

ESTABILIDAD DE UNA TORRE RETICULADA A TRAVÉS DE UN MODELO CONTINUO

Alberto M. Guzmán^{a,b}, Marta B. Rosales^{b,c} and Carlos P. Filipich^{b,d}

^a*CEREDETEC, FRM, Universidad Tecnológica Nacional, Mendoza, Argentina. Becario de Doctorado del Programa de Becas para Docentes UTN*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^c*CONICET, Argentina*

^d*CIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, Bahía Blanca, Argentina*

Palabras claves: torre reticulada, estabilidad, modelo continuo.

Resumen. El uso de estructuras reticuladas para sistemas de antenas en altura es usual en la infraestructura de comunicaciones. Una geometría común de estas torres consiste en una sección triangular compuesta de tres largueros y una configuración de diagonales en zig-zag. Dado el gran número de grados de libertad del sistema, es usual abordar su estudio a través del modelo viga-columna equivalente. En trabajos previos se han desarrollado modelos continuos con distintos grados de simplificación. En particular se planteó una formulación llamada 6ED que considera 6 grados de libertad (3 desplazamientos y 3 giros) referidos al eje baricéntrico de la sección transversal de la torre. Debe citarse que este enfoque tiene en cuenta el efecto de 2^{do} orden de las cargas axiales y la deformación por corte propia del alma reticulada. En el presente trabajo, se estudia el problema lineal de estabilidad del equilibrio para torres con distintas condiciones de borde, obteniéndose con la formulación desarrollada las correspondientes cargas críticas de flexión y de torsión de la torre analizada. Al mismo tiempo y a fin de comparar resultados, se determinan nuevamente las cargas críticas para el ejemplo analizado, pero prescindiendo de aportes locales tales como los dados por la rigidez flexional local de los largueros. Esta nueva consideración da lugar al desarrollo de un nuevo modelo continuo (llamado 6ED*) más simple aún en su solución que el anterior (6ED), debido fundamentalmente, a que disminuye el orden del sistema diferencial. En todos los casos abordados se utiliza el planteo clásico del problema de autovalores. Dada la complejidad algebraica, los valores de las cargas críticas se obtienen de forma numérica.

1 INTRODUCCIÓN

El uso de estructuras reticuladas para sistemas de antenas en altura es usual en la infraestructura de comunicaciones. Una geometría común de estas torres consiste en una sección triangular uniforme compuesta de tres largueros y una configuración de diagonales en zig-zag. Estos sistemas estructurales presentan una importante cantidad de elementos (largueros y diagonales) por lo que es habitual en el diseño utilizar modelos equivalentes de representación, resultando ello en un menor costo computacional a la hora del análisis (Madagula et al., 1998; Wahba et al., 1998). Ben Kahla (Kahla, 1995) basado en un planteo de flexibilidad, determinó las propiedades elásticas equivalentes para distintos patrones de reticulado de sección transversal triangular, a partir de obtener los desplazamientos del eje centroidal de un tramo del reticulado producidos por una carga unitaria, y luego, compararlos con aquellos desplazamientos obtenidos por la misma carga pero actuando en una viga-columna. Otros autores (Madagula et al., 1998; Wahba et al., 1998), obtuvieron las propiedades equivalentes a partir de modelar vía elementos finitos un tramo de un reticulado espacial fijado a su base. Sobre el extremo libre de dicho reticulado modelado se aplicaron distintas cargas a fin de obtener corrimientos y giros, y con ello, obtener rigideces flexionales, transversales y torsionales, las cuales luego le fueron asignadas al elemento viga-columna. Este proceso lo debieron repetir cada vez que las propiedades geométricas del reticulado o bien las propiedades mecánicas de los elementos del reticulado cambiaban, resultando un proceso poco expeditivo. Por otro lado, Salehian (Salehian, 2008) desarrolló un modelo continuo 1-D de un reticulado espacial con uniones flexibles utilizado para soportar paneles solares que abastecen de energía a satélites en órbita, y con un planteo energético, determinó el modelo de orden reducido. Es de destacar que en cada uno de los desarrollos citados, no fue tenido en cuenta el efecto de 2^{do} orden debido a eventuales cargas de punta actuantes sobre el reticulado, y con ello, no poder determinar las cargas críticas de flexión y torsión conducentes a la inestabilidad del sistema estructural.

A partir de trabajos anteriores desarrollados por los autores del presente trabajo (Filipich et al., 2010; Guzmán et al., 2011a,b, 2012) y a través de un desarrollo energético, se obtuvo la energía mecánica de un modelo simplificado de representación del reticulado espacial, para luego y con la aplicación del principio variacional fundamental de la mecánica, Principio de la Acción Estacionaria de Ostrogradski-Hamilton (Elsigoltz, 1977), obtener directamente las ecuaciones diferenciales (6ED) que gobiernan el movimiento de la torre reticulada analizada. En esta formulación desarrollada, entre otras cosas, queda incorporada la flexibilidad por corte y el efecto de 2^{do} orden debido al peso propio del mástil y a las cargas de punta actuante sobre los largueros.

