetros es mínimo ya que coincide con el número de grados de libertad a representar.

Una terna en posición de referencia es girada un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x$ , un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y'$  y finalmente un ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z''$ , se expresa como el producto de matrices ortogonales

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_{z''}(\psi) \mathbf{R}_{y'}(\theta) \mathbf{R}_x(\phi) = \mathbf{C}(\phi, \theta, \psi)_B^I \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

De modo que un punto del cuerpo representado por el vector  $\mathbf{X}$  en la terna de referencia, es transformado a su posición actual como

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{X} = \mathbf{R}_{z''}(\psi) \mathbf{R}_{y'}(\theta) \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{X} \quad (13)$$

Esta secuencia es también conocida como la secuencia de *Ángulos de Tait-Bryan*, o de rolado, cabeceo y guiñada o rumbo (en inglés, *roll*, *pitch* y *yaw*).

En la transformación inversa, se rota a un vector de su posición actual a la de referencia, o en términos de cambio de coordenadas, se expresa un vector en coordenadas de terna de inercial en términos de la terna de cuerpo como

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^T \mathbf{x} = \mathbf{R}_{X''}(\phi)^T \mathbf{R}_{Y'}(\theta)^T \mathbf{R}_Z(\psi)^T \mathbf{x} \quad (14)$$

donde la matriz de rotación se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^T &= \mathbf{R}_{X''}(\phi)^T \mathbf{R}_{Y'}(\theta)^T \mathbf{R}_Z(\psi)^T = \mathbf{C}(\phi, \theta, \psi)_I^B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

en donde debe tenerse cuidado en la convención adoptada ya que los ángulos reciben igual nombre pero las transformaciones son secuencias de giros izquierdos de  $\psi$  alrededor del eje  $Z$ , de  $\theta$  alrededor del eje  $Y'$  y de  $\phi$  alrededor del eje  $X''$ , resultando en la matriz de la Ec. (15) que es la transpuesta de la Ec. (12).

La secuencia de un segundo grupo es la que repite eje de rotación, y los ángulos son los denominados *Ángulos de Euler*, ver Fig. (3) y transforman a un vector como

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{X} = \mathbf{R}_{z''}(\psi) \mathbf{R}_{x'}(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{X}. \quad (16)$$

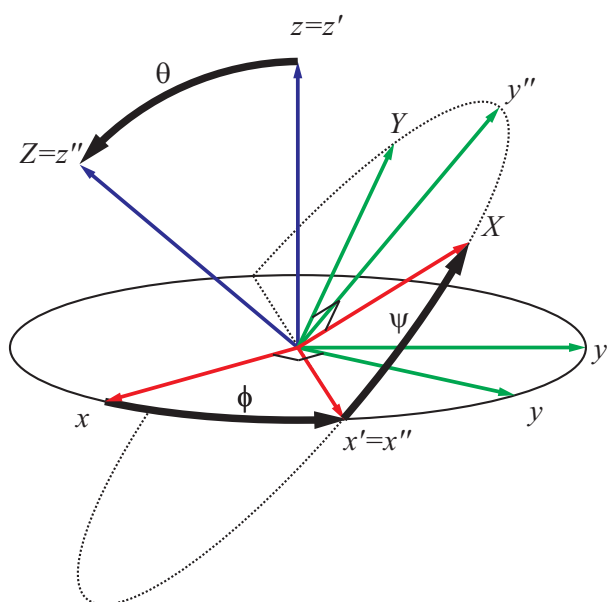


Figura 3: Ejemplo de rotación de una terna en sus ángulos de Euler

La terna de coincidente con la inercial es girada alrededor un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $z$ , un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x'$  y finalmente un ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z''$ , se expresa como el producto de matrices ortogonales

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_{z''}(\psi) \mathbf{R}_{x'}(\theta) \mathbf{R}_z(\phi) = \mathbf{C}(\phi, \theta, \psi)_B^I \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \psi \sin \phi - \cos \phi \cos \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \psi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

de modo que esta matriz expresa también el cambio de coordenadas  $\mathbf{C}(\phi, \theta, \psi)_B^I$  de la terna de cuerpo a terna inercial (Goldstein et al., 2001).

## 2.2. Otros operadores de rotación en forma de matrices $3 \times 3$

Los vectores posición antes de la rotación  $\mathbf{X}$  y después de la rotación  $\mathbf{x}$  mostrados en la Fig. (4) se pueden descomponer en la dirección del eje de rotación  $\mathbf{n}$  y en sus proyecciones  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}_n \mathbf{X}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{P}_n \mathbf{x}$  sobre el plano ortogonal a  $\mathbf{n}$  (donde el operador de proyección es  $\mathbf{P}_n = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ , y el símbolo  $\otimes$  indica el producto tensorial o externo),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_n) \mathbf{X} + \mathbf{Y} \\
 \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_n) \mathbf{x} + \mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Luego, se utiliza el hecho de que las proyecciones sobre  $\mathbf{n}$  son invariantes lineales ante la rotación

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_n) \mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_n) \mathbf{x} \tag{19}$$

y que las proyecciones sobre el plano normal (ver Fig. 4) preservan longitud y satisfacen si-

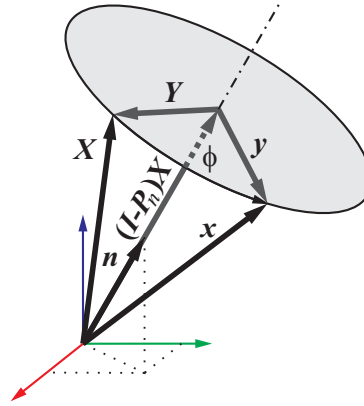


Figura 4: Descomposición de los vectores actual  $\mathbf{X}$  y rotado  $\mathbf{x}$  como suma de vectores en la dirección del eje de rotación y vectores proyectados sobre el plano perpendicular al eje de rotación

multáneamente

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} \times \mathbf{y} &= \|\mathbf{Y}\| \|\mathbf{y}\| \mathbf{n} \sin \phi = \|\mathbf{Y}\|^2 \mathbf{n} \sin \phi \\ \mathbf{Y} \cdot \mathbf{y} &= \|\mathbf{Y}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi = \|\mathbf{Y}\|^2 \cos \phi,\end{aligned}\quad (20)$$

para demostrar (Geradin y Cardona, 2001) que el operador de rotación toma la forma denominada *Fórmula de rotación de Rodrigues*,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \cos(\phi) + (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi \quad (21)$$

donde  $\tilde{\mathbf{n}} = \text{spin}(\mathbf{n})$  es la matriz antisimétrica que transforma linealmente a un vector obteniendo el mismo resultado que con el producto vectorial  $\tilde{\mathbf{n}} \mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}$ , y la operación de transformación que toma el vector axial de una matriz es  $\mathbf{n} = \text{vect}(\tilde{\mathbf{n}})$ .

