

ANÁLISIS MICROMECAÍNICO DE COMPUESTOS LAMINADOS

Mario W. E. Toledo^a; Liz Graciela Nallim^{a*}, Bibiana M. Luccioni^{b*};
*CONICET, Argentina

^aInstituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente Salta, Universidad Nacional de Salta,
Avda. Bolivia 5.150 Salta. Tel/Fax: 0387-4255351
e-mail: mwtoledo@unsa.edu.ar , lnallim@unsa.edu.ar

^bInstituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán.,
Av. Roca 1800. S.M. de Tucumán. Tel./Fax: 0381-4364087
e.mail: bluccioni@herrera.unt.edu.ar

Key words: Compuestos, laminados, fibras, anisotropía, modelo constitutivo.

Abstract. *En este trabajo se estudia el comportamiento micromecánico de compuestos formados por láminas reforzadas con fibras unidireccionales. El objetivo es calibrar y contrastar un modelo para compuestos propuesto en trabajos anteriores. Dicho modelo tiene en cuenta la participación en la deformación y tensión del compuesto de cada una de las componentes en sus direcciones principales de simetría.. Con este fin, se realiza un estudio micro-mecánico mediante modelos de elementos finitos tridimensionales que permite obtener la distribución de tensiones y deformaciones en el interior del compuesto. Con este micro-modelo de elementos finitos es posible definir y chequear de manera relativamente simple las hipótesis de la teoría de compuestos estudiada.*

En el trabajo se incluyen comparaciones de resultados del micromodelo, métodos analíticos tales como el basado en la determinación del campo elástico por inhomogeneidades de Eshelby, el modelo de compuesto estudiado y resultados experimentales sobre las propiedades elásticas de láminas con fibras unidireccionales y laminados compuestos por láminas con distintas orientaciones. Finalmente se presentan ejemplos de aplicación de la teoría desarrollada en los que se obtiene la respuesta no lineal de láminas y laminados y se compara con resultados experimentales.

1 INTRODUCCIÓN

Los materiales laminados reforzados con fibras han ganado reconocimiento como una alternativa de sustitución de materiales metálicos en una amplia variedad de aplicaciones. Es por ello que se requieren modelos predictivos que contemplen la rigidez y resistencia de este tipo de materiales y que puedan ser aplicados a situaciones reales sin la necesidad de determinar numerosas constantes empíricas.

Los modelos constitutivos para materiales compuestos se clasifican desde el punto de vista de la escala de análisis del problema¹ en:

- **Macromodelos:** representan el comportamiento constitutivo del material compuesto como si se tratase de un único material. La teoría de mezclas pertenece al grupo de los macromodelos y determina el comportamiento del material compuesto como una combinación de materiales componentes simples cada uno con su modelo constitutivo propio que satisface una condición de compatibilidad con los restantes.
- **Escala de lámina elemental:** esta escala también se denomina mesoescala. La estructura se discretiza con elementos de láminas para los cuales se derivan ecuaciones macroscópicas. Los elementos de lámina tienen una estructura unidimensional y son considerados continuos aunque presenten daño.
- **Microescala:** En esta escala se utilizan las ecuaciones constitutivas de los constituyentes elementales: matrices, fibras, interfases matriz-fibra. En algunos casos, el análisis se hace a través de un enfoque multiescala (micro-macro). Se analiza el comportamiento de cada componente y se obtiene el comportamiento del conjunto a través de algún tipo de homogeneización. La escala microscópica se utiliza con el objetivo de analizar la estructura interna o micro-estructura del material compuesto y obtener las variables de estado del problema micro-mecánico. Estas variables de estado permiten determinar las macro-variables del problema.

El análisis de compuestos laminados puede iniciarse a diferentes niveles. La mayoría de los métodos de diseño toman a las láminas como bloques elementales (meso-modelos) e intentan utilizar datos obtenidos a partir de ensayos simples, realizados sobre láminas aisladas, para predecir el comportamiento del laminado completo. Las láminas están generalmente reforzadas con fibras unidireccionales continuas. Una alternativa distinta consiste en comenzar el análisis a nivel constitutivo (micro-modelos) y usar datos experimentales de las propiedades de los materiales de las fibras y de la matriz para predecir el comportamiento de las láminas individuales, luego el laminado y finalmente la estructura. Si resulta satisfactorio, este enfoque tiene la ventaja potencial de permitir al diseñador predecir los efectos de cambios de material, sin necesidad de disponer de ensayos de láminas.

Un análisis micromecánico estudia el comportamiento del material compuesto examinando en detalle la interacción de los materiales constituyentes como parte de la definición del comportamiento de un material compuesto heterogéneo. Un estudio macromecánico por el contrario, supone que el material es homogéneo y los efectos de los materiales constituyentes son detectados sólo como una propiedad promedio del material compuesto.

En este trabajo se realiza el estudio micromecánico de laminados compuestos por láminas reforzadas con fibras unidireccionales. El objetivo es estudiar cómo se transmiten las tensiones en el interior de compuesto con el fin de calibrar los parámetros definidos en el modelo teórico propuesto.

2 MODELO CONSTITUTIVO^{2,3}

Este modelo supone que el compuesto puede descomponerse sucesivamente en sub-compuestos, hasta llegar a compuestos simples en los que puedan plantearse hipótesis cinemáticas y de equilibrio entre componentes sencillas. Básicamente, en ese compuesto se debe poder identificar cuáles componentes de deformación son comunes a todas sus constituyentes, lo que normalmente se identifica como comportamiento en paralelo, y cuáles componentes de tensión son comunes a todas sus componentes, lo que normalmente se identifica como comportamiento en serie.

Generalmente, para llegar a poder establecer estas hipótesis es necesario descomponer el compuesto en varias etapas. Básicamente, en el caso de un compuesto laminado formado por láminas con fibras unidireccionales se requeriría separar el mismo en láminas y analizar en primer lugar las láminas. Se verá más adelante, en los ejemplos de aplicación, que aún el análisis de una lámina con precisión requiere más de una descomposición.

Claro está que el mismo modelo puede ser utilizado como un enfoque meso-mecánico en donde los datos de partida, son las propiedades mecánicas y modelos constitutivos de las láminas que forman el laminado, con lo cual se reduce considerablemente el volumen de cálculo.

2.1 Hipótesis cinemáticas y de equilibrio

Si se analiza un compuesto sencillo se puede identificar en el mismo algunas direcciones en que las distintas componentes tienen la misma deformación (comportamiento en paralelo) y otras en las que las componentes tienen la misma tensión (comportamiento en serie).

En base a este análisis, se reordenan las componentes de tensión y deformación de las componentes de manera de tener un tensor ϵ^* en el que están aquellas componentes de tensión y deformación que luego serán comunes en el compuesto y en otro tensor σ^* aquellas componentes de tensión o deformación que serán el resultado de la superposición de las de todas las componentes multiplicadas por sus respectivas participaciones de volumen.