En todos los casos abordados, en cuanto a las distintas condiciones de borde (C.B.) se refiere, se utiliza el planteo clásico del problema de autovalores. Dada la complejidad algebraica, los valores de las cargas críticas de flexión y torsión se obtienen de forma numérica.

A fin de comparar resultados, se determinan nuevamente las cargas críticas para el ejemplo analizado, pero prescindiendo de aportes locales tales como los dados por la rigidez flexional local de los largueros. Esta nueva consideración da lugar al desarrollo de un nuevo modelo continuo (llamado 6ED*) más simple aún en su solución que el anterior (6ED), debido fundamentalmente, a que disminuye el orden del sistema diferencial.

Por último, se presentan resultados numéricos para el ejemplo analizado determinados a partir de la modelación vía elementos finitos mediante el modelo viga-columna.

2 RETICULADO ANALIZADO

El reticulado analizado corresponde al caso en el cual la traza de los largueros determina una disposición triangular con un mallado de unión en cada uno de los tres planos que conforman los largueros dos a dos, conocido comúnmente como reticulado en zig-zag. Los largueros y diagonales son de directriz recta y de sección transversal constante.

La pieza presenta una longitud L_l (ver Fig. 1), y está constituida por tres largueros continuos unidos entre sí por tres planos de diagonales iguales y articuladas en sus extremos. La sección transversal de cada larguero es A_l y la de cada diagonal A_d . El momento de inercia de los largueros respecto a cada una de las direcciones principales es J_{ly} y J_{lz} . La longitud de cada diagonal es L_d . El material que constituye a los largueros y diagonales es elástico y lineal, siendo el módulo de elasticidad E_l y E_d . Por tratarse de una sección transversal triangular y equilátera, $\beta = 60^\circ$. Cada larguero está sujeto a una carga axial de compresión P_{cro} , de igual valor en cada uno de los mismos.

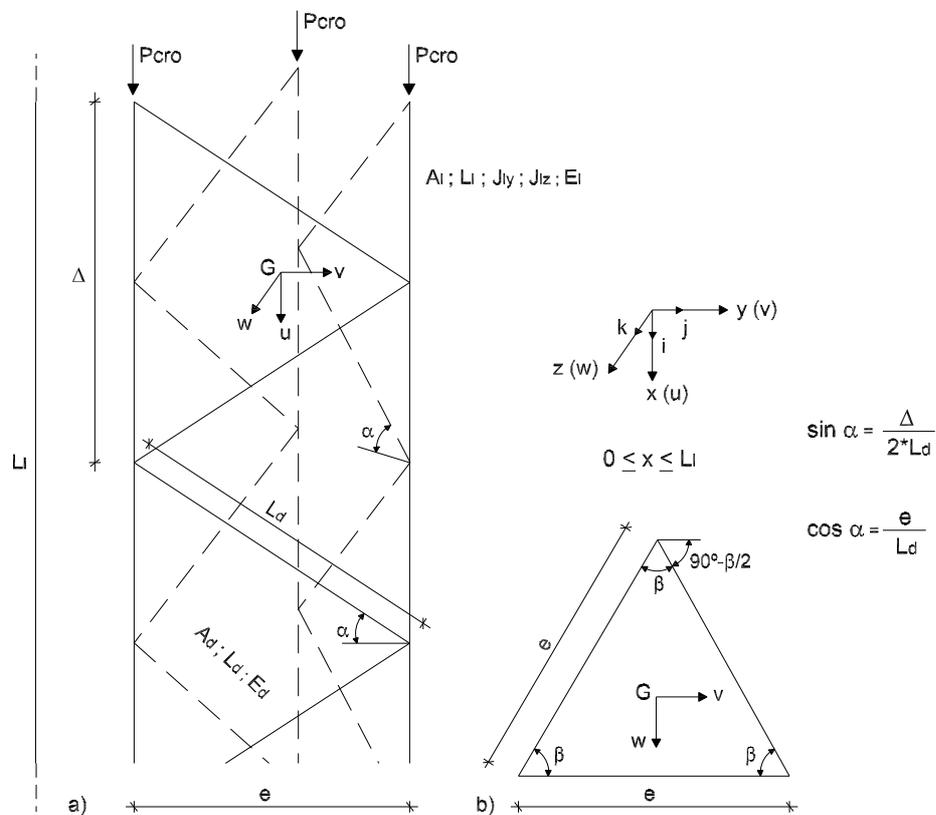


Figura 1: Tramo de torre reticulada analizada. a) Vista. b) Sección transversal

3 MODELO CONTINUO 6ED

Seguidamente se presentan las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde que gobiernan el equilibrio estático de la torre reticulada presentada, y que fuera obtenido en un trabajo anterior (Guzmán et al., 2012).

