

**PROPUESTA DE TRABAJOS PRÁCTICOS DEL CURSO
“FLUIDODINÁMICA COMPUTACIONAL”
EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE**

Ricardo A. Prado

*Área Mecánica de los Fluidos, Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional del Comahue, calle Buenos Aires N°1400, Q8300IBX Neuquén, Argentina,
ricardo.prado@fain.uncoma.edu.ar*

Palabras Clave: Fluidodinámica Computacional, Diferencias Finitas, Volúmenes Finitos.

Resumen. Se provee información sobre los trabajos prácticos requeridos para la aprobación del cursado de la materia optativa Fluidodinámica Computacional. El curso está destinado a la capacitación de estudiantes avanzados de ingeniería y de graduados en la aplicación de las técnicas numéricas de las diferencias finitas y de los volúmenes finitos para la resolución de problemas en mecánica de fluidos y transferencia de calor. Asimismo, se plantean problemas para generar mallas estructuradas y resolver las transformaciones entre dominios físicos y computacionales. Se pone de relieve tanto la necesidad del análisis de los errores asociados a la utilización de estas técnicas así como el análisis de la estabilidad de los esquemas numéricos adoptados, haciendo también hincapié en el requerimiento de verificar y/o validar los resultados computacionales obtenidos.

1 INTRODUCCION

El curso “Fluidodinámica Computacional” es un curso optativo propuesto desde el área Mecánica de los Fluidos del Departamento de Mecánica Aplicada para las carreras Ingeniería Mecánica, Ingeniería en Petróleo e Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo), basado en la resolución numérica de problemas fluidodinámicos simples o de mediana complejidad y orientado a estudiantes avanzados con conocimientos básicos de mecánica de los fluidos. La finalidad del curso es la formación del estudiantado en los aspectos, tanto conceptual como práctico, referidos a la formulación de modelos discretos en problemas de la mecánica de los fluidos, empleando las técnicas numéricas de las diferencias finitas (DF) y de los volúmenes finitos (VF).

Durante el congreso ENIEF 2013 desarrollado en la ciudad de Mendoza se expusieron los lineamientos generales de este curso. En ese trabajo (Prado, 2013) se presentaron los objetivos del curso, sus antecedentes, la estructuración de esta materia, el temario, las condiciones de cursado, evaluación y acreditación, así como la bibliografía. En aquella oportunidad, dado el requerimiento de una determinada extensión para el trabajo escrito, no fue posible dar mayor detalle sobre la serie de trabajos prácticos propuestos desde la cátedra para ser desarrollados durante el cursado. El presente trabajo intenta superar dicha falencia.

El curso “Fluidodinámica Computacional” se desarrolla durante un cuatrimestre con una carga semanal de seis horas, pero presenta una importante componente de tareas computacionales por parte del alumnado. Se considera que los estudiantes ya manejan un lenguaje de programación o utilitarios, en los cuales fueran entrenados previamente por los cursos correlativos de Métodos Computacionales en Ingeniería I y II, dictados en esta Facultad. Dado que no existe disociación entre teoría y práctica, el curso está a cargo de un único docente responsable de todas las actividades de cátedra. Este curso se ofrece asimismo para estudiantes de posgrado. En este caso, si bien el programa del curso se desarrolla de manera coincidente e indistinta con el cursado de los estudiantes de grado, la aprobación de la materia conlleva una mayor carga de trabajos prácticos computacionales, problemas que a su vez presentan una mayor complejidad, tanto física como numérica.

2 TRABAJOS PRÁCTICOS DEL CURSO

Los trabajos prácticos del curso están estructurados según las áreas temáticas del mismo: el método de las diferencias finitas, generación de mallas y el método de los volúmenes finitos, considerando tanto problemas de resolución analítica como de resolución computacional.

En el caso de los problemas con resolución computacional, se pretende que el estudiante realice un análisis completo de los resultados obtenidos, analizando tanto los aspectos numéricos asociados a los esquemas utilizados como los inherentes al comportamiento físico de la solución. Para aquellos casos que presentan soluciones exactas, se compararán los resultados numéricos con los obtenidos analíticamente. En otros casos, se utilizarán soluciones tipo *benchmarks*, soluciones presentadas en la bibliografía o se contrastarán los resultados con soluciones conocidas de problemas semejantes. Esta comparación pone en evidencia la presencia de los errores asociados con la aplicación de técnicas numéricas y da lugar al posterior análisis de los procedimientos que tenderían a minimizar dichos errores.

Como fuera indicado en el trabajo previo (Prado, 2013), se requiere que el estudiante desarrolle sus propios programas de cómputo pues se pretende que el mismo sea consciente de las acciones que se llevan a cabo durante la ejecución de su programa de cómputo y no se convierta en un simple usuario de códigos computacionales cerrados, desconocedor de los procesos computacionales realizados y de los errores involucrados en el modelado numérico.

El ordenamiento de los trabajos prácticos responde al grado de dificultad de las metodologías numéricas como así también al de las propias ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Se parte de las EDP tipo ecuación del calor (parabólica), ecuación de onda (hiperbólica), ecuaciones de Laplace o de Poisson (elípticas), pasando por la ecuación de Burgers de convección-difusión (también conocida como de advección-difusión) y las ecuaciones de la capa límite de Prandtl, para llegar finalmente a las ecuaciones de Navier-Stokes. Para todas estas ecuaciones o sistemas de EDP se plantean las discretizaciones tanto en diferencias finitas como en volúmenes finitos, resaltando siempre las características numéricas, y por ende aproximadas, de sus soluciones.

Los primeros cinco trabajos prácticos se evalúan mediante un examen escrito, mientras que la evaluación de los siguientes, dado sus condiciones de resolución computacional, se realiza mediante la entrega individual de una carpeta con los problemas resueltos y la inclusión de los correspondientes análisis numéricos y físicos de las soluciones. Para la aprobación del curso se requiere la presentación adicional de un trabajo final, de resolución individual, que por razones del límite de extensión del presente trabajo no se desarrollará aquí.

2.1 Trabajo Práctico N°1

Este trabajo práctico (TP) se basa en la clasificación de las EDP y de los sistemas de EDP y en la determinación de las correspondientes curvas características. Además, se desarrollan las transformaciones para rescribir las ecuaciones en diferentes sistemas coordenados ortogonales curvilíneos, analizando la unicidad de la transformación mediante la determinación de su Jacobiano y verificando que la transformación no modifica la clasificación matemática de la EDP (y por ende, la física representativa de dicha EDP).

2.2 Trabajo Práctico N°2

En este TP se obtienen las expresiones en DF de términos individuales y de los órdenes de sus correspondientes errores de truncamiento, tanto en mallas equiespaciadas como de brazos desiguales. Semejante procedimiento se sigue posteriormente con las EDPs, utilizando diferentes esquemas de discretización e incorporando los conceptos de formulaciones explícitas, parcialmente implícitas o completamente implícitas. Adicionalmente, se busca el reconocimiento de los significados del error de máquina y del error de truncamiento comparando los resultados numéricos (con diferentes esquemas en DF) con los analíticos, ya que se utilizan expresiones de derivadas de funciones simples, evaluadas en puntos definidos. Un ejemplo de esto se representa en la [Figura 1](#), con la obtención de la derivada segunda de la función x^2 , evaluada en $x_0 = 2$, mediante dos representaciones numéricas de diferentes órdenes, resueltas a medida que se reduce el intervalo de cálculo Δx .

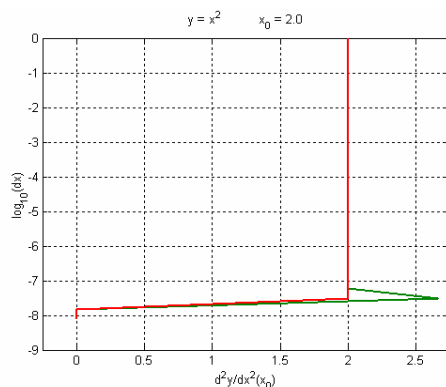


Figure 1: Visualización del error de máquina en el cálculo numérico de una derivada.

El primer problema de resolución computacional corresponde al caso del flujo potencial, bidimensional (2D) y estacionario en un canal que presenta una porción divergente, a 45° , en donde se busca determinar las líneas de corriente (Figura 2), las componentes de la velocidad y la distribución de la presión, comparando asimismo estos resultados 2D con los correspondientes a la representación unidimensional (1D). Se analiza la influencia en los resultados de la discretización del dominio y de la propia extensión del mismo, así como en los esquemas utilizados para la representación numérica del operador laplaciano.