Para ordenar de esta manera las componentes se definen los siguientes tensores:

$$\begin{aligned}\alpha_{ijkl}^{\sigma} &= \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kr} \delta_{ls} H(p_{rs}) \\ \alpha_{ijkl}^{\epsilon} &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \alpha_{ijkl}^{\sigma}\end{aligned}\quad (1)$$

H : función escalón

$$p_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } rs \text{ trabaja en paralelo} \\ 0 & \text{si la componente } rs \text{ trabaja en serie} \end{cases}$$

Las componentes de tensión y de deformación se reordenan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \alpha^\sigma : \sigma + \alpha^\varepsilon : \varepsilon & \sigma &= \alpha^\sigma : \sigma^* + \alpha^\varepsilon : \varepsilon^* \\ \varepsilon^* &= \alpha^\varepsilon : \sigma + \alpha^\sigma : \varepsilon & \varepsilon &= \alpha^\varepsilon : \sigma^* + \alpha^\sigma : \varepsilon^* \end{aligned} \quad \text{y también vale que} \quad (2)$$

El tensor σ^* es tal que, referido direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.) tiene componentes de tensión en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y deformaciones totales en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

De manera análoga el tensor ε^* es tal que, referido direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.), tiene componentes de deformaciones totales en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y tensión en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

2.2 Forma alternativa de escribir las ecuaciones constitutivas de las componentes

Se propone una forma alternativa de expresar las ecuaciones constitutivas elastoplásticas de las componentes, que luego permite encontrar el comportamiento del compuesto en forma sencilla, haciendo hipótesis similares a la de teoría de mezclas clásica⁴.

La ecuación constitutiva secante del compuesto puede escribirse como sigue:

$$\sigma = C : \varepsilon^e = C : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) se puede llegar a la siguiente relación constitutiva secante:

$$\sigma^* = C^* : \varepsilon^* - \sigma^{p*} \quad (4)$$

Donde:

$$C^* = (\alpha^\sigma : C + \alpha^\varepsilon) : (\alpha^\varepsilon : C + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (5)$$

$$\sigma^{p*} = (C^* : \alpha^\sigma - \alpha^\varepsilon) : \varepsilon^p \quad (6)$$

2.3 Ecuación constitutiva del compuesto

En primer lugar, se analiza un compuesto simple formado por n componentes en las que las direcciones principales del material y los tensores α^σ y α^ε son idénticos. En ese compuesto se verifica que:

$$\varepsilon_c^* = \varepsilon^* \quad (7)$$

Donde c indica una componente cualquiera.

Si se designa con k_c la proporción de volumen de una componente genérica y se admite, además que, en aquellas componentes que trabajan en serie, la deformación plástica del compuesto es la suma de las deformaciones plásticas de las componentes multiplicadas por sus respectivas participaciones de volumen, resulta:

$$\sigma^* = C^* : \varepsilon^* - \sigma^{p*} \quad (8)$$

Con:

$$C^* = \sum k_c C_c^* \quad \sigma^{p*} = \sum k_c (C_c^* : \alpha^\sigma - \alpha^\varepsilon) : \varepsilon_c^p \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones (2) se puede calcular la tensión como:

$$\sigma = C : \varepsilon - \sigma^p \quad (10)$$

Donde:

$$C = (\alpha^\sigma : C^* + \alpha^\varepsilon) : (\alpha^\varepsilon : C^* + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (11)$$

$$\sigma^p = -C : \alpha^\varepsilon : \sigma^{p*} + \alpha^\sigma : \sigma^{p*} = (\alpha^\sigma - C : \alpha^\varepsilon) : \sigma^{p*}$$

A los efectos de la implementación numérica en un programa de elementos finitos, resulta conveniente encontrar una relación entre la deformación de cada una de las componentes y la deformación del compuesto. De esta manera, una vez obtenida la deformación de cada componente, se pueden integrar independientemente las ecuaciones constitutivas correspondientes y llevar cuenta de los estados tensionales a nivel micro-mecánico.

Partiendo de la condición (7) y las ecuaciones (2) y (10) se puede escribir:

$$\varepsilon_c = \phi_c : \varepsilon + \tilde{\varepsilon}_c^p \quad (12)$$

Donde:

$$\phi_c = (\alpha^\varepsilon : C_c^* + \alpha^\sigma) : (\alpha^\varepsilon : C^* + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (13)$$

$$\tilde{\varepsilon}_c^p = \phi_c : \alpha^\varepsilon : \sigma^{*P} - \alpha^\varepsilon : \sigma_c^{*P}$$

El tensor elastoplástico tangente se obtiene derivando la ecuación (10)

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}^p = C^T : \dot{\varepsilon} \quad (14)$$

Donde

$$C^T = C - (\alpha^\sigma - C : \alpha^\varepsilon) : \sum k_c (C_c^* : \alpha^\sigma - \alpha^\varepsilon) : (I - C_c^{-1} : C_c^T) : \phi_c \quad (15)$$

y C_c^T es el tensor elastoplástico tangente de la componente c .

Todas las ecuaciones anteriores valen en el sistema de referencia local del compuesto. Para un sistema de referencia cualquiera se deben rotar los tensores correspondientes.

La ecuación constitutiva de un compuesto laminado o de un material compuesto con

estructura compleja, donde los tensores α^σ y α^ϵ no son iguales en todas las componentes, puede obtenerse en etapas. Se descompone el compuesto en sub-compuestos más simples, para los cuales se puede encontrar la ecuación constitutiva de la manera descripta, y luego se halla la ecuación del compuesto, componiendo los sub-compuestos de manera similar.

Para obtener las deformaciones de las componentes, se encuentra en primer lugar la de las sub-compuestos y luego, a partir de ellas, las de las componentes mismas.

2.4 Tensores α^σ y α^ϵ

De acuerdo a las hipótesis planteadas, se acepta que en el compuesto analizado el material puede trabajar en serie o en paralelo en correspondencia con cada una de las componentes de tensión o deformación.

Es claro que en la dirección longitudinal de las fibras, matriz y fibras trabajan en paralelo. La respuesta en las otras direcciones no resulta tan fácil de intuir, el módulo elástico transversal calculado considerando un comportamiento en serie, no ajusta los resultados experimentales, existiendo una considerable dispersión en los valores obtenidos para los módulos de corte.

3 ESTUDIO ELÁSTICO DEL COMPUESTO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introducción

De acuerdo a las hipótesis planteadas en el modelo teórico propuesto^{2,3}, se acepta que en el compuesto analizado el material puede trabajar en serie o en paralelo en correspondencia con cada una de las componentes de tensión o deformación. Para ello se definen los tensores α^σ y α^ϵ . Los elementos de estos tensores se deben definir según el comportamiento de la componente se acerque al comportamiento en paralelo o en serie. Una alternativa es la construcción de un modelo a partir de la superposición de dos subcompuestos, en el que cada subcompuesto sea una combinación en serie o en paralelo. De esta manera se puede obtener un modelo paralelo combinado en serie con un modelo serie, o también un modelo paralelo combinado en paralelo con un modelo serie.

El objetivo del presente estudio es determinar cuáles son los valores más adecuados de los α^σ y α^ϵ , de acuerdo a la componentes que se analicen. Para ello se realiza un estudio micromecánico de las propiedades elásticas de una lámina reforzada con fibras unidireccionales, en una primera etapa, y luego se analizan las propiedades elásticas del laminado.

En la Tabla⁵ 1 se identifican las propiedades mecánicas de las fibras y matrices que componen las distintas láminas que se analizan en este trabajo.