La fórmula de Rodrigues (21) combinada con la descomposición espectral y propiedades del álgebra tensorial, permiten obtener fácilmente los invariantes lineales

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{R}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 \cos \phi \\ \text{vect}(\mathbf{R}) &= \mathbf{n} \sin \phi\end{aligned}\quad (22)$$

Derivando a la Ec.(1) miembro a miembro con respecto a  $\phi$ , y usando la Ec.(21), se puede plantear la ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\phi} - \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{x} = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{X} \quad (23)$$

cuya solución es

$$\mathbf{x} = \exp(\tilde{\mathbf{n}}\phi) \mathbf{X} \quad (24)$$

donde

$$\mathbf{R} = \exp(\tilde{\mathbf{n}}\phi) \quad (25)$$

otorgando al operador de rotación su forma más compacta posible en función de sus invariantes.

## 2.3. Parametrizaciones

### 2.3.1. Vector de rotación cartesiano

Deriva de considerar un vector  $\Psi$  con dirección coincidente con el eje de Euler y de magnitud igual al ángulo rotado  $\phi$ , y la matriz de rotación puede obtenerse del mapeo exponencial de la Ec. (25),

$$\Psi = \mathbf{n}\phi \quad \therefore \quad \mathbf{R} = \exp(\tilde{\Psi}), \quad (26)$$



o en su forma trigonométrica

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \tilde{\Psi} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}. \quad (27)$$

### 2.3.2. Parametrización de Rodrigues

Deriva de considerar un vector  $\mathbf{b}$  con dirección coincidente con el eje de Euler y de magnitud  $\tan(\phi/2)$ .

$$\mathbf{b} = \tan(\phi/2)\mathbf{n}. \quad (28)$$

La demostración proviene de utilizar la fórmula de Cayley de la matriz ortogonal y geométricamente de las propiedades de ortogonalidad que tienen las diagonales  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  del romboide que tiene por lados el vector antes  $\mathbf{X}$  y después de la transformación  $\mathbf{x}$ ; ver Fig. (5).

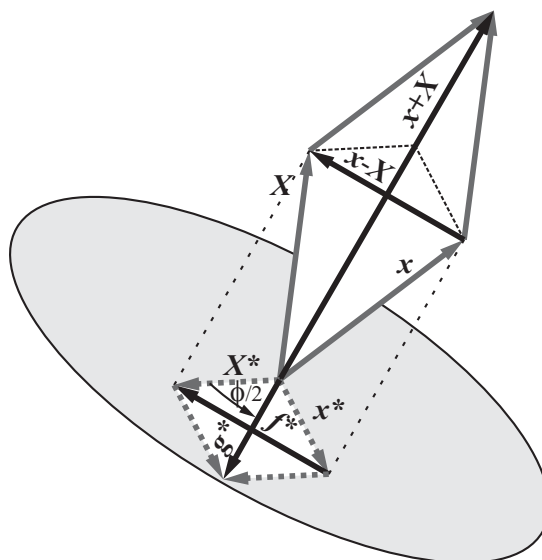


Figura 5: Construcción geométrica utilizada para derivar la Fórmula de Cayley correspondiente a la rotación ilustrada previamente en las Figs. (2) y (4)

La condición de preservación de distancia ante la transformación es que resulte nula la diferencia de cuadrados de estos dos vectores, y esto equivale también a la proyección nula (u ortogonalidad) de las diagonales

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{X}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 0. \quad (29)$$

De la diagonal mayor  $\mathbf{g} = \mathbf{x} + \mathbf{X} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})\mathbf{X}$  se puede despejar el  $\mathbf{X} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{g}$  y sustituir en la expresión homóloga de la diagonal menor  $\mathbf{f} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{X}$ , obteniendo la relación entre las diagonales

$$\mathbf{g} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{f}. \quad (30)$$

Sustituyendo  $\mathbf{g}$  de la Ec. (30) en  $\mathbf{g}$  de la Ec. (29) se obtiene

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{f} \cdot ((\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{f}) = 0, \quad (31)$$

y para que esta forma cuadrática se anule, necesariamente  $\mathbf{B} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{I})$  debe ser antisimétrica.

La matriz de rotación puede expresarse en función de esta matriz antisimétrica por medio de la llamada *Fórmula de Cayley*

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{B}) \quad (32)$$

El vector asociado a la matriz  $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{b}}$  es el Vector de Rodrigues. Su magnitud se puede obtener de la relación entre las proyecciones del romboide y sus diagonales sobre el plano normal al eje de rotación. En la Fig. (5), se muestra que  $\mathbf{f}^*$  y  $\mathbf{g}^*$  son las diagonales proyectadas, se cumple que  $\mathbf{f}^* = \mathbf{B}\mathbf{g}^* = \mathbf{b} \times \mathbf{g}^*$ , luego, las magnitudes de este producto satisfacen

$$\|\mathbf{f}^*\| = \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{g}^*\|, \quad (33)$$

además, del triángulo rectángulo formado por las semidiagonales  $\mathbf{f}^*/2$  y  $\mathbf{g}^*/2$  se obtiene

$$\tan(\phi/2) = \|\mathbf{g}^*\|/\|\mathbf{f}^*\|, \quad (34)$$

que reemplazada en la anterior permite obtener la magnitud del Vector de Rodrigues

$$\|\mathbf{b}\| = \tan(\phi/2). \quad (35)$$

La matriz de rotación puede expresarse por la fórmula de Cayley (32) o bien reducirse a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2}(\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}) \\ &= \frac{1}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \begin{bmatrix} 1 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 & 2(b_1b_2 - b_3) & 2(b_1b_3 + b_2) \\ 2(b_1b_2 + b_3) & 1 - b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 & 2(b_2b_3 - b_1) \\ 2(b_1b_3 - b_2) & 2(b_2b_3 + b_1) & 1 - b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