3.1 Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales resultan en un sistema lineal de 6x6 (6ED), en la variable espacial x , y corresponden a los 6 grados de libertad del sistema equivalente, *i.e.*, un corrimiento axial, dos corrimientos transversales, un giro torsional y dos giros flexionales. El subíndice o indica que se está referido al eje baricéntrico.

$$(EA)_o u''_{o(x)} - 3(p_o + q_{uo(x)}) = 0 \quad (1)$$

$$3E_l J_{ly} v''_{o(x)} - (GA)_o (v''_{o(x)} - \theta'_{wo(x)}) - 3(P_{uo} + p_o x) v''_{o(x)} - 3p_o v'_{o(x)} - 3q_{vo(x)} = 0 \quad (2)$$

$$3E_l J_{lz} w''_{o(x)} - (GA)_o (w''_{o(x)} + \theta'_{vo(x)}) - 3(P_{uo} + p_o x) w''_{o(x)} - 3p_o w'_{o(x)} - 3q_{wo(x)} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta''''_{uo(x)} - \left[(GJ_x)_o + \frac{3e^2}{2} (P_{uo} + p_o x) \right] \theta''_{uo(x)} - \frac{3e^2}{2} p_o \theta'_{uo(x)} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta''_{vo(x)} - (GA)_o (w'_{o(x)} + \theta_{vo(x)}) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta''_{wo(x)} + (GA)_o (v'_{o(x)} - \theta_{wo(x)}) = 0 \quad (6)$$

En donde se definió a:

$$\begin{aligned} (EA)_o &= 3(E_l A_l + E_d A_d \sin^3 \alpha) \\ (GA)_o &= \frac{3}{2} E_d A_d \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ (GJ_x)_o &= \frac{1}{4} E_d A_d e^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

respectivamente como la rigidez axial, la rigidez transversal y la rigidez torsional global del sistema respecto a las direcciones principales de su eje baricéntrico. $J_{lp} = J_{ly} + J_{lz}$, resulta ser el momento de inercia polar de cada larguero respecto de sus ejes locales. Por otro lado, trabajando con las Ecs. (2) y (6) (o con Ecs. 3 y 5) a fin de poner $\theta_{wo(x)}$ en función de $v_{o(x)}$ (o $\theta_{vo(x)}$ en función de $w_{o(x)}$), se definió también a:

$$\begin{aligned} (EJ_y)_o &= 3E_l J_{ly} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \\ (EJ_z)_o &= 3E_l J_{lz} + (EA)_o \frac{e^2}{6} \end{aligned} \quad (8)$$

respectivamente como las rigideces flexionales globales del sistema respecto a las direcciones principales del eje baricéntrico. Estas definiciones (Ecs. 7 y 8) resultan ser las propiedades equivalentes para la modelación de la torre reticulada como viga-columna.

Observando el sistema de ecuaciones diferenciales, se puede establecer que tanto el corrimiento axial como el giro torsional son movimientos que actúan desacopladamente, mientras que se presenta un acoplamiento entre los giros flexionales y los corrimientos transversales.

Esta formulación continua (6ED) permite la representación simplificada de la torre reticulada analizada. Como se observa, en dicha formulación quedan incorporados los efectos asociados a rigideces locales de largueros y diagonales, así como también, a la influencia del efecto de 2^{do} orden y de las deformaciones por corte propias del alma reticulada.

3.2 Condiciones de borde

En cuanto a las condiciones de borde (C.B.) para este modelo de orden reducido, resultan:

$$\left| \left[(EA)_o u'_{o(x)} - 3P_{uo} \right] \mathcal{U}_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (9)$$

$$\left| \left[3E_l J_{ly} v'''_{o(x)} - (GA)_o (v'_{o(x)} - \theta_{wo(x)}) - 3(P_{uo} + p_o x) v'_{o(x)} - 3P_{vo} \right] \mathcal{V}_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (10)$$

$$\left| \left[3E_l J_{lz} w'''_{o(x)} - (GA)_o (w'_{o(x)} + \theta_{vo(x)}) - 3(P_{uo} + p_o x) w'_{o(x)} - 3P_{wo} \right] \mathcal{W}_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (11)$$

$$\left| \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta'''_{uo(x)} - \left[(GJ_x)_o + \frac{3e^2}{2} (P_{uo} + p_o x) \right] \theta'_{uo(x)} - M_u \right\} \mathcal{G}_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (12)$$

$$\left| \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{vo(x)} - M_v \right] \mathcal{G}_{vo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (13)$$

$$\left| \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \theta'_{wo(x)} - M_w \right] \mathcal{G}_{wo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (14)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v''_{o(x)} - M_{wo} \right) \mathcal{V}'_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (15)$$

$$\left| \left(E_l J_{lz} w''_{o(x)} - M_{vo} \right) \mathcal{W}'_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (16)$$

$$\left| \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta''_{uo(x)} \right) \mathcal{G}'_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (17)$$