3.2 Láminas

El estudio micromecánico de las propiedades elásticas de una lámina reforzada con fibras unidireccionales se realiza mediante modelos de elementos finitos. Para los modelos se utilizan elementos sólidos tridimensionales. En esta etapa del trabajo, se supone un comportamiento elástico lineal, inicialmente libre de tensiones. A nivel de componentes se

considera que las fibras están regularmente espaciadas, perfectamente alineadas y hay perfecta unión entre fibra-matriz. En cuanto a la matriz, se la considera isótropa y que está libre de agujeros e imperfecciones. No se consideran elementos de interfaz fibra-matriz.

Tabla 1: Propiedades elásticas de fibra y matriz que componen las láminas analizadas

Lámina N°	Propiedades de Fibra	Propiedades de Matriz
1	Fibra de vidrio	Matriz epoxi
	$E_f = 73.1 \text{ GPa}$ $\nu_f = 0.22$	$E_m = 3.45 \text{ GPa}$ $\nu_m = 0.35$
2	Fibra de carbono:	Matriz epoxi:
	$E_{f1} = 232 \text{ GPa}$ $E_{f2} = 15 \text{ GPa}$ $G_{f12} = 24 \text{ GPa}$ $\nu_{f12} = 0.279$ $\nu_{f23} = 0.49$	$E_m = 5.35 \text{ GPa}$ $\nu_m = 0.35$
3	Fibra: AS4(Carbono) ⁵	Matriz: 3501-6 Epoxi ⁵
	$E_{f1} = 225 \text{ GPa}$; $E_{f2} = 15 \text{ GPa}$; $G_{f12} = 15 \text{ GPa}$; $\nu_{f12} = 0.2$ $\nu_{f23} = 0.0714$	$E_m = 4.2 \text{ GPa}$; $\nu_m = 0.34$
4	Fibra: T300 (Carbono) ⁵ :	Matriz: BSL914C epoxi ⁵
	$E_{f1} = 230 \text{ GPa}$ $E_{f2} = 15 \text{ GPa}$ $G_{f12} = 15 \text{ GPa}$ $\nu_{f12} = 0.2$ $\nu_{f23} = 0.0714$	$E_m = 4.0 \text{ GPa}$ $\nu_m = 0.35$
5	Fibra: E-glass 21xK43 Gevetex ⁵	Matriz: LY556/HT907/DY063 epoxi ⁵
	$E_{f1} = 80 \text{ GPa}$; $E_{f2} = 80 \text{ GPa}$, $G_{f12} = 33.33 \text{ GPa}$, $\nu_{f12} = 0.2$, $\nu_{f23} = 0.2$	$E_m = 3.35 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.35$
6	Fibra: Silenka E-Glass 1200tex ⁵ :	Matriz: MY750/HY917/DY063 epoxi ⁵
	$E_{f1} = 74 \text{ GPa}$, $E_{f2} = 74 \text{ GPa}$. , $G_{f12} = 30.8 \text{ GPa}$, $\nu_{f12} = 0.2$ $\nu_{f23} = 0.2$	$E_m = 3.35 \text{ GPa}$. $\nu_m = 0.35$

Se proponen modelos con distintas proporciones de fibras y se modela la fibra con sección circular. Se estudia la respuesta de distintos modelos cuando se aplican a los mismos deformaciones unitarias.

Los parámetros geométricos a tener en cuenta para modelar el comportamiento de la lámina, deben ser tales que representen el volumen elemental, es decir la región más pequeña o pieza de material sobre la cual las tensiones y deformaciones pueden ser consideradas como uniformes macroscópicamente y que el volumen conserve las proporciones correctas de fibra y matriz, es decir, sea aún representativo del material compuesto y sus constituyentes. Microscópicamente, sin embargo, las tensiones y deformaciones no son uniformes, debido a la heterogeneidad del material, por lo que la escala del volumen elemental es muy importante. La separación entre fibras en una lámina compuesta con fibras unidireccionales constituye una dimensión en el elemento de volumen representativo. La otra dimensión es el espesor de la lámina. La tercera dimensión es arbitraria. En la Figura 1 se muestra un elemento típico de volumen representativo para una lámina con fibras unidireccionales.

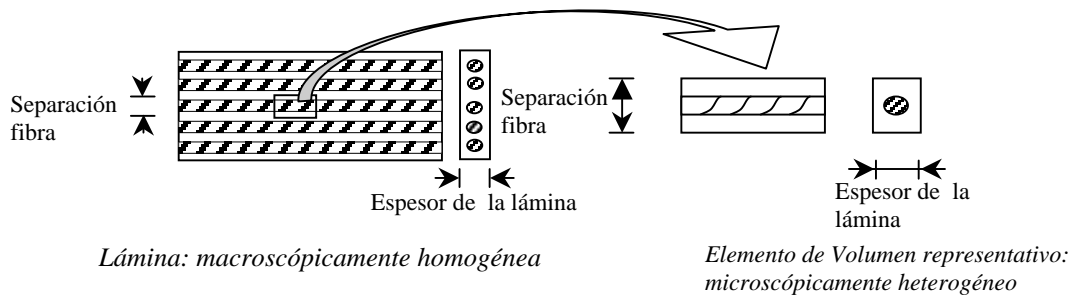


Figura 1: Elemento de volumen representativo-Lámina con fibras unidireccionales

Para el estudio del comportamiento elástico de la lámina se usaron mallas de elementos finitos con distinto número de elementos, a los efectos identificar y eliminar los errores introducidos por el tamaño de los elementos finitos. En este trabajo se analizan modelos simétricos utilizando mallas de 72, 264, 560, 1020, 1680 y 2576 elementos. En la Figura 2a se muestra la disposición de los ejes materiales principales 1-2-3 y en la Figura 2b se puede observar la discretización típica utilizada de fibra-matriz en una malla de 1680 elementos.

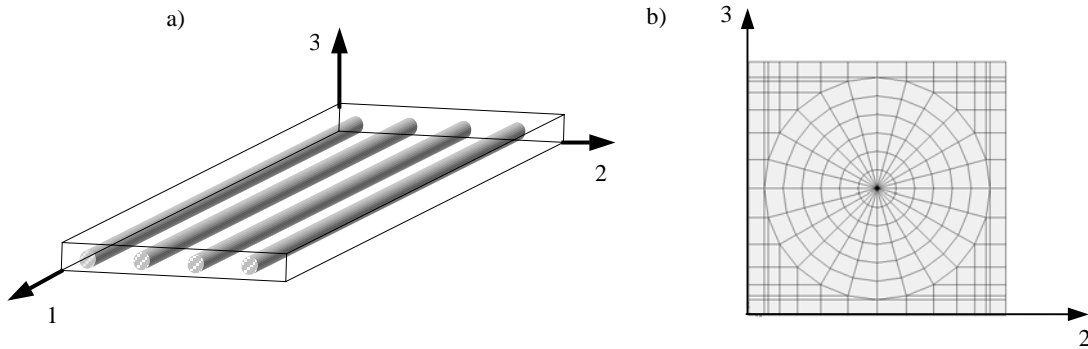


Figura 2: a) Designación ejes principales materiales; b) Malla de elementos finitos de una celda simétrica

En las Figura 3 se hace, a modo de ejemplo, una síntesis de las condiciones de bordes utilizadas para la determinación de las propiedades elásticas del compuesto. La Figura 3a muestra las condiciones de borde y carga utilizadas para la determinación del módulo de elasticidad longitudinal E_1 y los módulos de Poisson ν_{12} y ν_{13} . Para la determinación del módulo de corte G_{12} se trabajo con las condiciones que se observan en la Figura 3b.