### 2.3.3. Parámetros de Euler

Deriva de considerar un parámetro  $e_0 = \cos(\phi/2)$  y tres parámetros formando un vector  $\mathbf{e}$  con dirección coincidente con el eje de Euler y de magnitud  $\sin(\phi/2)$ .

$$[e_0 \ \mathbf{e}] = [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3] = [\cos(\phi/2) \ \sin(\phi/2)n_x \ \sin(\phi/2)n_y \ \sin(\phi/2)n_z] \quad (37)$$

los parámetros tienen dominio  $-1 \leq e_i \leq 1$  y están sujetos a la restricción

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (38)$$

La forma del operador de rotación es una expresión cuadrática

$$\mathbf{R} = (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + 2e_0\tilde{\mathbf{e}} \quad (39)$$

o bien, puede obtenerse del producto de dos matrices  $4 \times 3$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= [-\mathbf{e} \ e_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}}] \\ \mathbf{G} &= [-\mathbf{e} \ e_0\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}}] \end{aligned} \quad (40)$$

que son expresiones lineales de los parámetros de Euler

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{G}^T = [-\mathbf{e} \ e_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}}][-\mathbf{e} \ e_0\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}}]^T. \quad (41)$$

Estos parámetros están relacionados al vector de Rodrigues por

$$\mathbf{b} = \frac{1}{e_0}\mathbf{e} \quad (42)$$

y además están relacionados al cuaternión unitario, por eso al cuaternión unitario se lo denomina también Formulación de cuaterniones de Euler-Rodrigues.

### 2.3.4. Parámetros del Vector de Rotación Conforme (VRC)

Se obtiene a través de una transformación conforme aplicada a los parámetros de Euler.

$$c_i = \frac{4e_i}{1+e_0} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad \mathbf{c} = 4\mathbf{n} \frac{\phi}{4} \quad c_0 = \frac{1}{8}[16 - \|\mathbf{c}\|^2] \quad (43)$$

El operador de rotación resulta en

$$\mathbf{R} = \frac{1}{(4-c_0)^2} [(c_0^2 + 8c_0 - 16)\mathbf{I} + 2\mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + 2c_0\tilde{\mathbf{c}}] = \mathbf{F}^2 \quad (44)$$

donde  $\mathbf{F}$  se obtiene reemplazando en la Fórmula de Rodrigues Ec. (21) a  $\mathbf{b} = \frac{1}{4}\mathbf{c}$  y separa a la rotación en dos rotaciones iguales de amplitud  $\phi/2$ .

### 2.3.5. Parámetros lineales

Se definen en forma similar a los parámetros de Euler pero consideran el giro completo, hay un parámetro  $s_0 = \cos(\phi)$  y tres parámetros formando un vector  $\mathbf{s}$  con dirección coincidente con el eje de Euler y de magnitud  $\sin(\phi)$ ,

$$[s_0 \ \mathbf{s}] = [s_0 \ s_1 \ s_2 \ s_3] = [\cos(\phi) \ \sin(\phi)n_x \ \sin(\phi)n_y \ \sin(\phi)n_z], \quad (45)$$

donde los parámetros tienen dominio  $-1 \leq s_i \leq 1$  y están sujetos a la restricción

$$s_0^2 + \|\mathbf{s}\|^2 = 1. \quad (46)$$

La matriz de rotación se expresa como

$$\mathbf{R} = s_0\mathbf{I} + \frac{1}{(1+s_0)}\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{F}^2, \quad (47)$$

que si bien es más simple que las vistas anteriormente, posee una clara singularidad cuando  $\phi = \pm\pi$ .

Para una completa generación y clasificación de las parametrizaciones vectoriales mostradas arriba mediante el empleo de funciones generadoras, referimos al lector al trabajo de [Trainelli \(2002\)](#).

### 2.3.6. Resumen de singularidades

Utilizar la forma de ángulos de Tait-Bryan para representar la orientación de un vehículo aéreo, por ejemplo de un cuadricóptero tiene principalmente dos inconvenientes: el primero es el elevado número de productos y sumas de funciones trigonométricas que se emplean sólo para formar la matriz de rotación de Ec. (16 productos, 4 sumas, 3 cosenos y 3 senos). El segundo y más importante, es el efecto conocido como *gimbal lock*. Este fenómeno aparece si se rota alrededor del eje  $y'$  un ángulo  $\theta = \pi/2$ , es decir, que el vehículo esté en posición vertical con la nariz hacia arriba. En este caso, los planos de rotación alrededor del eje  $z$  y el eje  $x''$  son coincidentes y cualquier cambio en  $\phi$  podría ser anulado con una variación de  $\theta$  lo que hace imposible su compensación.

Formalmente, si en la Ec.(12) se hace  $\theta = \pi/2$  resultará que  $\cos \theta = 0$  y  $\sin \theta = 1$  quedando

$$\mathbf{R}(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi \sin \psi - \cos \psi \sin \phi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ 0 & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi - \cos \phi \sin \psi \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Usando algunas identidades trigonométricas se puede simplificar la ecuación (48) aún más para lograr

$$\mathbf{R}(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi) = \begin{bmatrix} 0 & \text{sen}(\phi - \psi) & \text{cos}(\phi - \psi) \\ 0 & \text{cos}(\phi - \psi) & -\text{sen}(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

en donde se evidencia la pérdida de un grado de libertad, causando que existan distintas combinaciones de  $\phi$  y  $\psi$  para obtener la misma rotación  $c$ , es decir,  $\phi - \psi = c$ . Lo mismo ocurre para los ángulos de Euler, evaluando la expresión de la Ec. (17) con  $\theta = 0$  ya que existirán múltiples soluciones para  $\phi + \psi = c$ . En cualquier forma de los ángulos de Euler es imposible evitar tener una singularidad, esto se debe a que son una parametrización local del  $SO(3)$  ya que son adecuados solamente dentro de una porción del espacio.