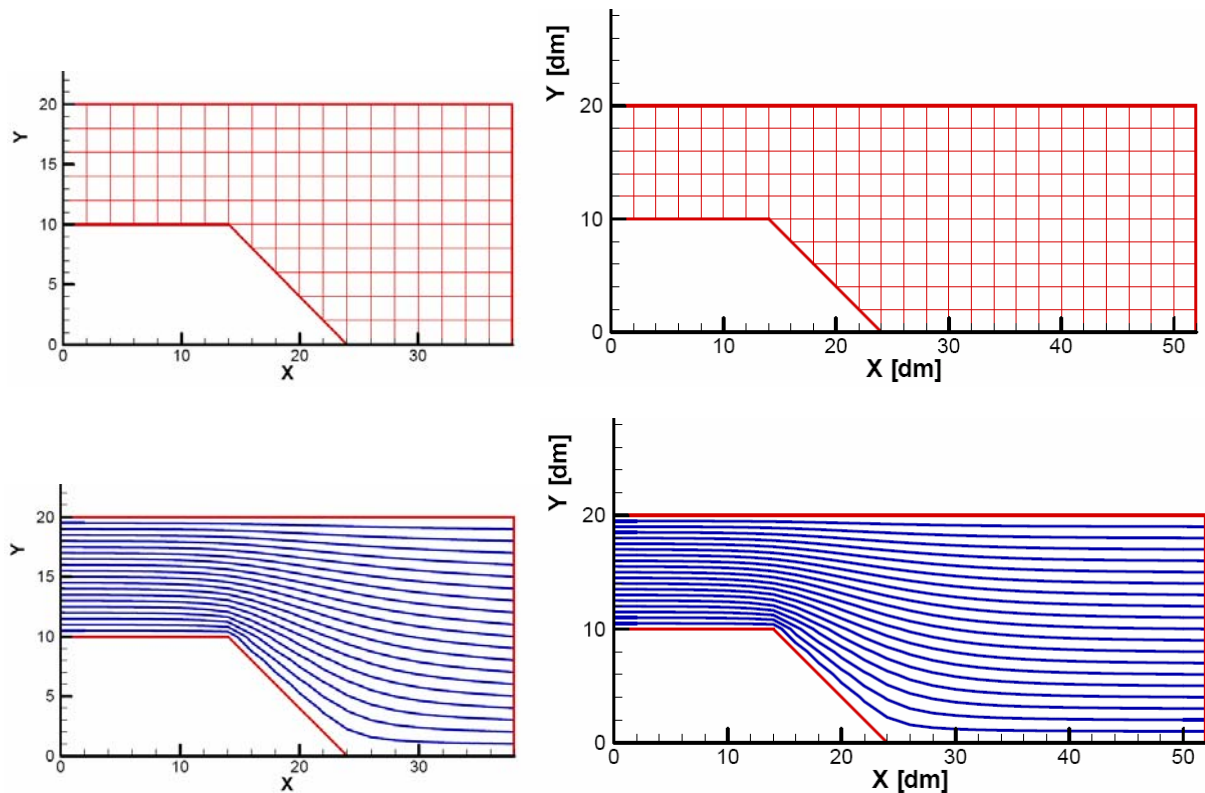


Figure 2: Problema de flujo potencial estacionario en un difusor bidimensional.

2.3 Trabajo Práctico N°3

En el caso de ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, representadas respectivamente por la ecuación de calor y la ecuación de onda, se analizan las cuestiones de estabilidad de distintas formulaciones numéricas -completamente implícitas, parcialmente implícitas y explícitas-, tanto por medio del análisis de estabilidad de von Neumann (o de Fourier) como mediante el análisis de estabilidad matricial, determinando el radio espectral del conjunto de autovalores de la matriz proveniente del sistema de ecuaciones algebraicas a resolver.

En el trabajo computacional se busca diferenciar el comportamiento estable de la solución respecto del inestable obtenido al superar el valor dado por la condición de estabilidad (Figura 3). Tratándose de problemas simples con soluciones analíticas conocidas, los resultados numéricos estables deben ser contrastados con dichas soluciones, generalmente obtenidas mediante series de Fourier. Es importante reconocer asimismo que también en este caso las soluciones analíticas se obtienen mediante programación y que debe analizarse la influencia de la cantidad de términos del desarrollo en serie en la representación de dicha solución, dado que una pobre representación analítica (por ejemplo, con pocos términos) mostrará un comportamiento físico no realista y por lo tanto imposible de contrastar (Figura 4).

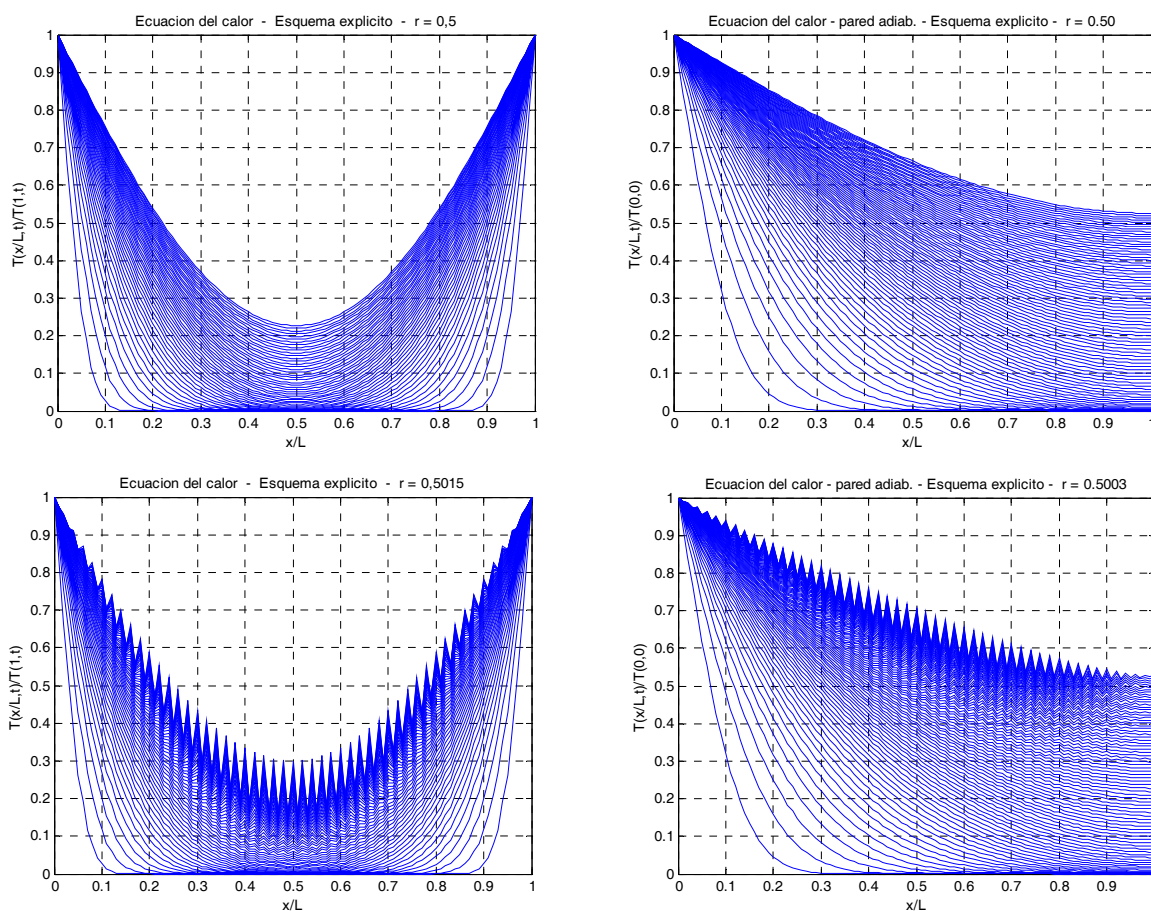


Figure 3: Soluciones numéricas estables e inestables del esquema explícito FTCS para la ecuación del calor.