siendo éstas las dieciocho (18) C.B., (9 por extremo), necesarias para resolver el sistema diferencial (dado que el sistema presenta orden 18). Los términos \mathcal{U}_o , \mathcal{V}_o , \mathcal{W}_o , \mathcal{G}_{uo} , \mathcal{G}_{vo} y \mathcal{G}_{wo} representan las variaciones de los corrimientos y giros cinemáticamente admisibles (compatibles con las condiciones de vínculo) del eje baricéntrico. A fin de asignar de manera correcta las C.B. a cada caso particular, se deben tener presente las C.B. de los largueros de la torre reticulada. Por ejemplo, si en uno de los extremos de la torre los largueros presentan los corrimientos en las tres direcciones principales (x , y , z) impedidos, esto dará lugar a que las C.B. cinemáticas para el eje baricéntrico sean las de restricción del corrimiento en las tres direcciones principales y del giro alrededor de dichos ejes principales. Al mismo tiempo, para estas condiciones de borde del reticulado, los giros locales en los extremos de los largueros no están impedidos.

4 SOLUCION DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD

Se entiende por estabilidad la propiedad del sistema estructural de mantener su estado durante las acciones exteriores. Si el sistema no tiene esta propiedad se dice que es inestable (Feodosiev, 1980). El caso más simple corresponde a la pérdida de estabilidad de una barra comprimida axialmente. Cuando la fuerza es suficientemente grande, la barra no puede mantener la forma recta y obligatoriamente se flexiona. El estudio de la estabilidad de la barra comprimida fue planteado y resuelto por primera vez por Euler en el siglo XVIII.

Para la determinación de la solución del sistema diferencial presentado, y con ello las cargas críticas de flexión y torsión del problema, las funciones solución propuestas son reemplazadas en el sistema diferencial, en donde actúan como acciones externas en el sistema solo cargas estáticas axiales de compresión en los extremos de los largueros (ver Fig. 2).

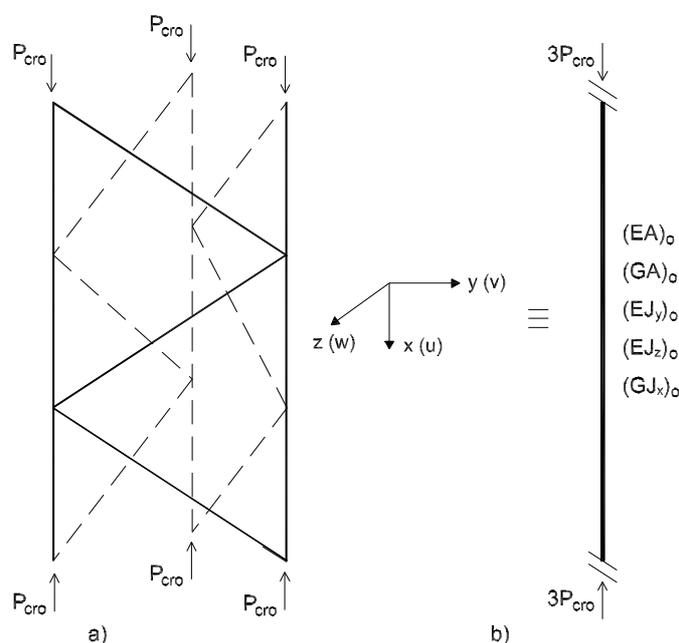


Figura 2: Carga crítica. a) Torre reticulada. b) Modelo continuo 6ED

4.1 Carga crítica de flexión

Proponiendo la solución exponencial clásica tanto para el corrimiento transversal $v_o(x)$ como para el giro flexional $\theta_{wo(x)}$ incognita, se tiene:

$$\begin{aligned} v_o(x) &= V e^{\lambda x} \\ \theta_{wo(x)} &= \Psi e^{\lambda x} \end{aligned} \quad (18)$$

donde en general λ es una constante compleja. Reemplazando estas propuestas de solución en el sistema diferencial espacial, (Ecs. 2 y 6), se obtiene:

$$\left[3E_l J_{ly} \lambda^4 - (GA)_o \lambda^2 + 3P_{cro} \lambda^2 \right] V + (GA)_o \lambda \Psi = 0 \quad (19)$$

$$(GA)_o \lambda V + \left[\frac{e^2 (EA)_o}{6} \lambda^2 - (GA)_o \right] \Psi = 0 \quad (20)$$

siendo este un sistema algebraico, lineal y homogéneo en las constantes V y Ψ , en donde la condición de no trivialidad resulta en una ecuación algebraica de sexto orden en λ :

$$E_l J_{ly} \frac{e^2(EA)_o}{2} \lambda^6 - \left[(EJ_y)_o (GA)_o - P_{cro} \frac{e^2(EA)_o}{2} \right] \lambda^4 - 3P_{cro} (GA)_o \lambda^2 = 0 \quad (21)$$

de donde se obtienen las siguientes seis raíces, las cuales evidentemente dependen de la carga crítica P_{cro} :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 ; \lambda_3 ; \lambda_4 ; \lambda_5 ; \lambda_6 \quad (22)$$