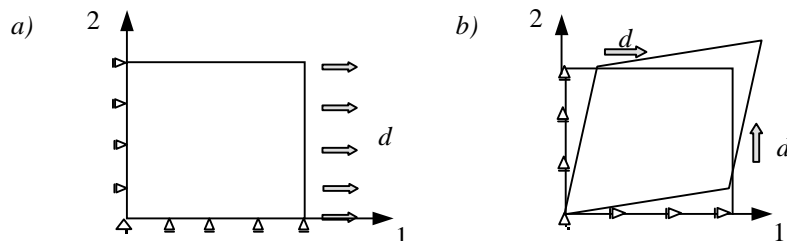


Figura 3: Condiciones de contorno y desplazamiento aplicado. a) Módulo elástico E_1 ; b) Módulo de corte G_{12}

A modo ilustrativo se determinan los valores de las constantes elásticas obtenidas para una lámina con fibras unidireccionales con un contenido de fibras $k_f = 0.6$. Las propiedades elásticas de la fibra y de la matriz corresponden a la designada como lámina N° 3 en la Tabla⁵ 1, mientras que la Tabla 2 muestra los resultados obtenidos con los distintos tamaños de malla.

Tabla 2: Propiedades elásticas de la lámina.

Número de elementos	Módulo Elástico				
	E_1 (GPa)	ν_{12}	E_2 (Gpa)	ν_{23}	G_{12} (Gpa)
72	123.507486	0.25991055	9.06479643	0.27679594	4.36826669
264	130.747433	0.25932856	9.29192660	0.26856833	4.37137001
560	133.325281	0.25880808	9.39745188	0.26488242	4.43221023
1020	134.532779	0.25634344	9.44742793	0.26306217	4.47198821
1680	135.170086	0.25498916	9.47733245	0.26202263	4.49380441
2576	135.463488	0.25285138	9.48321544	0.26337089	4.50166501

En la Figura 4 se representa gráficamente en un diagrama escalado los valores de la Tabla 2. Puede observarse la convergencia de los distintos módulos elásticos a medida que disminuye el tamaño de la malla de elementos finitos.

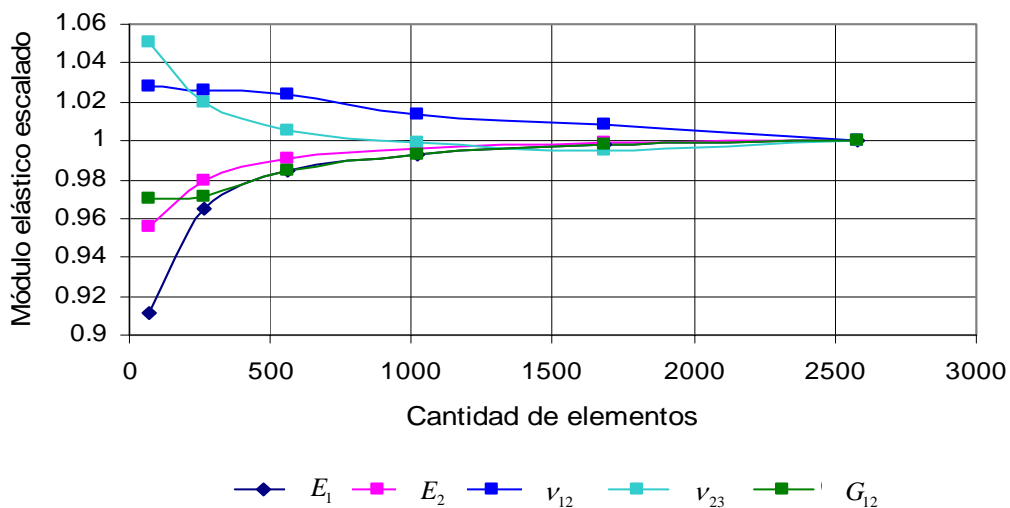


Figura 4: Variación de los módulos elásticos en función del refinamiento de la malla de elementos finitos

3.3 Laminados

Para formular el modelo constitutivo de un laminado, el modelo^{2,3} descrito en el punto 2 exige, en primer lugar encontrar el comportamiento de las láminas y luego el del laminado, considerando cómo se transmiten las tensiones y deformaciones entre láminas. Para ello se realiza en este punto el estudio micromecánico del laminado considerando dos escalas: una escala micromecánica, discretizando la matriz y las fibras y otra escala mesomecánica considerando las láminas como homogéneas y ortótropas, con las propiedades elásticas que se obtienen de acuerdo a lo explicado en el punto anterior, utilizando las mismas hipótesis de partida.

En la Figura 5 se muestran los modelos correspondientes a la escala micromecánica y mesomecánica de un laminado discretizado con elementos sólidos tridimensionales. Tanto en la escala micromecánica como en la mesomecánica se analizan laminados constituidos por cuatro láminas unidireccionales de igual espesor y dos secuencias de apilamiento: laminado cruzado ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) y laminado equiangular ($+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ$).

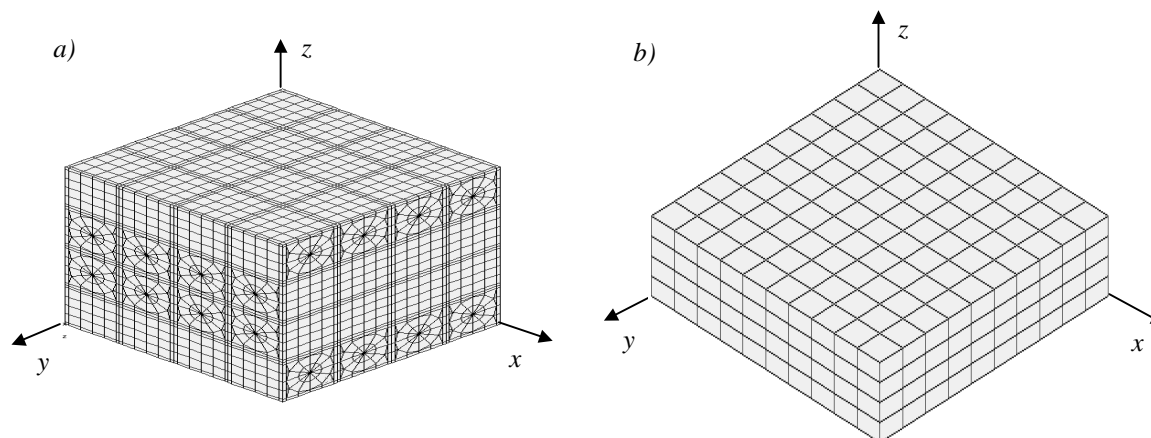


Figura 5: a)Malla de E.F. a escala micromecánica; b)Malla de E.F. a escala mesomecánica.

4 TEORÍA DE ESHELBY

En esta sección se realiza una predicción de las propiedades efectivas de las láminas a partir de las propiedades de las fases componentes utilizando la teoría desarrollada por Eshelby⁶.

Para ello se considera a la fibra como una inclusión en un medio homogéneo equivalente, lo que permite resolver el problema de la inhomogeneidad⁶. Además, se considera el efecto de la interacción entre fibras utilizando el método de Mori – Tanaka⁷. De esta forma, se obtiene una mejor caracterización del comportamiento del compuesto para soluciones no diluidas.