Con respecto a las parametrizaciones, el vector de rotación Cartesiano tiene una fácil interpretación geométrica y no posee singularidades matemáticas, el costo computacional de la evaluación de funciones trascendentes en la forma exponencial o trigonométrica puede reducirse si usa la expansión en series truncada, muy útil para realizar linealizaciones y emplear ángulos pequeños. En la representación con parámetros de Rodrigues, la obtención de la matriz de rotación requiere de una evaluación de función trigonométrica para obtener  $\mathbf{b}$  y luego la obtención del operador de rotación es algebraica. Sin embargo, en la inversión para obtener  $\mathbf{b}$  desde  $\mathbf{R}$  existe una singularidad cuando  $\phi = \pm\pi$ . Cuando el ángulo rotado es cero, existen múltiples direcciones posibles para  $\mathbf{n}$  en la definición de  $\psi$  ó  $\mathbf{b}$ , pero esta singularidad aparente se salva considerando que

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \mathbf{R}(\phi \mathbf{n}) = \lim_{\phi \rightarrow 0} \mathbf{R}(\tan(\phi/2) \mathbf{n}) = \mathbf{I}. \quad (50)$$

Tanto en la parametrización con el vector de rotación Cartesiano como en la de Rodrigues, se interpreta claramente que hay tres parámetros independientes. En cambio, en la representación en parámetros de Euler los cuatro parámetros tienen un rol similar, son cantidades algebraicas puras vinculadas por la restricción (38). Su inversión desde  $\mathbf{R}$  (que tiene la ventaja de ser cuadrática en los parámetros) no posee singularidades, requiere una simple búsqueda del parámetro mayor para luego obtener los otros en función de éste mediante ecuaciones algebraicas de equivalencia. Como veremos en la próxima sección la representación en parámetros de Euler es homeomórfica con la representación en cuaterniones unitarios.

El Vector de Rotación Conforme no produce singularidades en la inversión como lo hacen los parámetros de Rodrigues, agregando pocos términos a la fórmula de obtención de  $\mathbf{R}$  y son numéricamente convenientes para integración con la regla del punto medio (Geradin y Cardona, 2001). Los Parámetros Lineales también admiten la descomposición  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^2$ , más simple aún que el VRC, pero deben usarse cuidadosamente en el rango no singular del ángulo de rotación.

#### 2.4. Cuaterniones y matrices $4 \times 4$

Los números complejos permiten realizar rotaciones en el plano. Los cuaterniones son números hipercomplejos que con la restricción de ser unitarios permiten, de manera totalmente

diferente, conducir al mismo concepto de los parámetros de Euler para producir la rotación (McCarthy, 1990; Geradin y Cardona, 2001). Un cuaternión se define como el número complejo de 4 dimensiones

$$\hat{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (51)$$

donde  $q_0$  es la parte escalar real,  $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$  es la parte vectorial compleja, y los números imaginarios  $i, j$ , y  $k$  satisfacen las siguientes reglas de multiplicación

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad \rightarrow \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \\ ij = -ji = k. \end{aligned} \quad (52)$$

Con estas reglas, el producto de cuaterniones obedece a

$$\hat{r} = \hat{p}\hat{q} = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (53)$$

el cual es no conmutativo debido a la presencia del producto vectorial en el último término.

El cuaternión conjugado tiene invertido el signo de la parte vectorial

$$\hat{q}^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k = q_0 - \mathbf{q} \quad (54)$$

y permite obtener mediante el producto con el cuaternión original, el cuadrado de la norma, que se calcula como

$$\|\hat{q}\|^2 = \hat{q}\hat{q}^* = q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad (55)$$

Para representar rotaciones finitas se emplean cuaterniones unitarios definidos como

$$\hat{e} = e_0 + \mathbf{e} \quad / \quad \|\hat{e}\| = 1 \quad (56)$$

y cuaterniones vectoriales o puros (con parte escalar nula) para representar puntos, por ejemplo, de coordenada  $\mathbf{v}$

$$\hat{v} = 0 + \mathbf{v} \quad \text{verificando} \quad \hat{v} + \hat{v}^* = 0 \quad (57)$$

De este modo, dado el cuaternión unitario  $\hat{e}$ , la rotación de un punto  $\mathbf{X}$  en el espacio tridimensional a su nueva posición  $\mathbf{x}$  está dada por la secuencia de productos

$$\hat{x} = \hat{e}\hat{X}\hat{e}^* \quad (58)$$

y la inversa de la rotación por

$$\hat{X} = \hat{e}^*\hat{x}\hat{e} \quad (59)$$

La composición de dos rotaciones sucesivas  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{e}_1\hat{X}\hat{e}_1^* \\ \hat{x}_2 &= \hat{e}_2(\hat{e}_1\hat{X}\hat{e}_1^*)\hat{e}_2^* \\ \hat{x}_2 &= (\hat{e}_2\hat{e}_1)\hat{X}(\hat{e}_1^*\hat{e}_2^*) \rightarrow \\ \hat{x} &= \hat{e}\hat{X}\hat{e}^* \quad / \quad \hat{e} = \hat{e}_2\hat{e}_1 \end{aligned} \quad (60)$$

La equivalencia con los parámetros de Euler se obtiene de poner al cuaternión unitario en la forma

$$\hat{e} = \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha \quad / \quad \|\mathbf{n}\| = 1, \quad (61)$$

con  $-\pi < \alpha \leq \pi$  (Kuipers, 1994, Cap. 5).

Luego la rotación queda expresada como

$$\hat{x} = 0 + (\cos(2\alpha)\mathbf{I} + (1 - \cos(2\alpha))\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin(2\alpha)\tilde{\mathbf{n}})\mathbf{X} \quad (62)$$

que claramente es la aplicación de la fórmula de Rodrigues (21) tomando  $\alpha = \phi/2$ , por lo que la matriz de rotación es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_3e_0) & 2(e_1e_3 - e_2e_0) \\ 2(e_1e_2 - e_3e_0) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_1e_0) \\ 2(e_1e_3 + e_2e_0) & 2(e_2e_3 - e_1e_0) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Esta equivalencia se deduce con mayor claridad utilizando la forma matricial del producto de cuaterniones, en forma de matrices  $4 \times 4$  y poniendo al cuaternión como vector el columna  $\hat{\mathbf{q}} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ .

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{p}\hat{\mathbf{q}} \quad \equiv \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_p\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_q\hat{p} \quad (64)$$

donde las matrices ortogonales  $4 \times 4$  tienen la forma

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

donde de las partes vectoriales de los cuaterniones se obtienen las matrices antisimétricas  $\tilde{\mathbf{p}} = \text{spin}(\mathbf{p})$  y  $\tilde{\mathbf{q}} = \text{spin}(\mathbf{q})$ .