De este modo las soluciones complementarias, las que en este caso resultan ser iguales a las generales, debido a la carga crítica de flexión resultan:

$$v_{o(x)} = V_1 + V_2 x + V_3 e^{\lambda_3 x} + V_4 e^{\lambda_4 x} + V_5 e^{\lambda_5 x} + V_6 e^{\lambda_6 x} \quad (23)$$

$$\theta_{wo(x)} = \Psi_1 + \Psi_2 x + \Psi_3 e^{\lambda_3 x} + \Psi_4 e^{\lambda_4 x} + \Psi_5 e^{\lambda_5 x} + \Psi_6 e^{\lambda_6 x} \quad (24)$$

en donde las constantes V_j y Ψ_j (con $j = 1, \dots, 6$) se determinan a partir de las condiciones de borde del problema. Derivando estas soluciones complementarias y reemplazando en el sistema diferencial homogéneo asociado a las Ecs. (6.2 y 6.6), se obtiene la relación entre V y Ψ , y de este modo solo son seis las constantes arbitrarias a determinar a partir de las C.B. Reescribiendo las soluciones, se tiene:

$$v_{o(x)} = V_1 + V_2 x + V_3 e^{\lambda_3 x} + V_4 e^{\lambda_4 x} + V_5 e^{\lambda_5 x} + V_6 e^{\lambda_6 x} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \theta_{wo(x)} = & V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 x} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 x} + \\ & + V_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 x} + V_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 x} \end{aligned} \quad (26)$$

donde las seis constantes arbitrarias V_j (con $j = 1, \dots, 6$) son las que se determinan a partir de las C.B. del problema. Con un desarrollo equivalente, se obtienen las soluciones para el corrimiento transversal en la dirección de z y el giro flexional alrededor del eje y producido por la carga crítica.

4.2 Carga crítica de torsión

Proponiendo nuevamente la solución exponencial clásica para el giro torsional incognita, se tiene:

$$\theta_{uo(x)} = \Theta e^{\lambda x} \quad (27)$$

y luego reemplazando esta propuesta de solución en la ecuación diferencial dada en (6.4), resulta la siguiente ecuación algebraica y homogénea:

$$\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \lambda^4 + \left[e^2 P_{cro} - (GJ_x)_o \right] \lambda^2 = 0 \quad (28)$$

de donde se obtienen las siguientes cuatro raíces, las cuales evidentemente dependen de la carga crítica P_{cro} :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 ; \lambda_3 = -\lambda_4 = \left[\frac{2(GJ_x)_o - e^2 P_{cro}}{e^2 E_l J_{lp}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

De este modo la solución complementaria, y por ende la solución general para el giro torsional, resulta:

$$\theta_{wo(x)} = \Theta_1 + \Theta_2 x + \Theta_3 e^{\lambda_3 x} + \Theta_4 e^{\lambda_4 x} \tag{30}$$

en donde la constante Θ_j (con $j = 1, \dots, 4$) se determinan a partir de las C.B. del problema.

5 IMPLEMENTACION DEL MODELO CONTINUO 6ED

Se analiza el caso correspondiente a un reticulado bajo la condición de vínculo apoyado-apoyado (A-A). En este caso los extremos de los largueros presentan restringidos los corrimientos en las direcciones principales de y y z . Para otras condiciones de vínculo (ver Fig. 3) el procedimiento será equivalente, y su desarrollo no se incluye por razones de brevedad.

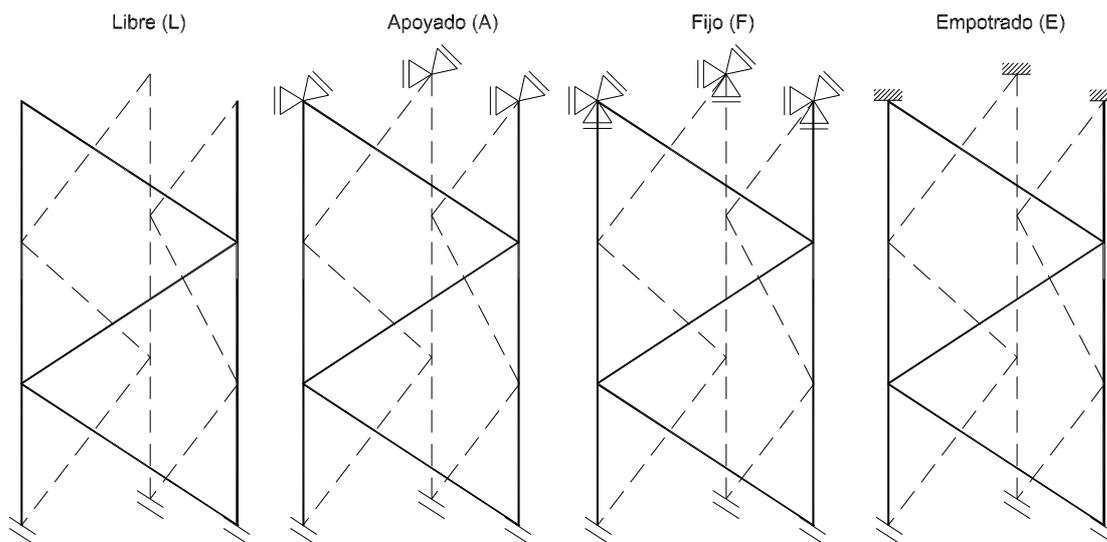


Figura 3: Condiciones de vínculo

5.1 Carga crítica de flexión

Las C.B. del eje baricéntrico para el movimiento transversal en la dirección de y acoplado al giro flexional alrededor del eje z , resultan:

$$\left[\begin{matrix} 3E_l J_{ly} v_o'''(x) - (GA)_o (v_o'(x) - \theta_{wo(x)}) - 3P_{cro} v_o'(x) \end{matrix} \right] \mathcal{V}_o(x) \Big|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \tag{31}$$

$$\left| \left(\frac{e^2(EA)_o}{6} \theta'_{wo(x)} \right) \mathcal{G}_{wo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (32)$$

$$\left| \left(E_l J_{ly} v''_{o(x)} \right) \mathcal{V}'_{o(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (33)$$

Reemplazando las soluciones propuestas para el corrimiento transversal y el giro flexional, Ec. (18), en las C.B. correspondientes al presente caso analizado, resulta ahora:

$$v_{o(0)} = V_1 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo(0)} = & V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} + \\ & + V_5 \lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} + V_6 \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$v''_{o(0)} = V_3 \lambda_3^2 + V_4 \lambda_4^2 + V_5 \lambda_5^2 + V_6 \lambda_6^2 = 0 \quad (36)$$

$$v_{o(L_l)} = V_1 + V_2 L_l + V_3 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \theta'_{wo(L_l)} = & V_3 \lambda_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 L_l} + \\ & + V_5 \lambda_5 \left[\frac{1}{\lambda_5} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_5 \right]^{-1} e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6 \left[\frac{1}{\lambda_6} - \frac{e^2(EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_6 \right]^{-1} e^{\lambda_6 L_l} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$v''_{o(L_l)} = V_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_l} + V_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} + V_5 \lambda_5^2 e^{\lambda_5 L_l} + V_6 \lambda_6^2 e^{\lambda_6 L_l} = 0 \quad (39)$$

De este modo, se tiene un sistema de seis ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas. La condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes de este sistema de ecuaciones, deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a P_{cro} en la Ec. (21) se determinan las cuatro raíces λ_j (con $j = 3, \dots, 6$) (ya se sabe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo, determinando entonces la carga crítica de flexión P_{cro}^f alrededor del eje y . Con un desarrollo equivalente se determina la carga crítica de flexión alrededor del eje z .

5.2 Carga crítica de torsión

Las C.B. del eje baricéntrico para el giro torsional alrededor del eje x , resultan:

$$\left| \left\{ \frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta'''_{uo(x)} - \left[e^2 P_{uo} - (GJ_x)_o \right] \theta'_{uo(x)} \right\} \mathcal{G}_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (40)$$

$$\left| \left(\frac{e^2 E_l J_{lp}}{2} \theta''_{uo(x)} \right) \mathcal{G}'_{uo(x)} \right|_{x=0}^{x=L_l} = 0 \quad (41)$$

Reemplazando ahora la solución propuesta para el giro torsional, Ec. (27), en las C.B. correspondientes al presente caso analizado, resulta ahora:

$$\theta_{uo(0)} = \Theta_1 + \Theta_3 + \Theta_4 = 0 \quad (42)$$

$$\theta''_{uo(0)} = \Theta_3 \lambda_3^2 + \Theta_4 \lambda_4^2 = 0 \quad (43)$$

$$\theta_{uo(L_l)} = \Theta_1 + \Theta_2 L_l + \Theta_3 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (44)$$

$$\theta''_{uo(L_l)} = \Theta_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L_l} + \Theta_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L_l} = 0 \quad (45)$$

De este modo, se tiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales, algebraicas y homogéneas. Nuevamente, la condición de solución no trivial exige que el determinante de la matriz de los coeficientes de este sistema de ecuaciones, deba ser nulo. De este modo, asignando un valor inicial a P_{cro} en la Ec. (28) se determinan las dos raíces λ_3 y λ_4 (ya se sabe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), y si dicho valor asignado es el correcto, entonces se verificará la condición de determinante nulo, determinando entonces la carga crítica de torsión P_{cro}^t alrededor del eje x.