Los resultados de Eshelby muestran que si una inclusión elipsoidal homogénea en una matriz infinita sufre una deformación uniforme ε^T (denominada autodeformación), se induce un campo de deformación y de tensión uniforme ε^C , que está relacionado con la

autodeformación mediante la expresión

$$\varepsilon^C = S^E : \varepsilon^T \quad (16)$$

donde S^E es el tensor de Eshelby y es función del coeficiente de Poisson de la matriz y de las dimensiones de la inclusión. En este trabajo, se utiliza el tensor de Eshelby particularizado para inclusiones cilíndricas de sección circular. Cuando las inclusiones son inhomogéneas, se utiliza el concepto de inclusión homogénea equivalente. La estrategia consiste en reemplazar una inclusión inhomogénea sujeta a una dada autodeformación, por una cierta inclusión homogénea equivalente sobre la que actúa una autodeformación equivalente. Esta autodeformación equivalente se determina de manera tal que los campos de deformación y de tensión obtenidos para las inclusiones inhomogéneas reales y las inclusiones homogéneas equivalentes sean los mismos.

El concepto de inclusión homogénea equivalente puede extenderse al caso en que una deformación mecánica uniforme ε^a ó una tensión externa σ^a se aplica a una inclusión elástica no homogénea en una matriz infinita. Para resolver el problema de Eshelby se debe satisfacer la condición de igualdad de tensiones y deformaciones en la inclusión real y la inclusión equivalente bajo el campo aplicado ε^a (con $\sigma^a = C_m : \varepsilon^a$), que está dada por la siguiente expresión

$$C_f : (\varepsilon^a + \varepsilon^{\text{int}} + \varepsilon^C) = C_m : (\varepsilon^a + \varepsilon^{\text{int}} + \varepsilon^C - \varepsilon^T) \quad (17)$$

Donde C_f y C_m son los tensores constitutivos de la fibra y matriz respectivamente, ε^{int} es la deformación elástica promedio definida por Mori – Tanaka, que permite tener en cuenta la interacción entre inclusiones y está dada por

$$\varepsilon^{\text{int}} = -k_f (\varepsilon^C - \varepsilon^T) \quad (18)$$

Si se reemplazan las expresiones (16) y (18) en la ecuación (17) se puede obtener la autodeformación equivalente ε^T .

Las constantes elásticas efectivas para una material que contiene una dispersión uniforme de inhomogeneidades elipsoidales pueden determinarse como se describe brevemente a continuación⁶. Se denomina E_0 a la energía elástica específica cuando el espécimen está libre de inhomogeneidades y ciertas fuerzas superficiales producen una tensión uniforme σ^a en él. Si se introducen las inhomogeneidades, manteniendo las tracciones superficiales constantes la energía elástica crece $-\sum E_{\text{int}}(\sigma^a)$, que es la suma de las energías de interacción de todas las inhomogeneidades con la tensión particular. Por otra parte, la energía elástica específica de deformación, puede determinarse suponiendo que el material es ortótropo homogéneo con propiedades elásticas efectivas dadas por el tensor constitutivo C . De manera que se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^a C^{-1} \sigma^a &= E_0 - \sum E_{\text{int}}(\sigma^a) \\ &= \frac{1}{2} \sigma^a (C^m)^{-1} \sigma^a + \frac{1}{2} k_f \sigma^a \varepsilon^T \end{aligned} \quad (19)$$

Finalmente, de (19) se puede determinar el tensor constitutivo con las propiedades elásticas efectivas del compuesto.

5 COMPARACIÓN DE RESULTADOS ELÁSTICOS Y CALIBRACIÓN DE LA TEORÍA PROPUESTA^{2,3}

5.1 Introducción

En esta sección se realiza una comparación de los resultados obtenidos utilizando los métodos descritos en las secciones anteriores, tanto para láminas individuales como para laminados. El objetivo general es obtener los tensores α^σ y α^ε que ajusten adecuadamente al comportamiento, de acuerdo a los resultados obtenidos de los modelos micromecánicos.

5.2 Láminas

En esta sección se presentan las propiedades elásticas de distintas láminas, obtenidas a partir de las propiedades de fibra y matriz, utilizando el modelo micromecánico del apartado 3.2, y aplicando la teoría de Eshelby de acuerdo a lo explicado brevemente en la sección 4.

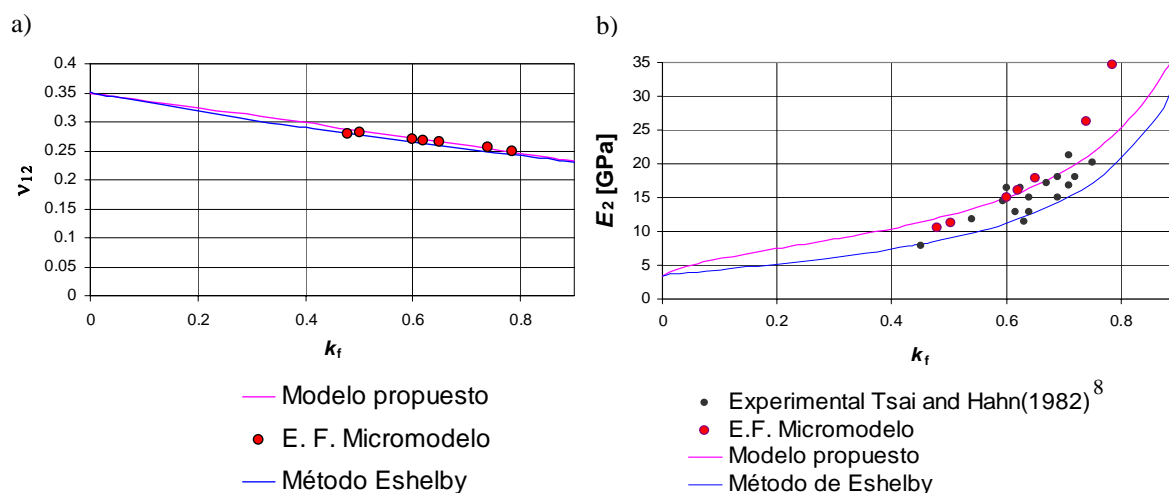


Figura 6: Variación de las propiedades elásticas del compuesto con la proporción de fibras para la lámina con fibra isótropa N° 1 (Tabla 3). a) ν_{12} , b) E_2

La aplicación del modelo presentado en este trabajo puede hacerse con distintas combinaciones serie-paralelo de los subcompuestos. De todas las posibles alternativas, se presenta la que mejor ajusta el comportamiento determinado con los métodos mencionados y

con los resultados experimentales⁸ disponibles, la cual puede especificarse a través de los valores de los elementos de la diagonal de α^σ .

La Figura 6 y 7 muestran la variación de distintos módulos elásticos en función de la proporción de fibra. En la Figura 6 la lámina analizada corresponde a la identificada con el N° 1 en Tabla 1 (fibra isótropa), mientras que la Figura 7 los resultados son de la lámina identificada con el N° 2 en la misma Tabla (fibra ortótropa). La Tabla 3 resume las propiedades elásticas encontradas para las Láminas identificadas con N° 3, 4, 5 y 6 en Tabla 1.