Con estas definiciones, la expresión matricial equivalente de la rotación es

$$\hat{x} = \hat{e}\hat{X}\hat{e}^* \quad \equiv \quad \hat{x} = \mathbf{A}_e\mathbf{B}_e^T\hat{X} \quad (66)$$

donde

$$\mathbf{A}_e\mathbf{B}_e^T = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_{3 \times 3} = (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + e_0\tilde{\mathbf{e}}) \quad (67)$$

que se expande en componentes de cuaternión orientación como la Ec.(63).

Cabe destacar que la composición de dos rotaciones como producto de dos matrices del tipo  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  requiere de 27 multiplicaciones y 18 sumas, mientras que en forma de cuaterniones, la Ec. (60) en la forma matricial de la Ec. (64), requiere 16 multiplicaciones y 12 sumas.

### 3. EXPRESIONES DE LA VELOCIDAD DE ROTACIÓN

Asumiendo la rotación de los puntos de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo gobernada por la ley que transforma a cada punto  $P$  como

$$\mathbf{x}(t)_P = \mathbf{R}(t)\mathbf{X}(t)_P. \quad (68)$$

La derivada miembro a miembro de la propiedad de la matriz ortogonal  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  resulta en

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{0} \rightarrow \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T \quad (69)$$

y expresa que la matriz  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  es antisimétrica, y se la define como

$$\tilde{\omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{donde} \quad \omega = \text{vect}(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T) \quad (70)$$

La velocidad de un punto  $P$  se obtiene derivando la Ec. (68), reemplazando a  $\mathbf{X}_P$  que es invariante en el tiempo por  $\mathbf{R}^T \mathbf{x}_P$ , y considerando la definición (70)

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}_P = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^T \mathbf{x}_P) = \tilde{\omega} \mathbf{x}_P = \omega \times \mathbf{x}_P. \quad (71)$$

Para obtener la velocidad material del punto  $P$  se procede de igual modo, realizando la derivada  $\frac{d}{dt}(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = 0$ , en donde se define

$$\tilde{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{con} \quad \Omega = \text{vect}(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T) \quad (72)$$

Con esta definición, la velocidad material de traslación se expresa mediante la transformación de la velocidad espacial a coordenadas materiales

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{R}^T \mathbf{v}_P = \mathbf{R}^T (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}_P) = \tilde{\Omega} \mathbf{X}_P = \Omega \times \mathbf{X}_P \quad (73)$$

Despejando a  $\dot{\mathbf{R}}$  de la Ec. (72) se obtienen las denominadas ecuaciones cinemáticas de Poisson

$$\dot{\mathbf{R}} = \tilde{\Omega} \mathbf{R} \quad (74)$$

también conocida como ecuación diferencial *strap-down* de navegación ya que los elementos de las matrices  $\tilde{\Omega}$  y  $\mathbf{R}$  se obtienen por integración de mediciones *atrapadas* en el vehículo (acelerómetros y giróscopos), y se *bajan* a tierra para determinar la velocidad de rotación espacial  $\dot{\mathbf{R}}$ , es decir, la tasa de cambio temporal de la matriz de cosenos directores. Esta expresión consiste de nueve ecuaciones diferenciales sujeta a seis restricciones y se conoce que trabajar con estas ecuaciones produce pérdida de ortogonalidad de la matriz de rotación (Phillips y Hailey, 2001).

### 3.1. Velocidad angular en Ángulos de Euler

El conjunto mínimo de ecuaciones diferenciales se obtiene en términos de ángulos de Euler, que no pueden considerarse vectores. Sin embargo, sus derivadas pueden arreglarse en forma vectorial para facilitar su integración. Las derivadas de los ángulos de Euler toman la expresión

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi / \sin \theta & \cos \psi / \sin \theta & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\cos \theta \sin \psi / \sin \theta & -\cos \psi \cos \theta / \sin \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (75)$$

y los de Bryan la expresión

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \sin \theta / \cos \theta & (\cos \phi \sin \theta) / \cos \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (76)$$

donde  $\omega_B = pe_1 + qe_2 + re_3$  es el vector de velocidad angular expresado en terna de cuerpo. Pero se puede notar que las matrices tienen denominadores que hacen singulares entradas en la primer y última fila, en casos en que  $\sin \theta = 0$  para ángulos de Euler y cuando  $\cos \theta = 0$  en los de Bryan. Esto complica a la integración y, en general, se evita emplearlas.

### 3.2. Velocidad angular en diferentes parametrizaciones

En otras representaciones, conviene representar a la velocidad en términos del operador tangente que adquiere formas diversas. Como procedimiento (Geradin y Cardona, 2001), se tiene como punto de referencia a las expresiones de velocidad angular, espacial y material, en términos de los invariantes, el eje de Euler  $\mathbf{n}$  y el ángulo de rotación  $\phi$ , y sus derivadas

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}^T \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n} \dot{\phi} \\ \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{M} \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n} \dot{\phi} \quad \text{donde} \quad \mathbf{M} = \sin \phi \mathbf{I} - (1 - \cos \phi) \tilde{\mathbf{n}}\end{aligned}\quad (77)$$

Luego, por cada parametrización  $\mathbf{a}$ , se obtienen las expresiones de  $\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$  y  $\dot{\phi}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$ , se reemplazan en las Ecs.(77) para identificar al operador tangente  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ .

Se resumen a continuación las expresiones de algunos operadores

#### 1. Vector de rotación Cartesiano:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}) &= \mathbf{I} + \left( \frac{\cos \phi - 1}{\phi^2} \right) \tilde{\boldsymbol{\Psi}} + \left( 1 - \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\Psi}} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\phi^2} \\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\Psi}) &= \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\Psi}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\Psi}}\end{aligned}\quad (78)$$

Debe salvarse la singularidad aparente cuando el ángulo de rotación es nulo, es decir, debe utilizarse  $\lim_{\|\boldsymbol{\Psi}\| \rightarrow 0} \mathbf{T}(\boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{I}$ .

#### 2. Parámetros de Rodríguez:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{b}) &= \frac{2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{b}}) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{b}) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{b}) \dot{\mathbf{b}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{b}) = \mathbf{T}(\mathbf{b}) \dot{\mathbf{b}}\end{aligned}\quad (79)$$

Nótese que el operador tangente es más simple que el anterior.