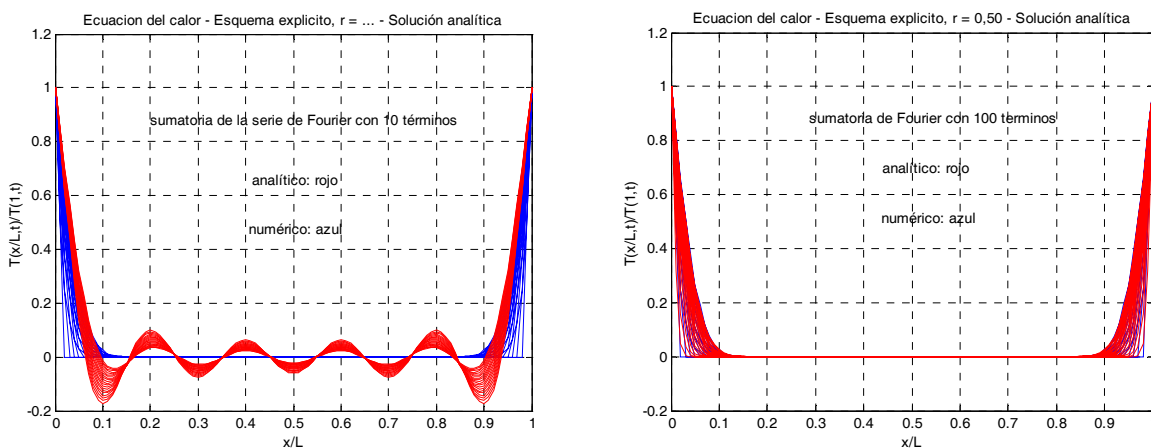


Figure 4: Comparación de resultados numéricos y analíticos mediante series de Fourier de diferente calidad.

2.4 Trabajo Práctico N°4

El análisis teórico de la ecuación de Burgers lineal, estacionaria y 1D, con las condiciones de contorno de la Figura 5, conduce en este TP a la resolución numérica de dicha ecuación modelando el término convectivo mediante los esquemas centrado, *upwind* y de Leonard (Anderson *et al.*, 1984), considerando diversos números de Péclet, y para uno de éstos analizar la influencia de considerar diferentes números de Péclet de grilla.

Se busca así la visualización de la influencia de la denominada viscosidad numérica en los resultados, la cual aporta tanto efectos sobredifusivos como subdifusivos, dependiendo de los esquemas numéricos utilizados en la discretización de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la Figura 6 muestra las soluciones exactas y las numéricas con el esquema de diferencias centradas para los términos convectivos y difusivos. La subdifusión promovida por este esquema se hace evidente cuando se superponen ambas soluciones y por la presencia de *wiggles* para números de Péclet de grilla definidos por

$$Pe_g = \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{h}{2} \right) \geq 1 \tag{1}$$

siendo a la velocidad de convección del flujo, ε la difusividad del fluido y h el intervalo de malla considerado en la discretización.

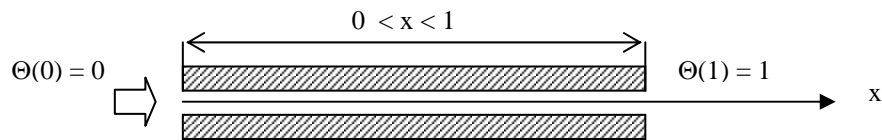


Figura 5: Problema de convección-difusión (advección-difusión) 1D.

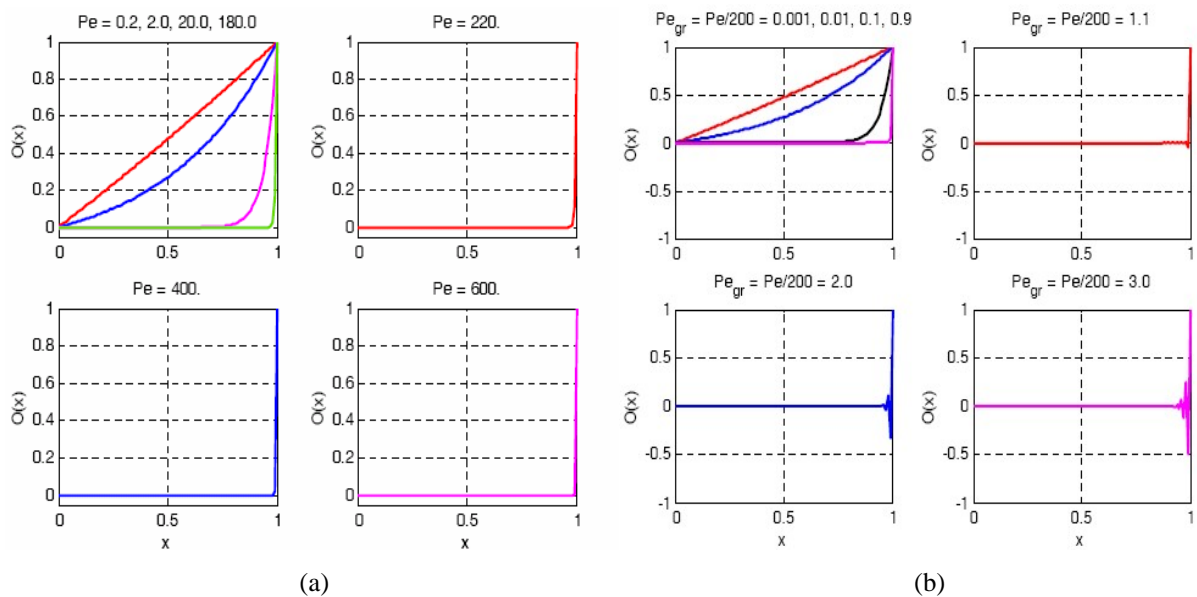


Figura 6: Ecuación de Burgers lineal, estacionaria y 1D, (a) soluciones exactas para diversos números de Péclet, (b) soluciones del esquema centrado, para diferentes Péclét de grilla.

Adicionalmente, se analizan los factores de amplificación de diferentes esquemas para la ecuación de onda 1D de primer orden: en la Figura 7 se muestran las gráficas de estos factores cuando se utilizan el esquema explícito de Lax y el esquema explícito *upstream* (Anderson *et al.*, 1984), para diferentes números de Courant. Los efectos sobredifusivos mostrados en la Figura 7 cuando estos esquemas se utilizan con números de Courant menores a la unidad se ponen asimismo de manifiesto en las propias resoluciones numéricas de la ecuación de onda 1D de primer orden mostradas en la Figura 8, resultados que en este trabajo práctico deben evaluarse para diferentes números de Courant, inclusive en los casos en donde sus valores superan la unidad y la solución deviene inestable.

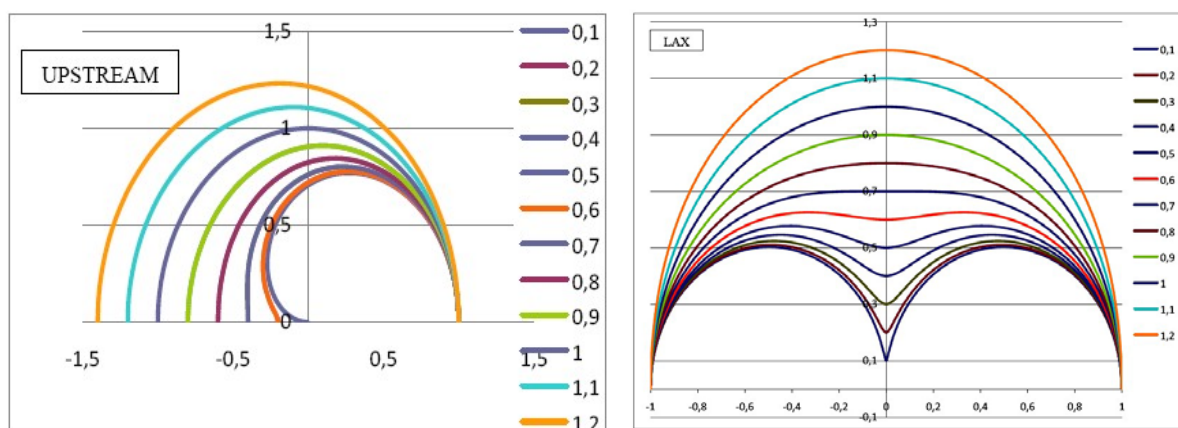
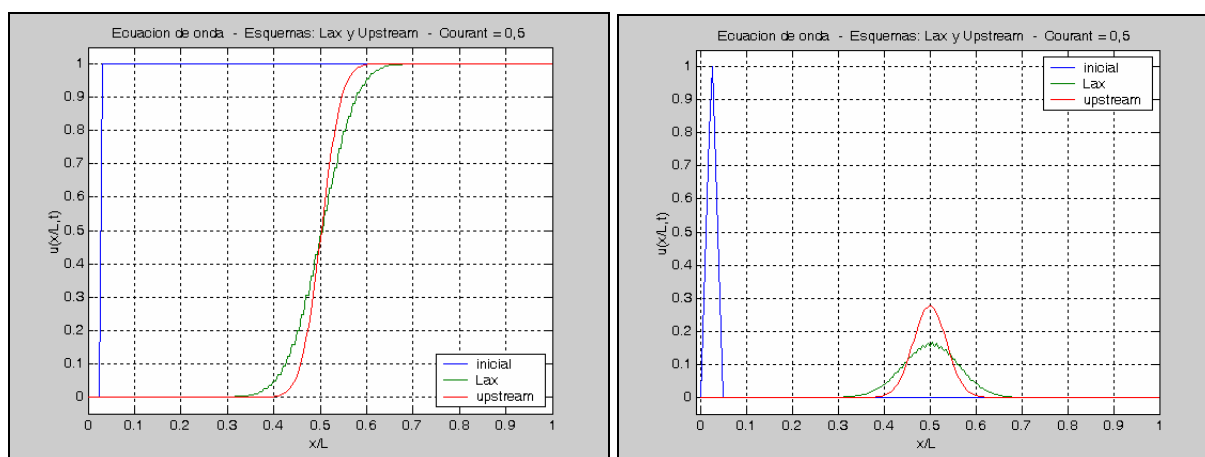