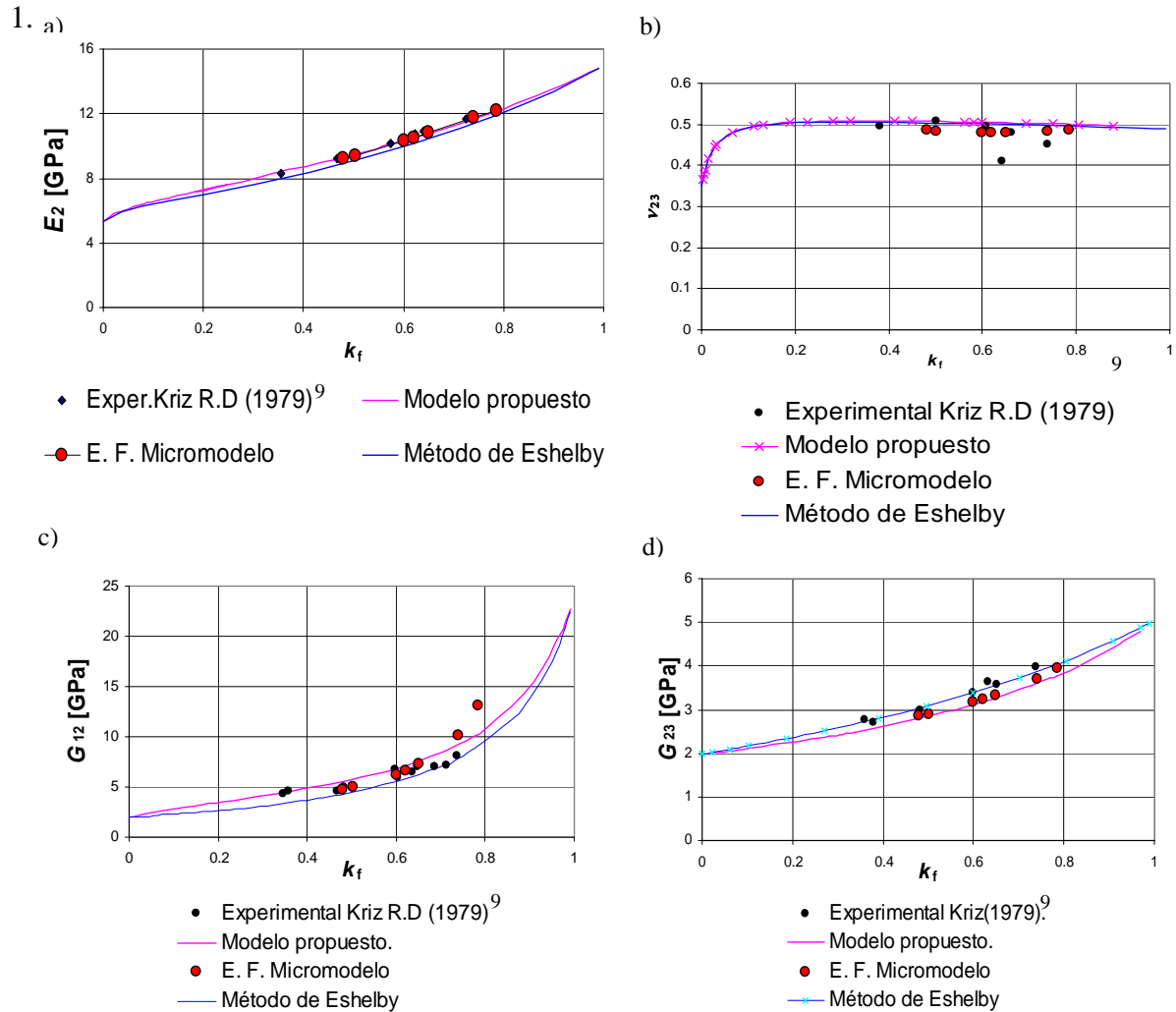


Figura 7: Variación de las propiedades elásticas del compuesto con la proporción de fibras para la lámina con fibra ortótropa N°2 (Tabla 3). a) E_2 ; b) ν_{23} ; c) G_{12} ; d) G_{23}

Tabla 3: Comparación de propiedades elásticas de láminas obtenidas por distintos métodos

Propiedades elásticas	Lámina N° 3 ($k_f = 0.6$)				Lámina N° 4 ($k_f = 0.60$)			
	[1]	[2]	[3]	[4]	[1]	[2]	[3]	[4]
E_1 (GPa)	126	136.8	135.8	136.7	138	139.7	138.7	139.6
E_2 (GPa)	11	9.372	9.51	8.75	11	9.21	9.39	8.57
G_{12} (GPa)	6.6	5.01	4.66	4.14	5.50	4.83	4.47	3.98
ν_{12}	0.280	0.256	0.257	0.253	0.280	0.260	0.261	0.257
ν_{23}	0.4	0.284	0.261	0.319	0.4	0.299	0.272	0.336
Propiedades elásticas	Lámina N° 5 ($k_f = 0.62$)				Lámina N° 6 ($k_f = 0.60$)			
	[1]	[2]	[3]	[4]	[1]	[2]	[3]	[4]
E_1 (GPa)	53.5	51.01	50.6	50.89	45.6	45.88	45.5	45.76
E_2 (GPa)	17.7	15.64	16.1	11.7	16.2	14.72	14.8	11.02
G_{12} (GPa)	5.83	5.37	4.9	4.61	5.83	5.07	4.53	4.32
ν_{12}	0.278	0.257	0.255	0.249	0.278	0.26	0.257	0.252
ν_{23}	0.4	0.455	0.252	0.440	0.4	0.452	0.265	0.440
[1] Resultados experimentales ⁵ [2] Modelo presentado [3] Micromodelo E.F. [4] Método de Eshelby								

5.3 Laminado

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante análisis micromecánico y mesomecánico de acuerdo a lo explicado en el punto 3.3, correspondiente a laminados constituidos por láminas, cuyas propiedades corresponden a las identificadas con el N° 6 en la Tabla 1.

En el análisis mesomecánico se modelaron las láminas utilizando dos alternativas. Por un lado se consideraron como datos de partida los datos experimentales proporcionados por el ejercicio de falla⁵, y por otro lado, se utilizaron como datos de partida las propiedades mecánicas determinadas mediante el análisis micromecánico con elementos finitos. Ver Tabla 3.

Las Tablas 4 y 5 presentan la comparación de los resultados obtenidos utilizando los análisis micromecánico y mesomecánico con los obtenidos utilizando el modelo estudiado, para el laminado cruzado ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) y para el laminado equiangular ($+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ$) respectivamente.