3. **Parámetros de Euler:** Denominando al conjunto de parámetros como  $\mathbf{p} = [e_0 \quad \mathbf{e}]$ , sus derivadas se pueden desacoplar en forma lineal utilizando las matrices  $4 \times 3$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$ , presentadas en las Ecs. (40), de modo que las velocidades adquieren las expresiones

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= 2\mathbf{H}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\Omega} &= 2\mathbf{G}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (80)$$

que coinciden con la regla de multiplicación del cuaternión que se verá en la siguiente subsección.

4. **Parámetros lineales:** Tiene una de las expresiones más simples

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{s}) &= \mathbf{I} + \frac{1}{1 + s_0} \left( \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{s_0} + \tilde{\mathbf{s}} \right) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{s}) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}) = \mathbf{T}(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}}\end{aligned}\quad (81)$$

aunque pierde su atractivo por sus singularidades en el operador de rotación.



### 3.3. Expresión *strap-down* de la velocidad en cuaterniones

Asumiendo  $\mathbf{X}$  constante, derivando con respecto al tiempo la expresión  $\hat{x} = \hat{e}\hat{X}\hat{e}^*$ , sustituyendo a  $\mathbf{X}$  en la derivada, y utilizando la norma de  $\hat{e}$  se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \dot{\hat{e}}\hat{X}\hat{e}^* + \hat{e}\hat{X}\dot{\hat{e}}^* \\ &= \dot{\hat{e}}(\underbrace{\hat{e}^*\hat{x}}_1)\hat{e}^* + \hat{e}(\underbrace{\hat{e}^*\hat{x}\hat{e}}_1)\dot{\hat{e}}^* \\ &= \dot{\hat{e}}\hat{e}^*\hat{x} + \hat{x}\hat{e}\dot{\hat{e}}^*\end{aligned}\quad (82)$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión  $\|\hat{e}\| = \hat{e}\hat{e}^* = 1$  se obtiene

$$\dot{\hat{e}}\hat{e}^* + \hat{e}\dot{\hat{e}}^* = \dot{\hat{e}}\hat{e}^* + (\dot{\hat{e}}\hat{e}^*)^* = 0 \quad (83)$$

que indica que el vector  $\hat{e}\hat{e}^*$  tiene parte escalar nula y es un cuaternión vectorial puro

$$\dot{\hat{e}}\hat{e}^* = \frac{\hat{\omega}}{2} \equiv 0 + \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \quad (84)$$

que se reemplaza en la Ec. (82) para obtener

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \frac{1}{2}(\hat{\omega}\hat{x} + \hat{x}\hat{\omega}^*) = \frac{1}{2}(\hat{\omega}\hat{x} - \hat{x}\hat{\omega}) \\ &\equiv 0 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} - \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}\end{aligned}\quad (85)$$

donde el vector de velocidad angular espacial se obtiene de realizar el producto del lado izquierdo de la Ec. (84) resultando en la expresión

$$\boldsymbol{\omega} = 2(e_0\dot{\hat{e}} - \dot{\hat{e}}_0\mathbf{e} + \mathbf{e} \times \dot{\hat{e}}) \quad (86)$$

Con un procedimiento idéntico, se define

$$\hat{e}^*\dot{\hat{e}} = \frac{\hat{\Omega}}{2} \equiv 0 + \frac{\boldsymbol{\Omega}}{2} \quad (87)$$

y la velocidad material de traslación se puede expresar como  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$  y la velocidad material angular como

$$\boldsymbol{\Omega} = 2(e_0\dot{\hat{e}} - \dot{\hat{e}}_0\mathbf{e} - \mathbf{e} \times \dot{\hat{e}}). \quad (88)$$

Las expresiones matriciales de (84) y (87) se escriben como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}\hat{e}^* &= \frac{\hat{\omega}}{2} \equiv \mathbf{A}_{e^*}\dot{\hat{e}} = \mathbf{A}_e^T\dot{\hat{e}} \rightarrow \hat{\omega} = 2\mathbf{A}_e^T\dot{\hat{e}} \\ \hat{e}^*\dot{\hat{e}} &= \frac{\hat{\Omega}}{2} \equiv \mathbf{B}_{e^*}\dot{\hat{e}} = \mathbf{B}_e^T\dot{\hat{e}} \rightarrow \hat{\Omega} = 2\mathbf{B}_e^T\dot{\hat{e}}\end{aligned}\quad (89)$$

La parte vectorial de estas expresiones forman los vectores de velocidad angular

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= 2\mathbf{H}\dot{\hat{e}} \quad \text{con} \quad \mathbf{H} = [-\mathbf{e} \quad e_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}}] \\ \boldsymbol{\Omega} &= 2\mathbf{G}\dot{\hat{e}} \quad \text{con} \quad \mathbf{G} = [-\mathbf{e} \quad e_0\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}}]\end{aligned}\quad (90)$$

De estas expresiones (89) se pueden despejar la ecuación de velocidad del cuaternión en forma espacial

$$\dot{\hat{e}} = \frac{1}{2}\hat{\omega}\hat{e} \rightarrow \dot{\hat{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_\omega\hat{e} \quad (91)$$

y material

$$\dot{\hat{e}} = \frac{1}{2}\hat{e}\hat{\Omega} \rightarrow \dot{\hat{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}_\Omega\hat{e} \quad (92)$$

Nótese que las matrices intervinientes tienen formas algebraicas muy simples.

#### 4. ESTIMACIÓN EFICIENTE DE LA ORIENTACIÓN

La estimación de orientación es fundamental para el vuelo controlado de cualquier tipo de vehículo aéreo, ya sea para poder ir de un punto a otro, realizar maniobras de evasión o simplemente mantenerse en una trayectoria estable. En particular, para el vuelo de los cuadricópteros (Araguás et al., 2013), los cuales pueden mantenerse en vuelo estacionario en un lugar determinado o realizar maniobras agresivas, se necesita una estimación no sólo precisa sino también de gran velocidad. Estos requerimientos se vuelven más críticos cuando los algoritmos para la determinación de la orientación se deben implementar en los procesadores a bordo de los cuadricópteros, los que en general son de pocos recursos computacionales. Por otro lado, los sensores disponibles para realizar esta tarea son generalmente giróscopos, acelerómetros y, en ocasiones, magnetómetros o cámaras, todos rígidamente acoplados al cuadricóptero.