6 MODELO CONTINUO SIMPLIFICADO 6ED*

En la mayoría de los casos prácticos resulta J_{ly} , J_{lz} y J_{lp} de valor muy pequeño respecto a la rigidez seccional de la torre reticulada. Por lo tanto, al prescindir de los anteriores aportes locales disminuye el orden del sistema diferencial, resultando con ello más simple su solución. Con un desarrollo equivalente al indicado en la sección 4, pero habiendo prescindido de los aportes locales, resulta:

6.1 Carga crítica de flexión

En este caso la condición de no trivialidad que da lugar a la solución del sistema algebraico resultante, es una ecuación algebraica de cuarto orden en λ :

$$\left[- (GA)_o + 3P_{cro} \right] \frac{e^2 (EA)_o}{6} \lambda^4 - 3P_{cro} (GA)_o \lambda^2 = 0 \quad (46)$$

de donde se obtienen las siguientes cuatro raíces, las cuales evidentemente dependen de la carga crítica P_{cro} :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 ; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \left\{ \frac{18P_{cro}(GA)_o}{\left[3P_{cro} - (GA)_o \right] e^2 (EA)_o} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

De este modo las soluciones complementarias, debido a la carga crítica de flexión resultan:

$$v_o(x) = V_1 + V_2 x + V_3 e^{\lambda_3 x} + V_4 e^{\lambda_4 x} \quad (48)$$

$$\theta_{wo(x)} = \Psi_1 + \Psi_2 x + \Psi_3 e^{\lambda_3 x} + \Psi_4 e^{\lambda_4 x} \quad (49)$$

y nuevamente a partir de la relación entre V y Ψ , las constantes a determinar a partir de las C.B. son solo cuatro. Reescribiendo las soluciones, se tiene:

$$v_{o(x)} = V_1 + V_2 x + V_3 e^{\lambda_3 x} + V_4 e^{\lambda_4 x} \quad (50)$$

$$\theta_{wo(x)} = V_2 + V_3 \left[\frac{1}{\lambda_3} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_3 \right]^{-1} e^{\lambda_3 x} + V_4 \left[\frac{1}{\lambda_4} - \frac{e^2 (EA)_o}{6(GA)_o} \lambda_4 \right]^{-1} e^{\lambda_4 x} \quad (51)$$

Para la implementación del modelo continuo 6ED*, se siguen los mismos pasos establecidos en la sección 5, permitiendo así obtener la carga crítica de flexión P_{cro}^{*f} habiendo prescindido de los aportes locales. Con un desarrollo equivalente, se obtiene la carga crítica de flexión alrededor del eje z .

6.2 Carga crítica de torsión

En este caso la condición de no trivialidad que da lugar a la solución del sistema algebraico resultante, en una ecuación algebraica de orden dos en λ :

$$\left[e^2 P_{cro} - (GJ_x)_o \right] \lambda^2 = 0 \quad (52)$$

de donde se obtiene directamente que:

$$P_{cro}^{*t} = \frac{(GJ_x)_o}{e^2} \quad (53)$$

Se observa en este caso, en donde se ha prescindido de los aportes locales, que la carga crítica de torsión P_{cro}^{*t} resulta independiente de las C.B. y de la altura L_l de la torre reticulada.

7 EJEMPLO ANALIZADO

Se trata de una torre reticulada, de sección transversal triangular equilátera ($\beta = 60^\circ$) y cuyas características se indican a continuación: altura $L_l = 24.0$ m, paso entre diagonales $\Delta = 0.2$ m, lado de cada plano de diagonales $e = 0.3$ m, sección de largueros $A_l = 67.69 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, Inercia flexional de largueros $J_{ly} = J_{lz} = 17.51 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, sección de diagonales $A_d = 16.78 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ y módulo de elasticidad $E = 200000$ MPa.

Los resultados numéricos para el modelo continuo desarrollado, se referencian en adelante como 6ED, mientras que para el modelo continuo simplificado para el cual se ha prescindido de aportes locales, se los referencia como 6ED*. Al mismo tiempo y para comparar resultados, se lleva adelante una modelación vía elementos finitos (modelo discreto), denominado en adelante VC-EF, en el cual la torre reticulada fue modelada como viga-columna y cuyas propiedades equivalentes fueron obtenidas de las Ecs. (7 y 8), utilizando 120 elementos tipo viga de dos nodos. El *software* utilizado en la simulación numérica fue SAP2000 (CSi., 2007).

En las Tablas 1 y 2 se muestran los resultados obtenidos para las cargas críticas de flexión y torsión mediante la formulación desarrollada en este trabajo y mediante el modelo vía elementos finitos, para la torre reticulada con distintas condiciones de vinculación de sus largueros. La notación "-" que aparece en algunas de las celdas, indica que mediante el modelo VC-EF no es posible obtener resultados, ya sea porque el grado de libertad de torsión no está incluido en ese modelo, o bien porque la condición de vínculo extremo de larguero empotrado (E) no puede ser representada por el mismo. Las referencias para las condiciones de vínculo corresponden a las indicadas en la Fig. 3.