Tabla 4: Comparación propiedades elásticas Laminado cruzado (0°/90°/90°/0°)

Modelo	Datos de partida	E_x GPa	ν_{xy}	ν_{xz}	E_y GPa	ν_{yx}	ν_{yz}	E_z GPa	ν_{zx}	ν_{zy}	G_{yz} GPa	G_{xz} GPa	G_{xy} GPa
E. F. Mesomodelo	(1) Experm.	31.1	0.15	0.36	31.1	0.15	0.36	17.21	0.2	0.2	5.8	5.8	5.83
	(2) Micromodelo	30.3	0.13	0.27	30.3	0.13	0.27	15.13	0.14	0.14	4.91	4.91	4.53
E. F. Micromodelo	(3) Experm.	29.2	0.12	0.28	29.2	0.12	0.28	14.68	0.13	0.13	4.27	4.27	4.41
Modelo Propuesto (meso)	(4) Experm.	31.1	0.15	0.36	31.1	0.15	0.36	17.21	0.2	0.2	5.81	5.81	5.83
Modelo Propuesto (micro)	(5) Experm.	30.3	0.13	0.27	30.3	0.13	0.27	15.13	0.14	0.14	5.11	5.11	4.53

Tabla 5: Comparación propiedades elásticas Laminado equiangular (+45°/-45°/-45°/+45°)

Modelo	Datos de partida	E_x GPa	ν_{xy}	ν_{xz}	E_y GPa	ν_{yx}	ν_{yz}	E_z GPa	ν_{zx}	ν_{zy}	G_{yz} GPa	G_{xz} GPa	G_{xy} GPa
E. F. Mesomodelo	(1) Experm.	17.6	0.51	0.21	17.6	0.51	0.21	17.9	0.21	0.21	5.6	5.6	11.3
	(2) Micromodelo	14.3	0.58	0.13	14.3	0.58	0.13	15.7	0.14	0.14	4.72	5.16	10.8
E. F. Micromodelo	(3) Experm.	17.0	0.44	0.21	17.1	0.41	0.23	14.29	0.13	0.13	4.26	4.85	10.6
Modelo Propuesto (meso.)	(4) Experm.	17.6	0.51	0.2	17.7	0.52	0.2	17.2	0.2	0.2	5.81	5.81	13.5
Modelo Propuesto (micro)	(5) Experm.	14.4	0.59	0.13	14.4	0.59	0.13	15.1	0.14	0.14	5.11	5.11	13.4

En las tablas 4 y 5 puede observarse que los resultados en el plano del laminado son similares, pero hay diferencia más marcada fuera del plano, sobre todos en los valores de los coeficientes de Poisson, según se tome como punto de partida los resultados experimentales de las fibras y matriz (filas 2, 3 y 5) o los de las láminas (filas 1 y 4). Esto se debe fundamentalmente a la imprecisión en la determinación experimental de las propiedades mecánicas de las componentes, fundamentalmente de las fibras cuyas propiedades mecánicas no pueden ser medidas en forma directa debido a sus dimensiones.

6 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

6.1 Introducción

El modelo presentado fue implementado en un programa de elementos finitos 3D no lineal con el que se realizaron los ejemplos de aplicación que se muestran a continuación. Si bien los estudios realizados en los puntos anteriores, para determinar los tensores α^σ de los laminados son elásticos, el modelo descrito en la sección 2 permite trabajar con componentes

inelásticas. En este trabajo se supone que tanto las fibras como la matriz tienen un comportamiento elastoplástico anisótropo³. Se presenta, a continuación, el análisis del comportamiento no lineal en el plano de las láminas designadas como 3 y 6 en la Tabla 1, en donde están resumidas las propiedades elásticas de las fibras y la matriz. En la Tabla 6 se presentan las resistencias de las fibras y matrices correspondientes.

Tabla 6: Resistencias de fibra y matriz que componen las láminas analizadas

LÁMINA	3	6
Tipo de Matriz	3501-6 epoxy	MY750/HY917/DY063 epoxy
Resistencia a tracción, Y_{mt} (MPa)	69	80
Resistencia a compres., Y_{mc} (MPa)	250	120
Resistencia al corte, S_m (MPa)	50	---
Deformación últ. en trac., ε_{mt} (%)	1.7	5
Tipo de fibra	AS4	Silenka E-Glass 1200 tex
Resist. A trac. long., X_{ft} (MPa)	3350	2150
Resist. a comp. long., X_{fc} (MPa)	2500	1450
Deform. últ. trac. long., ε_{f1T} (%)	1.488	2.905
Deform. Últ. compres. Long., ε_{f1c} (%)	1.111	1.959

Los resultados experimentales corresponden a ensayos de tubos de láminas sometidos a distintas combinaciones de presión interna, torsión y carga axial^{5,10}.

6.2 Lámina 3 (AS4/3501-6)

En este punto se estudia el comportamiento no lineal en el plano de una lámina con fibra de carbono AS4 y matriz epoxi 3501-6. En la Figura 8 se muestra las curvas tensión-deformación axial y transversal para un ensayo de tracción en la dirección de las fibras. El comportamiento es prácticamente lineal hasta la rotura frágil por la falla de las fibras en tracción. Se observa una buena coincidencia entre resultados numéricos y experimentales con diferencias más marcadas en la deformación transversal que está definida por el coeficiente de Poisson.

En la Figura 9 se muestra el comportamiento tensión-deformación en la dirección de la carga y transversal cuando la lámina se somete a compresión normal a la dirección de las fibras. Se puede ver un ajuste razonable de los resultados experimentales. En este caso se observa un comportamiento no lineal desde tensiones más bajas debido al aplastamiento de la matriz.

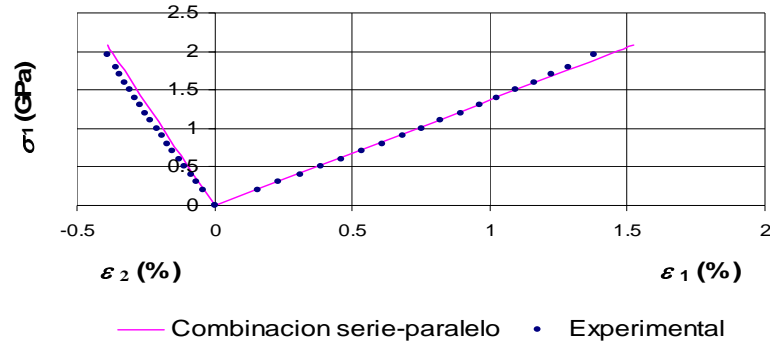


Figura 8: Curva tensión-deformación tracción longitudinal para Lámina⁵ N° 3 (Tabla 1)

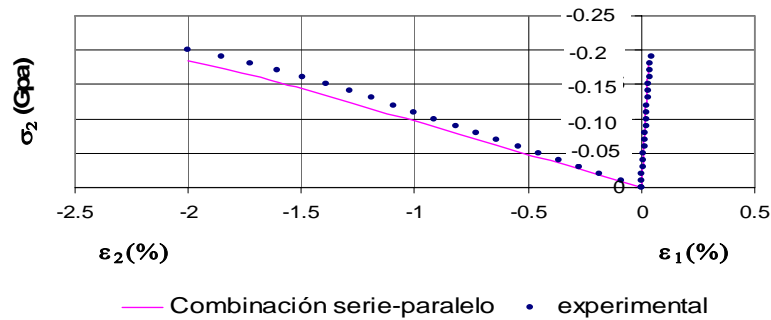


Figura 9: Curva tensión/deformación compresión transversal para Lámina⁵ N° 3 (Tabla 1)

En la Figura 10 se grafica la curva tensión tangencial-deformación angular en un ensayo de corte puro. Nuevamente el modelo numérico reproduce adecuadamente los resultados experimentales. En este caso la no linealidad en el comportamiento es debida, en primer lugar a la falla por corte de la matriz, seguida por la falla por corte de las fibras.