Los *giróscopos* son sensores capaces de medir la velocidad angular del cuerpo al que están sujetos. Además, los giróscopos tienen la ventaja de tener bajos niveles de ruido Gaussiano, sin embargo, se caracterizan por tener una importante tendencia a diverger (en adelante, *bias*), lo que provoca que en el proceso de integración para obtener el ángulo, este último crezca sin límites. Por el contrario, los acelerómetros tienen valores mucho menores de *bias* pero niveles más elevados de ruido Gaussiano. La determinación de la orientación del vehículo en vuelo estacionario (o con velocidad constante) puede realizarse mediante los datos provistos por los *acelerómetros* con un simple análisis trigonométrico de los valores de sus componentes, ya que en estas condiciones sólo se detecta el efecto de la gravedad. Esto último tiene como consecuencia el hecho de necesitar otro sensor para poder estimar el ángulo de guiñada. Los *magnetómetros* son sensores capaces de determinar la dirección del norte magnético aunque tienen como defecto su baja tasa de muestreo y gran ruido Gaussiano. En estas condiciones, surge la necesidad de fusionar estas lecturas con el fin de aprovechar la complementariedad de estos sensores.

Esta fusión se puede realizar con algoritmos iterativos llamados filtros Bayesianos (Chen, 2003; Paz et al., 2013) los cuales son métodos probabilísticos que permiten estimar el valor del estado de un sistema basándose en las ecuaciones que lo modelan

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (93)$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (94)$$

donde  $\mathbf{x}_k$  es el vector de estado y donde  $\mathbf{y}_k$  es el vector de observación, ambos al tiempo discreto  $k$ ,  $\mathbf{w}_{k-1}$  y  $\mathbf{v}_k$  son ruidos Gaussianos con media cero. En la Ec. (93),  $f_k(\cdot)$  es la función de transición del estado, la cual vincula el estado actual del sistema teniendo en cuenta el estado anterior. En la Ec. (94),  $h_k$  es la función de medición que relaciona el vector de estado  $\mathbf{x}_k$  con la observación  $\mathbf{y}_k$ .

En particular, el filtro extendido de Kalman (Munguia y Grau, 2011) es un algoritmo iterativo útil para estimar estados no observables cuando el modelo que se utiliza es no lineal (Daum, 2005). El algoritmo consiste de dos etapas llamadas *predicción* y *actualización de la medición*. En la predicción se obtiene una estimación *a priori* del estado  $\hat{\mathbf{x}}_k$  y su covarianza  $\mathbf{P}_k$  usando la media y la covarianza del paso anterior, mediante la ecuación de proceso del sistema  $\mathbf{F}_k$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (95)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (96)$$

donde con sombrero se simboliza con  $(\hat{\bullet})$  al valor estimado y con superíndice menos  $(\bullet)^-$  al valor predicho.

Luego, en la etapa llamada actualización de la medición, con el estado estimado *a priori*  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , se realiza una predicción de la medición y se compara con la observación del sistema para formar la innovación

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (97)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k \quad (98)$$

Finalmente, se utiliza la matriz de ganancia de Kalman  $\mathbf{K}_k$  para actualizar el estado predicho con la innovación

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (99)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (100)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \quad (101)$$

obteniéndose así la función densidad de probabilidad del estado buscada con media  $\hat{\mathbf{x}}_k$  y covarianza  $\mathbf{P}_k$ .

Para este trabajo, teniendo en cuenta la aplicación de estos algoritmos en cuadricópteros, se implementó un filtro extendido de Kalman considerando como estado del sistema  $\mathbf{x}_k$  a su orientación, se puede utilizar como modelo de transición de estado a las ecuaciones cinemáticas de un cuerpo expresadas con cuaterniones (Kim y Golnaraghi, 2004) o con ángulos de Euler (Kang y Park, 2011), por lo que con cada lectura de los giróscopos se ejecuta la etapa de predicción y usando el modelo cinemático se predice el desplazamiento del estado. Luego, con cada lectura de los acelerómetros se ejecuta la etapa de actualización de la medición en donde se corrige el valor estimado de la orientación basándose en la predicción del vector gravedad. Esto se realiza cambiando de coordenadas al vector de gravedad  $\mathbf{g} = [0, 0, g]^T$  a la terna del cuerpo usando (17) si se usan ángulos de Euler en el estado o (63) si el estado del sistema esta formado por el cuaternión unitario. De la misma forma, cuando las lecturas del magnetómetro están disponibles se puede actualizar la orientación según el ángulo de guiñada rotando esta vez al vector correspondiente al Norte magnético  $\mathbf{m} = [N, 0, 0]^T$ .

Por último, cabe remarcar que es posible trabajar con funciones no lineales en las ecuaciones de proceso u observación, debido a que las funciones son linealizadas alrededor del estado estimado utilizando los Jacobianos de la función. Dadas las Ecs. (93) y (94) con  $f_k$  y  $h_k$  funciones no lineales, los Jacobianos

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad (102)$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad (103)$$

resultan ser expresiones algebraicas muy simples, por lo cual nuevamente, se demuestra la conveniencia del empleo de cuaterniones unitarios para representar la actitud.

## 5. RESULTADOS

Las implementaciones de los filtros fueron codificadas en lenguaje de programación C y se ejecutaron en un procesador Cortex-M3 para evaluar el tiempo de procesamiento de cada función, ver más detalles de implementación en el trabajo de Paz et al. (2014). Para cuantificar el tiempo demandado cada vez que se ingresa a las funciones, éstas ponen en un pin determinado un valor de tensión representando un 1 lógico, luego, al finalizar la función el mismo pin es puesto a un valor representando un 0 lógico. Una vez que el procesador está en funcionamiento, por medio de un osciloscopio se puede observar el ancho del pulso generado por cada función, y de esta manera cuantificar el tiempo demandado por el algoritmo.

Dado que las pruebas se realizaron utilizando sensores inerciales en reposo, con valores alejados de los posibles puntos de indeterminación (para el caso de ángulos de Euler) y ya que las ecuaciones aquí planteadas son equivalentes, ambos filtros mostraron idénticos resultados en cuanto a la precisión de la estimación.