Figura 7: Factores de amplificación en función del número de Courant (por estudiante Jonathan Agüero).



Figuras 8: Avance temporal de las resoluciones numéricas con diferentes condiciones iniciales, Courant = 0,5.

2.5 Trabajo Práctico N°5

En este TP se realizan transformaciones de las ecuaciones de gobierno para llevarlas desde su dominio físico (asumido irregular y/o complejo) a un dominio computacional regular, determinando el Jacobiano y los métricos de la transformación. El objetivo es transformar el dominio físico de una EDP en uno regular, donde los esquemas en DF puedan ser fácilmente definidos, y donde las características físicas de la solución a la ecuación de gobierno resulten mejor representadas por la grilla utilizada.

Se transforman tanto ecuaciones de primer orden como de segundo orden, mediante transformaciones definidas por funciones algebraicas y de transformaciones curvilíneas ortogonales cilíndricas y esféricas. Como problema de implementación computacional se solicita la resolución de los problemas del TP N°3 representados en la Figura 3, ahora utilizando una transformación algebraica cuya finalidad sea la de mejorar la representación de los gradientes térmicos en los extremos del dominio.

2.6 Trabajo Práctico N°6

En este TP se resuelven mallas elípticas simples, que son halladas mediante procesos directos o por procedimientos iterativos si el sistema a resolver es no lineal y acoplado. Este último caso se muestra en la Figura 9, donde partiendo de la definición de un mallado inicial (iteración 0), se llega a la malla requerida al alcanzar la convergencia del proceso iterativo.

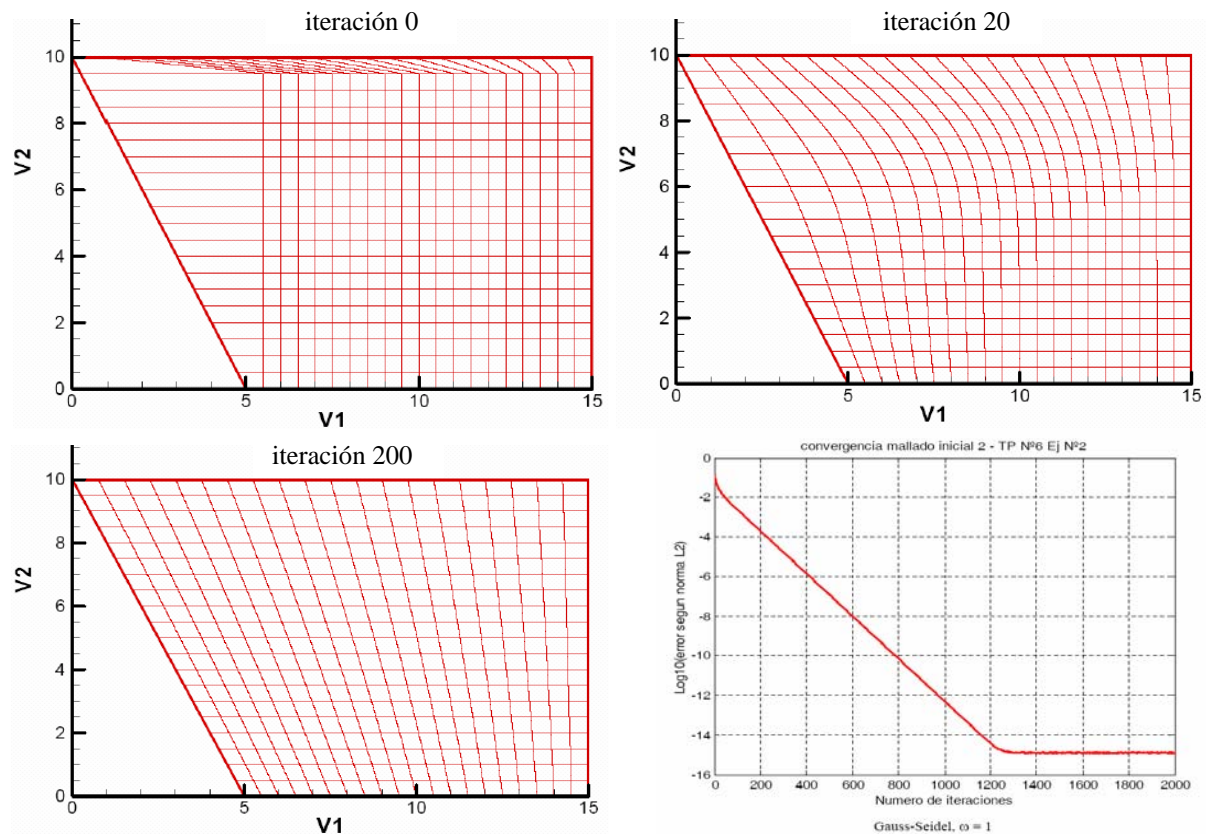


Figura 9: Malla generada mediante un proceso iterativo.

2.7 Trabajo Práctico N°7

En este TP se hace diferencia entre la labor computacional llevada adelante por parte de alumnos de grado y de los estudiantes de posgrado ya que solo es obligatorio para los últimos. Esto es así pues el nivel de complejidad del mallado es superior que en el caso del TP anterior y, consecuentemente, también son mayores los requerimientos de programación.

En este TP se determinan las mallas elípticas de Laplace o de Poisson, con la incorporación en este último caso de las funciones de forma propuestas por Middlecoff y Thomas (Anderson *et al.*, 1984) para el control de los nodos en el dominio físico. Se pueden generar así mallas elípticas (entre otras, las tipos C, H u O) que son resueltas mediante diversos procesos iterativos, y que se representan en las Figuras 10, 11 y 12. Se propone que los estudiantes analicen la bondad de cada mallado y reconozcan la conveniencia de controlar la posición de los nodos, tanto sobre los contornos como en el interior del dominio.

Con la finalidad de comparar la velocidad de la convergencia, la resolución iterativa de los sistemas de ecuaciones algebraicos no lineales y acoplados para la determinación del par de valores correspondientes a las coordenadas cartesianas (x,y) de los nodos de la grilla se realiza mediante los procedimientos de Gauss-Seidel (con factores de sobre-relajación) y de sobre-relajación por filas y por columnas. En las Figuras 10 y 11 también se muestran las historias de los procesos de resolución iterativa para diferentes factores de sobre-relajación, mientras que en la Figura 12 también se presentan los gráficos comparativos de la historia de la convergencia entre los diferentes procesos iterativos y se reconoce la reducción del número de iteraciones para la obtención del mallado final cuando se hace uso del factor de sobre-relajación óptimo o del procedimiento de aceleración multigrilla de 2, 3 y 4 niveles