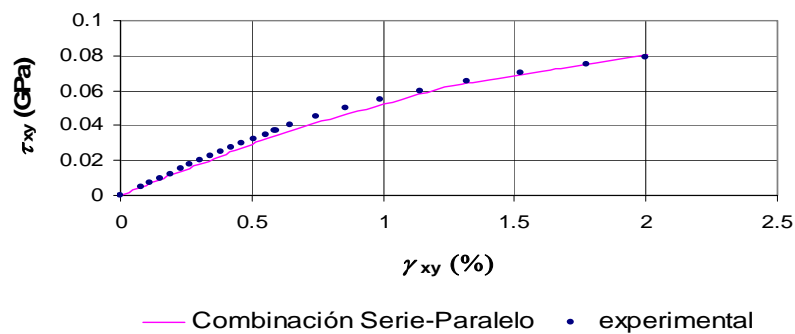


Figura 10: Curva tensión/deformación corte en el plano para Lámina⁵ N° 3 (Tabla 1)

6.3 Lámina 6 (Silenka E-Glass 1200 tex MY750/HY917/DY063 epoxy)

En este punto se estudia el comportamiento no lineal en el plano de una lámina con fibra de vidrio Silenka E-Glass 1200 tex y matriz epoxi MY750/HY917/DY063. En la Figura 11 se representa el comportamiento tensión-deformación en la dirección de la carga y transversal cuando la lámina se somete a compresión normal a la dirección de las fibras. Se puede ver un ajuste razonable de los resultados experimentales. En este caso se observa un comportamiento no lineal desde tensiones más bajas debido al aplastamiento de la matriz.

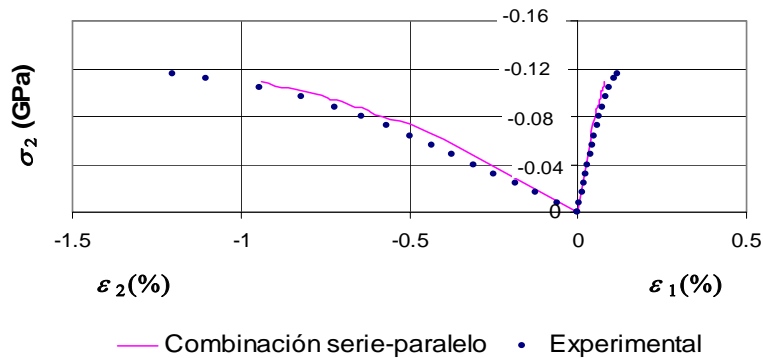


Figura 11: Curva tensión/deformación compresión transversal para Lámina⁵ N° 6 (Tabla 1)

En la Figura 12 se grafica la curva tensión tangencial-deformación angular en un ensayo de corte puro. Se observa un razonable ajuste de los resultados experimentales. En este caso la no linealidad en el comportamiento es debida, en primer lugar a la falla por corte de la matriz, seguida muy pronto por la falla por corte de las fibras.

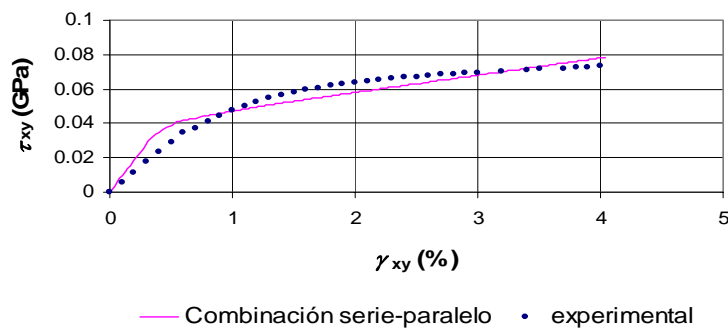


Figura 12: Curva tensión/deformación corte en el plano para Lámina⁵ N° 6 (Tabla 1)

7 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado en una primera etapa, un estudio a nivel elástico del comportamiento micromecánico de compuestos formados por láminas reforzadas con fibras unidireccionales. El análisis micromecánico se llevó a cabo utilizando elementos finitos tridimensionales. En primer lugar se desarrolló el estudio a nivel de una lámina simple,

descretizando fibra y matriz. En segundo lugar se analizó el comportamiento de laminados, en este caso se trabajó a un nivel micromecánico propiamente dicho, discretizando fibra y matriz de cada lámina, y a un nivel mesomecánico discretizando las láminas como ortótropas homogéneas. También a nivel laminar se realizó el análisis aplicando el método de Eshelby y Mori Tanaka, particularizado a inclusiones inhomogéneas cilíndricas de sección circular. De los resultados obtenidos y de la comparación con resultados experimentales, se obtuvieron las hipótesis respecto a la forma en que se transmiten las tensiones en el interior del compuesto, y se calibró los parámetros que definen el comportamiento serie-paralelo a través de los tensores α .

Los resultados de este estudio a nivel micro y meso mecánico con distintos métodos y su comparación con resultados experimentales muestran cierta variabilidad de las constantes elásticas de las láminas y laminados, fundamentalmente de los módulos de Poisson. Uno de los orígenes de esas diferencias es la gran dispersión observada en las características mecánicas de las fibras. Por otro lado, la calibración del modelo presentado permite reproducir satisfactoriamente los valores de constantes elásticas del laminado utilizando combinaciones simples. Nuevamente se observa también en este modelo, mayores diferencias respecto a resultados experimentales en los valores de los coeficientes de Poisson.

Finalmente, el modelo calibrado se aplicó para la determinación de la respuesta no lineal de láminas con fibras unidireccionales. Aún cuando la calibración fue hecha en base al comportamiento elástico, el modelo permite trabajar con componentes elastoplásticas anisótropas. Dicha anisotropía incluye aspectos intrínsecos del material como es el caso de la fibra o algunos propios de la distribución en el compuesto como la menor resistencia a tracción de la matriz en la dirección normal a la fibra para tener en cuenta, en forma simplificada, la debilidad de la interfaz fibra-matriz. Los ejemplos desarrollados muestran que, pese a las diferencias observadas en las constantes elásticas, el modelo logra reproducir la respuesta inelástica macroscópica pero identificando el comportamiento de las distintas componentes y el origen y modo de falla del compuesto.

REFERENCIAS

- [1] Chaboche J.L.; Lesne O.; Pottier T., (1998). *Continuum damage mechanics of composites: Towards a unified approach*, Damage Mechanics in Engineering Materials, Studies in Applied Mechanics 46, Voyiadjis, Ju and Chaboche, Elsevier, 3-26.
- [2] Luccioni B., Oller S. (2003). Modelo para compuestos reforzados con fibras. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, ISSN 1666-6070, 2049-2063.
- [3] Luccioni B. (2004). Modelo para compuestos laminados reforzados con fibras. *XIV Congress on numerical methods and their applications-Enief 2004*.
- [4] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel and S. Botello, "A plastic damage constitutive model for composite materials", *Int. J. Solids and Structures*, 33 (17), 2501-2518 (1996).
- [5] P. D. Soden, M. J. Hinton and A. S. Kaddour, "Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates", *Compos. Sci. Technol.*, 58, 1011-1022 (1998).

- [6] Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. London*, 241, 376-396.
- [7] Mori, T. & Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 21, 571-574.
- [8] S.W. Tsai, H.T. Hang, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing, Lancaster, Basel, (1980).
- [9] R.D. Kriz, W.W. Stinchomb, *Experimental Mechanics*, 19, 41 (1979).
- [10] P. D. Soden, M. J. Hinton and A. S. Kaddour, "Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data", *Compos. Sci. Technol.*, 62,1489 –1514 (2002).

8 AGRADECIMIENTOS:

Los autores agradecen el apoyo económico del CONICET, del CIUNT y de la UNSa para la realización de este trabajo.