En lo referido a velocidad de cálculo para esta plataforma, se implementaron las funciones de rotación (17) y (63) utilizadas en la predicción de la gravedad para ambos tipos de representaciones. En el laboratorio se observó que la función implementada con cuaterniones logra medias de  $172\mu\text{s}$  mientras que la implementada con ángulos de Euler logró una media de 1,632ms. De esta forma, sólo el cambio de representación a cuaterniones significa un incremento en la velocidad de cómputo de la función de predicción de la gravedad de 10 veces. Esta gran diferencia se debe a que para determinar el seno o coseno de un ángulo las funciones matemáticas implementadas para sistemas embebidos buscan los valores más próximos de ángulos en tablas y luego realizan una aproximación recursiva para determinar el valor final. Por el contrario, la representación de orientación con cuaterniones sólo tiene productos y sumas en su operador de rotación, las cuales son operaciones naturales a los procesadores.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una revisión de las representaciones más usuales de orientación disponibles en literatura moderna y se describieron sus ventajas y desventajas en la cinemática de posición y velocidad. Principalmente, se destacó la representación en parámetros de Euler y los cuaterniones unitarios como libre de singularidades y computacionalmente conveniente.

Experimentalmente, se observó que la utilización de cuaterniones unitarios en estimaciones con filtros Bayesianos permite grandes incrementos en la velocidad del procesamiento en comparación con los ángulos de Euler (en el rango de ausencia de indeterminaciones). En referencia a la implementación en un sistema embebido en un UAV, para la estimación del vector de gravedad, los tiempos de cómputo se redujeron en aproximadamente 10 veces.

A futuro, se pretende avanzar en las líneas de investigación desarrolladas en el CIII, con el estudio de representaciones en el grupo de desplazamientos en SE(3) para: (i) estimar simultáneamente posición y orientación para su empleo en sistemas de navegación inercial, ya sea con cuaterniones duales (Wu et al., 2005) o con Álgebra Geométrica (Wu y Wang, 2012); (ii) incluir conceptos dinámicos del objeto en donde se realizan las mediciones para mejorar la estimación (Leishman et al., 2014); (iii) modelar eficientemente el movimiento de cámaras para localización y mapeo (Ma et al., 2010); desarrollar algoritmos de integración temporal de mecanismos (Geradin y Cardona, 2001).

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece el financiamiento del CONICET y ANPCyT (PICT-2013-2894 “Modelado Computacional de Sistemas Mecánicos Complejos”). Los segundos autores agradecen el financiamiento del programa de becas de investigación de alumno (M. Pereyra) y doctoral (C. Paz) de la Universidad Tecnológica Nacional y de la ANPCyT (PICT-PRH-2009-0136 “Guiado de Vehículos Autónomos usando Fusión de Señales de GPS de Bajo Costo y otros Sensores”). Se agradece especialmente la participación del Dr. G. Araguás y los Ings. D. Gaydou y G. Pérez Paina en el desarrollo colaborativo de filtros en cuaterniones y la construcción del cuadricóptero.

## REFERENCIAS

- Altmann S.L. *Rotations, quaternions, and double groups*. Oxford University Press, New York, 1986.
- Araguás G., Paz C., Gaydou D., y Pérez Paina G. Orientation-estimation fusing a downward-looking camera and inertial sensors for a hovering UAV. En *Proc. 16th International Conference on Advanced Robotics - ICAR2013*. 2013. Montevideo, Uruguay.
- Bottema O. y Roth B. *Theoretical Kinematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.
- Chen Z. Bayesian filtering: From kalman filters to particle filters, and beyond. *Statistics*, páginas 1–69, 2003.
- Corke P. *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*. Springer Tracts in Advanced Robotics, Volume 73. Springer, Berlin, Germany, 2011.
- Daum F. Nonlinear filters: beyond the kalman filter. *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, 20(8):57–69, 2005.
- Geradin M. y Cardona A. *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*. John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.
- Goldstein H., Poole Jr. C., y Safko J. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, New York, 3 edición, 2001.
- Kang C.W. y Park C.G. Euler angle based attitude estimation avoiding the singularity problem. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011.
- Kim A. y Golnaraghi M. A quaternion-based orientation estimation algorithm using an inertial measurement unit. En *Position Location and Navigation Symposium, 2004. PLANS 2004*, páginas 268–272. 2004.
- Kuipers J.B. *Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- Leishman R., Macdonald J., Beard R., y McLain T. Quadrotors and accelerometers: State estimation with an improved dynamic model. *IEEE Control Systems Magazine*, 34(1):28–41, 2014.
- Ma Y., Soatto S., Kosecká J., y Sastry S.S. *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*. Springer, Berlin, 2010.
- McCarthy J.M. *Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- Munguia R. y Grau A. Attitude and heading system based on EKF total state configuration. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2011*, páginas 2147–2152, 2011.
- Murray R.M., Li Z., y Sastry S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

- Paz C., Infante G., Báez Carballo J., Díaz Báez F., y Cavenio C.D. Implementación de un filtro extendido de kalman para la estimación de la orientación de un UAV utilizando el estándar CMSIS. En *Proc. V Congreso de Microelectrónica Aplicada - UEA2014*. 2014. Instituto Universitario Aeronáutico, Córdoba, Argentina.
- Paz C.J., Pérez Paina G.F., y Toloza J.H. A comparison of bayesian filters for orientation estimation. En *Proc. XV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC2013*. 2013. Univ. Nac. Río Negro, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina.
- Phillips W. y Hailey C. Review of attitude representations used for aircraft kinematics. *Journal of Aircraft*, 38(4):718–737, 2001.
- Sidi M.J. *Spacecraft Dynamics and Control, A Practical Engineering Approach*. Cambridge University Press, New York, USA, 1997.
- Stevens B.L. y Lewis F.L. *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1992.
- Trainelli L. The vectorial parameterization of rotation and motion. Informe Técnico, Politecnico di Milano, 2002. Report DIA-SR 02-18.
- Wu D. y Wang Z. Strapdown inertial navigation system algorithms based on geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22(4):1151–1167, 2012.
- Wu Y., Hu X., Hu D., Li T., y Lian J. Strapdown inertial navigation system algorithms based on dual quaternions. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 41(1):110–132, 2005.