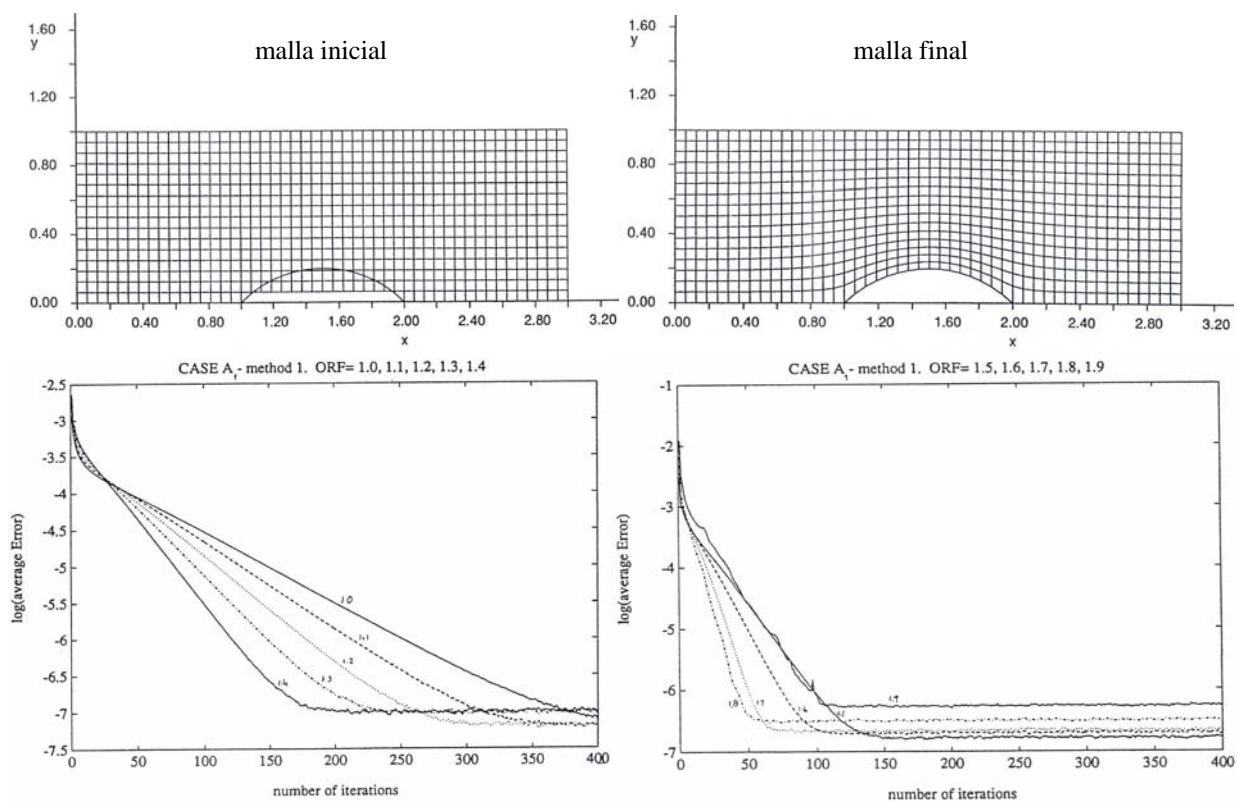


Figura 10: Malla elíptica generada por una ecuación de Laplace y utilización de factores de sobre-relajación.

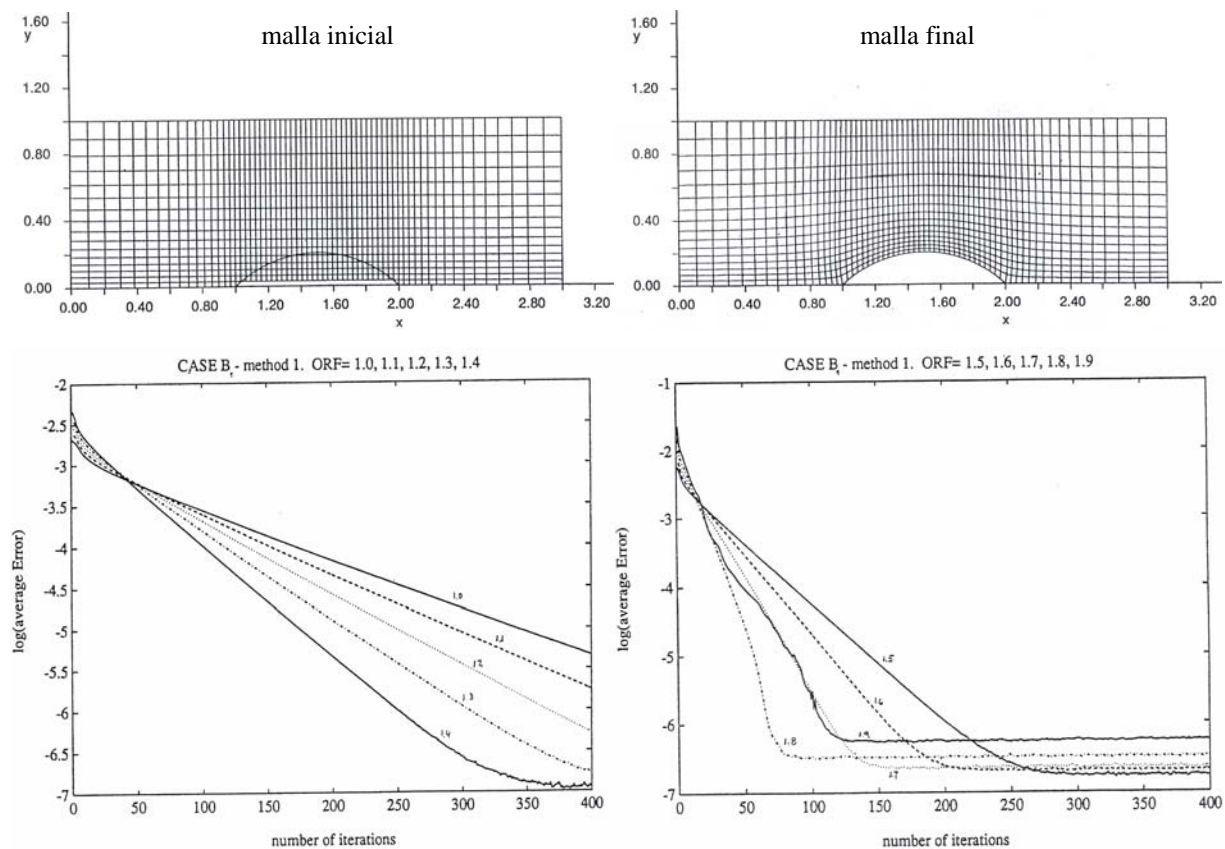


Figura 11: Malla elíptica generada por una ecuación de Poisson y utilización de factores de sobre-relajación.

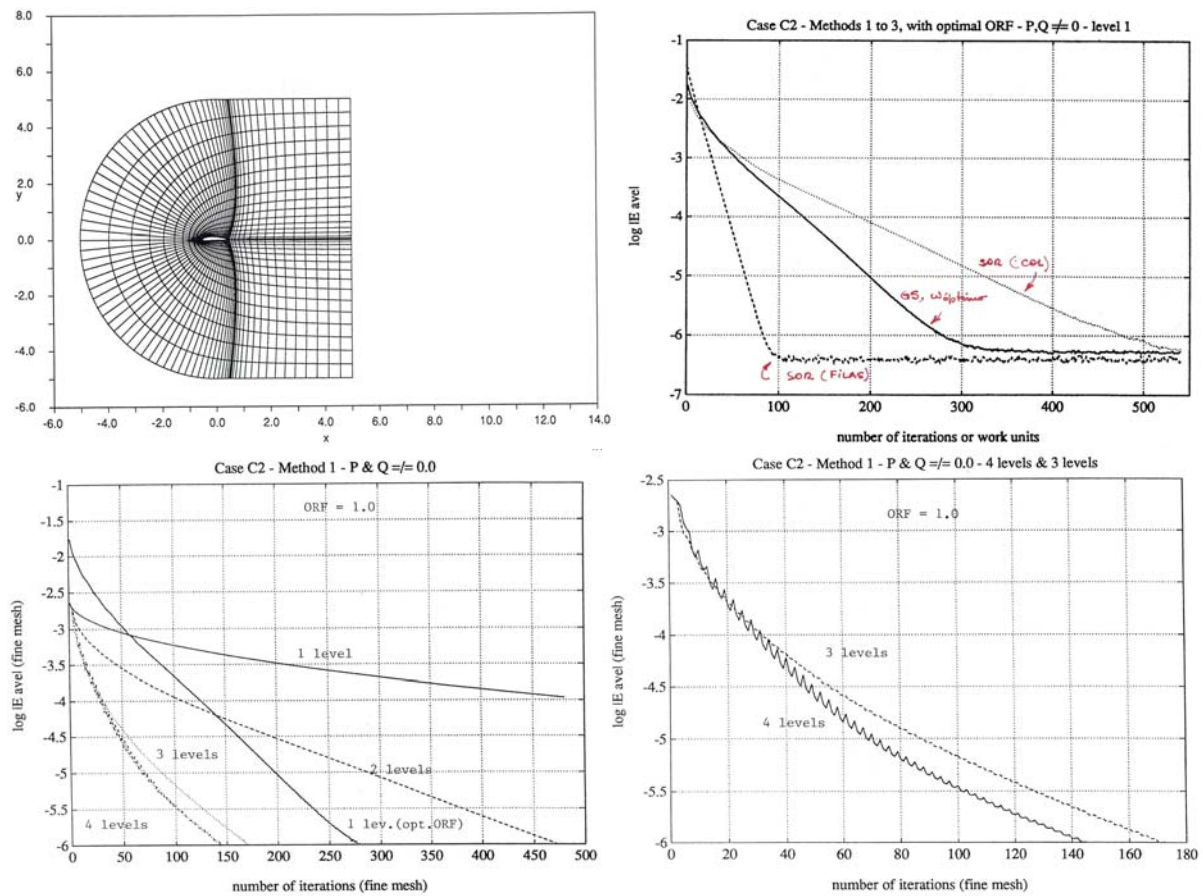


Figura 12: Malla C generada por una ecuación de Poisson y aceleración multigrilla.