Caso	6ED [N]	6ED* [N]	VC-EF [N]
A-A	35413	34812 (-1.70)	35405 (-0.02)
F-F	138636	136270 (-1.71)	138541 (-0.07)
E-E	138671	-	-
L-F	8900	8751 (-1.67)	8901 (0.01)
L-E	8901	-	-
A-F	71791	70576 (-1.69)	71767 (-0.03)
A-E	71803	-	-

Tabla 1: Carga crítica de flexión P_{cro}^f en cada larguero. El valor entre () indica el error % respecto al modelo 6ED

Caso	6ED [N]	6ED* [N]	VC-EF [N]
A-A	2388436	2387836 (-0.02)	-
F-F	2388436	2387836 (-0.02)	-
E-E	2402350	-	-
L-F	2387730	2387836 (0.00)	-
L-E	2387836	-	-
A-F	2388436	2387836 (-0.02)	-
A-E	2399865	-	-

Tabla 2: Carga crítica de torsión P_{cro}^t en cada larguero. El valor entre () indica el error % respecto al modelo 6ED

8 COMENTARIOS FINALES

En trabajos de los autores desarrollados anteriormente, se presentaron las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde de un modelo continuo 6ED para la representación de un torre de sección transversal triangular uniforme, y reticulada mediante diagonales dispuestas en un patrón conocido comúnmente como zig-zag. En este modelo, a diferencia de otros establecidos en la literatura, se considera entre otros, los aportes locales de rigideces, y fundamentalmente, el efecto de 2^{do} orden debido a eventuales cargas de punta actuantes sobre los largueros del reticulado. Esta última consideración permite determinar las cargas críticas de flexión y torsión, las cuales a la hora del diseño resultan de suma importancia a fin de establecer la posible inestabilidad del sistema estructural estudiado. Al mismo tiempo, el desarrollo de dicho modelo permitió obtener las propiedades equivalentes necesarias para la modelación, vía elementos finitos, del reticulado como viga-columna (VC-EF). Dichas propiedades equivalentes tienen incorporadas, entre otras cosas, los efectos 2^{do} orden anteriormente mencionados.

La implementación del modelo continuo (6ED), implicó un mínimo esfuerzo y costo computacional para abordar la solución numérica del sistema diferencial, fundamentalmente debido a que solo hay acoplamiento entre el corrimiento transversal y el giro flexional. La solución exponencial clásica para las funciones corrimientos incógnitas, permitió el análisis de la torre reticulada con cualquiera de los posibles casos de C.B. Los resultados numéricos obtenidos indicaron un muy buen desempeño del modelo continuo 6ED.

Al mismo tiempo, la implementación del modelo continuo simplificado (6ED*) prescindiendo de los aportes locales, dió lugar a una simplificación adicional al momento de la solución numérica, principalmente por la disminución del orden del sistema diferencial. Los resultados numéricos obtenidos son satisfactorios, observando que cuando los largueros resultan esbeltos,

el aporte local de los mismos es poco significativo, lo cual justificaría poder prescindir de dichos aportes.

Por último, el modelo tridimensional empotrando los tres largueros (condición E) restringe la flexibilidad local de los largueros, y dicha condición de vínculo no puede ser representada con el modelo VC-EF ni con el modelo 6ED*. No obstante y como se dijo anteriormente, al comparar los resultados obtenidos para las condiciones de borde "F" y "E" mediante el modelos 6ED, se puede ver que la influencia es mínima debido a que los largueros son relativamente esbeltos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo brindado por el CeReDeTeC, por el Programa de Becas para Docentes de la UTN - Formación de Posgrado, y por el Departamento de Ingeniería de la UNS.

REFERENCIAS

- CSi. *SAP2000 v11 Analysis Reference Manual*. Computers and Structures, Inc., 2007.
- Elsogoltz L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, Moscu, U.R.S.S., 1977.
- Feodosiev V. *Resistencia de materiales*. MIR, Moscu, U.R.S.S., 1980.
- Filipich C., Guzmán M., and Rosales M. Planteo discreto-continuo de piezas reticuladas planas y espaciales. *Mecánica Computacional*, XXIX:863–882, 2010.
- Guzmán M., Rosales M., and Filipich C. Planteo y solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la estática de un reticulado espacial. *Sexto Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería*, 1:187–201, 2011a.
- Guzmán M., Filipich C., and Rosales M. Modelo continuo de un reticulado espacial para problemas dinámicos. *Mecánica Computacional*, XXX:1205–1220, 2011b.
- Guzmán M., Filipich C., and Rosales M. Modelo continuo 1D para la representación simplificada de un reticulado espacial. *Mecánica Computacional*, XXXI:2411–2429, 2012.
- Kahla B. Equivalent beam-column analysis of guyed towers. *Computers and Structures*, 55(4):631–645, 1995.
- Madagula M., Wahba Y., and Monforton G. Dynamic response of guyed masts. *Engineering Structures*, 20(12):1097–1101, 1998.
- Salehian A. Micropolar Continuum Modeling of Large Space Structures with Flexible Joints and Thermal Effects: Theory and Experiment. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2008.
- Wahba Y., Madugula M., and Monforton G. Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. *Computers and Structures*, 68:207–212, 1998.