2.8 Trabajo Práctico N°8

En este TP se plantean varios problemas de la mecánica de fluidos para ser resueltos mediante la aplicación de la técnica de las diferencias finitas. Estos problemas presentan soluciones analíticas contra los cuales contrastar los resultados numéricos. Estos son: el establecimiento de la corriente tubular laminar de Hagen-Poiseuille (Figura 13), el segundo problema de Stokes (Figura 14), el flujo laminar de fluidos no newtonianos modelados por la ley de la potencia (Figura 15), el flujo laminar en conductos de sección rectangular en presencia de un gradiente de presiones constante (Figura 16) y el flujo laminar en un canal bidimensional en presencia de un gradiente de presiones alternativo de alta y baja frecuencias. Estas Figuras 13 a 16 han sido seleccionadas de los TP realizados por los propios estudiantes.

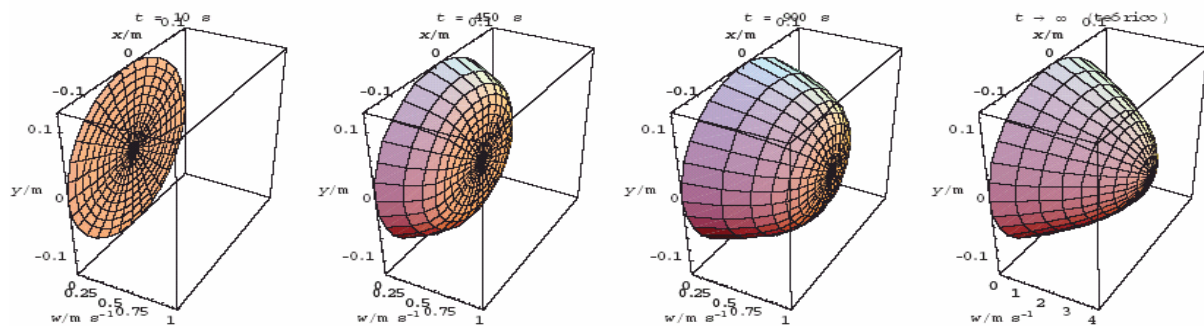


Figura 13: Establecimiento de la corriente laminar de Hagen-Poiseuille (estudiante Carlos Vivanco).

Fluido Glicerina ; Comparación Esquema explícito con la solución analítica $r=0.45$; $f=50$ Hz ; $N=1000$ Fluido Glicerina ; Comparacion esquema implícito con la solución analítica $r=0.45$; $f=50$ Hz ; $N=1000$

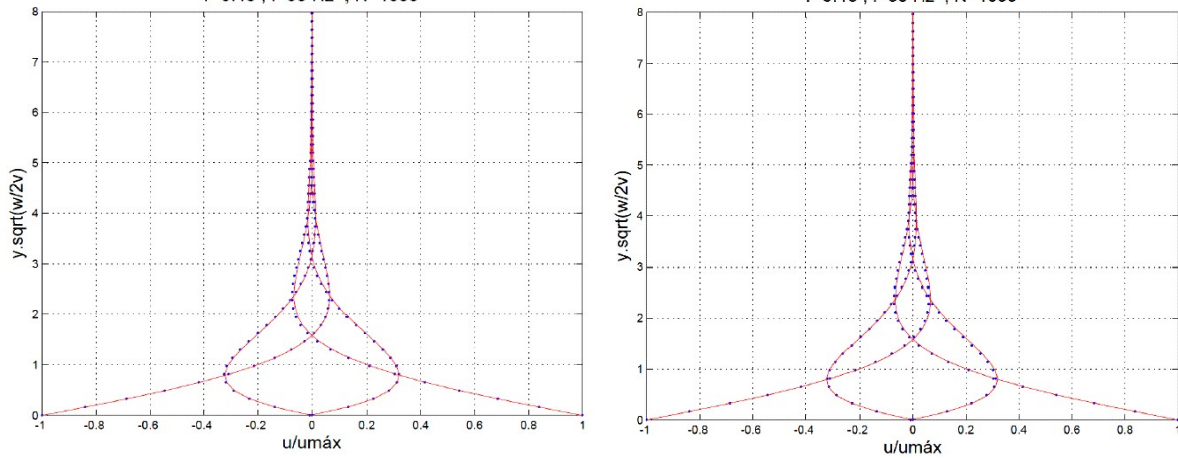


Figura 14: Segundo problema de Stokes, esquema explícito (izq.) e implícito (der.) (estudiante Damián Campos)

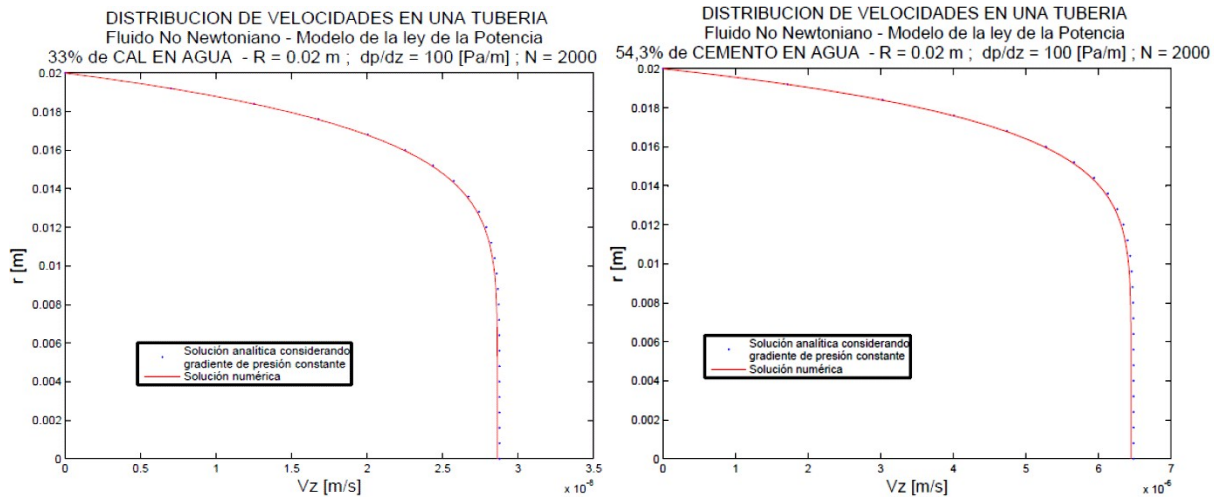


Figura 15: Flujo tubular laminar de fluidos no-newtonianos de la ley de la potencia (estudiante Damián Campos)

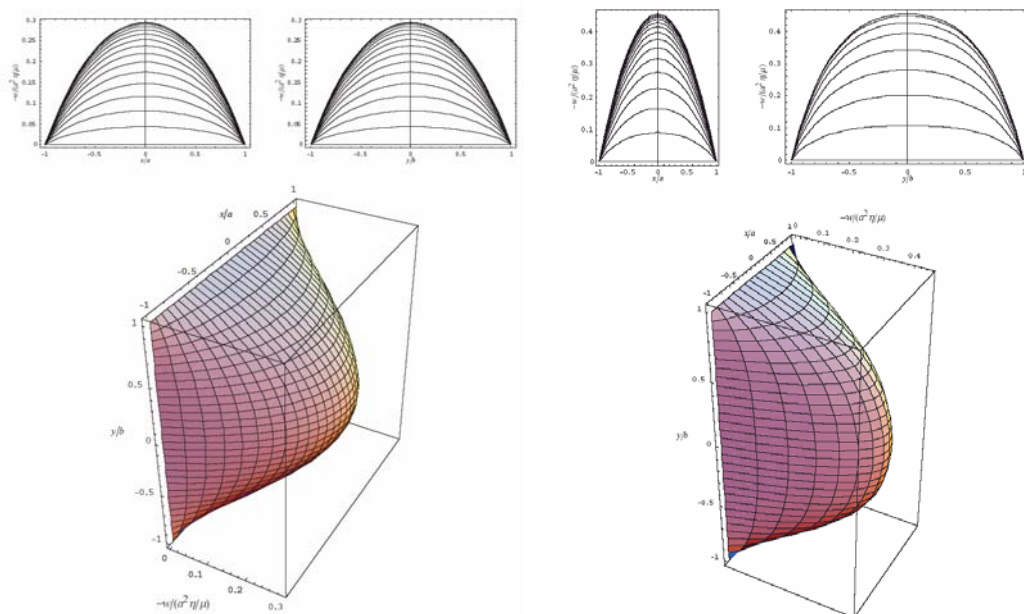


Figura 16: Flujo laminar en conductos de diferente sección rectangular (estudiante Carlos Vivanco).

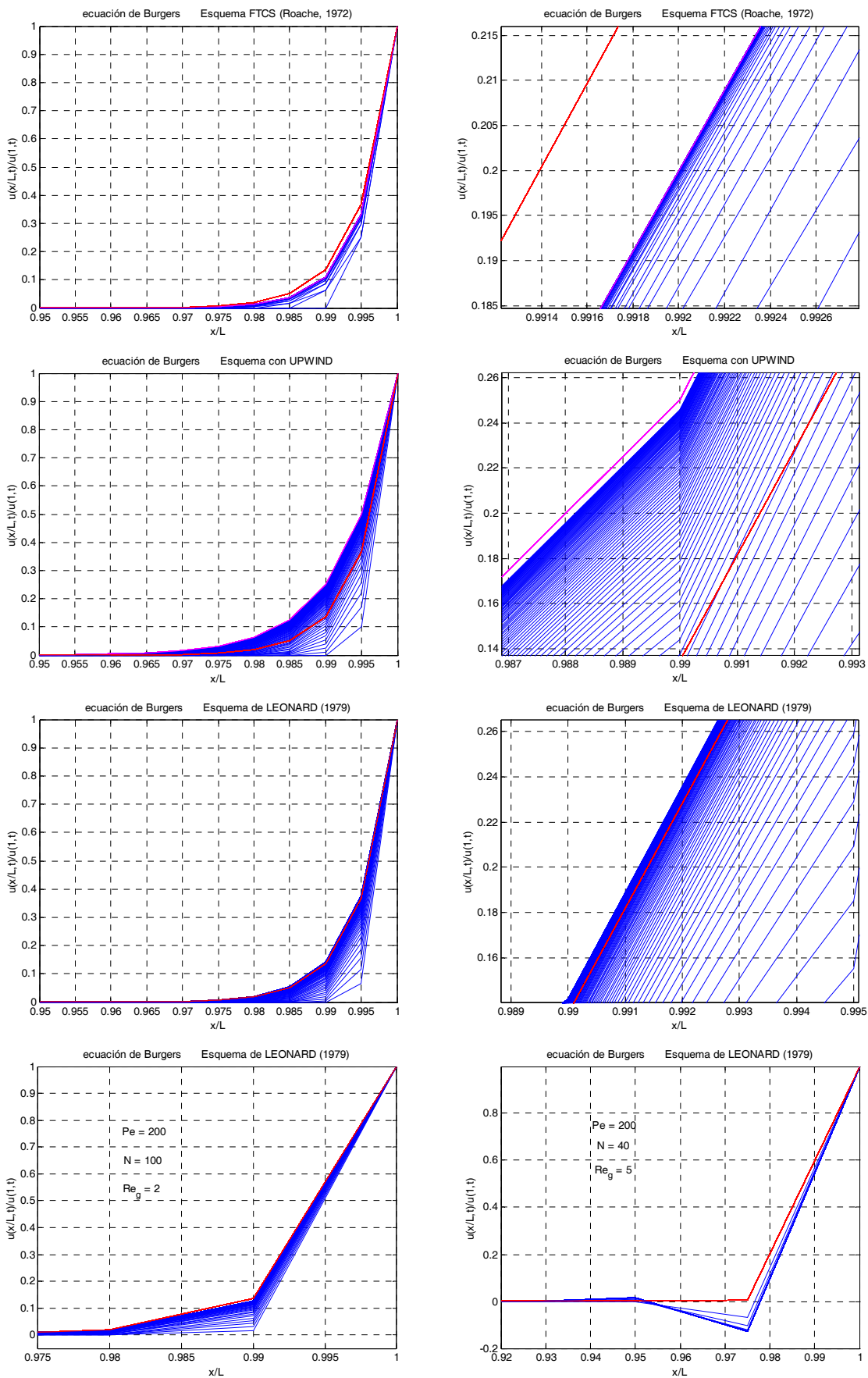


Figura 17: Resultados de diferentes esquemas para la ecuación de Burgers 1D, lineal y no estacionaria.

Otro problema con solución analítica conocida lo constituye la ecuación de Burgers no estacionaria, lineal, 1D con condiciones de contorno constantes y condición inicial nula. Es así que en este TP se solicita su resolución numérica mediante la representación del término convectivo (o advectivo) con diferencias centradas FTCS, con el esquema *upwind* y con el esquema de Leonard (Anderson et al., 1984), considerando diferentes números de Péclet del problema y de grilla. En la Figura 17 se muestran los resultados de la aplicación de estos diversos esquemas, visualizando las características sobredifusivas del esquema *upwind* y las subdifusivas del esquema FTCS en base a la comparación con el resultado analítico de régimen permanente. En el caso del esquema de Leonard se observa también sus características subdifusivas para elevados números de Péclet de grilla, dando lugar a la posible presencia de *wiggles*.

La finalidad de este TP es combinar problemas en dominios cartesianos y cilíndricos, considerando condiciones tanto estacionarias como transitorias, requiriendo entonces de la aplicación conjunta de todas las herramientas previamente utilizadas de manera individual y la comparación entre resultados numéricos y analíticos. La totalidad de estos problemas debe ser resuelta por el conjunto de estudiantes, de manera individual.

2.9 Trabajo Práctico N°9

Los problemas de mayor complejidad de este TP están destinados solamente a los estudiantes de posgrado. Entre ellos se incluyen la resolución de capa límite laminar bidimensional (Figura 18), donde la solución mediante DF puede ser contrastada por las soluciones semejantes de Falkner-Skan, y el flujo laminar gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes en las variables función de corriente y vorticidad. En este último caso, los resultados numéricos son contrastados con los presentados por *benchmarks*, como por ejemplo, para el caso del problema resuelto por AbdulNour y Potter (1990) representado en la Figura 19, correspondiente al desarrollo de un flujo laminar que ingresa a un canal 2D.

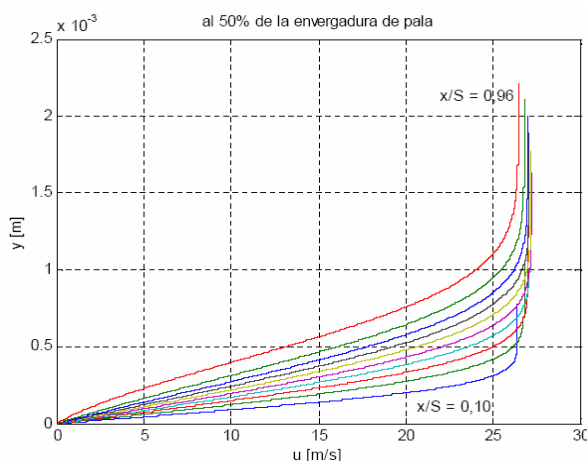


Figura 18: Perfiles de velocidades según cuerda en una capa límite con gradiente de presiones variable.

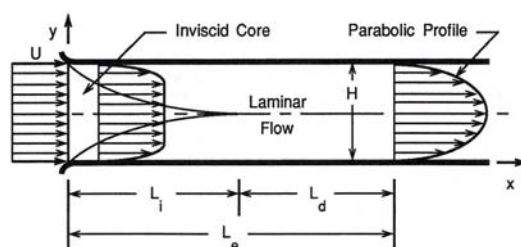


Figura 19: Ingreso de un flujo incompresible a un canal bidimensional (AbdulNour.& Potter, 1990).

Otro problema resoluble en la variable función de corriente lo constituye la resolución del flujo incompresible y estacionario en canales 2D con obstáculos, donde se desprecian los efectos viscosos y la vorticidad resulta nula. La [Figura 20](#) muestra la solución de líneas de corriente y la [Figura 21](#) muestra la de los vectores velocidad en estas geometrías 2D. Mediante este problema se busca la aplicación de un mallado acorde con la geometría del canal para una mejor resolución del problema físico, dando lugar a la utilización de una malla elíptica y a la consecuente transformación de la EDP desde el dominio físico al computacional.

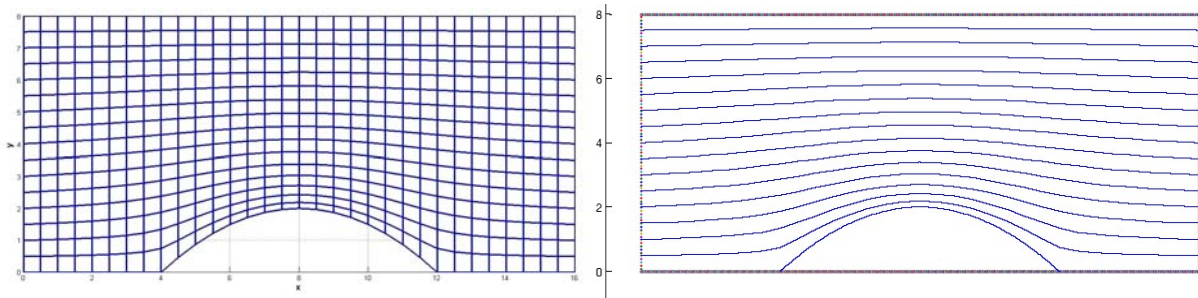


Figura 20: Malla elíptica y resolución de las líneas de corriente (estudiante Juan Pablo Urra)

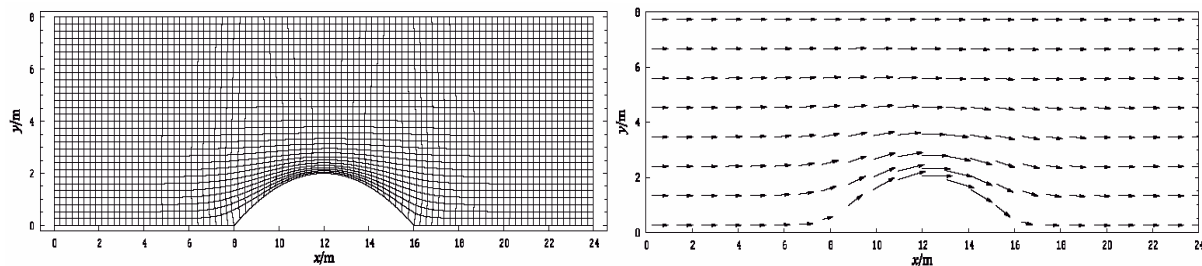


Figura 21: Malla elíptica y resolución del campo vectorial de velocidades (estudiante Carlos Vivanco).

Trabajo Práctico N°10

En este TP se desarrolla la formulación del método de los volúmenes finitos a partir de las ecuaciones de gobierno escritas en forma conservativa, en donde los flujos difusivos se modelan mediante DF y los flujos convectivos se representan por medio de funciones como las dadas por las interpolaciones lineal y QUICK o de las extrapolaciones lineal y *upwind* (Versteeg y Malalasekera, 1995).

En la resolución de los trabajos computacionales se retoma el ordenamiento de complejidad creciente, aplicando esta técnica a las ecuaciones tipo calor y a problemas fluidodinámicos modelados por la ecuación de convección-difusión no estacionaria. Como problemas representativos de estas ecuaciones se destacan:

- la resolución por VF de la ecuación de Burgers anteriormente resuelta mediante DF, y
- el arranque de la corriente laminar de Couette, producido por la súbita puesta en movimiento a velocidad constante de una de las paredes de un canal bidimensional.

La intención del primer problema es poner de manifiesto las semejanzas entre las aproximaciones discretas mediante las técnicas de DF y VF para una EDP de la cual, en adición, se conoce la solución analítica.

Por otra parte, en la [Figura 22](#) se presenta el avance temporal de la solución numérica de la velocidad adimensional del flujo para el segundo problema y se comparan también estos resultados numéricos con los analíticos provenientes de un desarrollo en serie de Fourier, de manera equivalente a lo realizado en el TP N°8 mediante la técnica de DF.

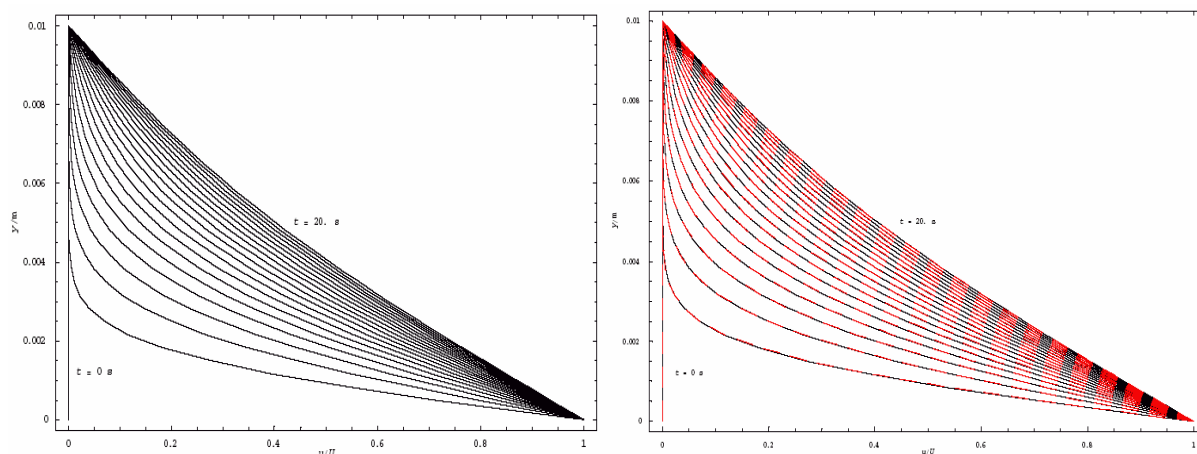


Figura 22: Arranque de la corriente laminar de Couette, numérico (VF) y analítico (estudiante Carlos Vivanco).

3 CONCLUSIONES

Se han presentado los lineamientos generales de los trabajos prácticos, tanto de desarrollo analítico como computacional, de la materia optativa Fluidodinámica Computacional la cual tiene por finalidad la capacitación del estudiante en la aplicación de las técnicas numéricas de las diferencias finitas y de los volúmenes finitos a problemas de flujo de fluidos y de transferencia de calor. El curso está dirigido a alumnos avanzados de las carreras Ingeniería Mecánica, Ingeniería en Petróleo e Ingeniería Química de la Facultad de Ingeniería de la UNCo. También puede ser cursado por alumnos vocacionales, ya graduados, requiriéndose en este caso una mayor carga de trabajos de resolución computacional.

Se hace particular hincapié en la verificación y/o validación de los resultados numéricos obtenidos mediante la aplicación de estas técnicas de discretización (DF y VF), contrastando dichos resultados computacionales con los analíticos, los experimentales y/o los *benchmarks*.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la colaboración de los estudiantes y exalumnos, Jonathan Agüero, Juan Pablo Urra, Damián Campos y Carlos Vivanco por el aporte de figuras de sus trabajos prácticos para esta publicación.

REFERENCIAS

- AbdulNour, B.S. and Potter, M.C., A Stable, Iterative Finite-Difference Procedure for the Navier-Stokes Equations, *Benchmark Test Cases for Computational Fluid Dynamics*, FED-Vol. 93, ASME, Celik I. & Freitas C.J. (eds.), 1990.
- Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- Prado R.A., El curso “Fluidodinámica computacional” en las carreras de grado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue, *Mecánica Computacional Vol. XXXII*, AMCA, pp. 3047-3060, ISSN 1666-6070, García Garino, Mirasso, Storti y Tornello (eds.), 2013.
- Versteeg, H.K., and Malalasekera, W., *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*, Longman Group Limited, 1995.