

FRECUENCIAS NATURALES DE VIBRACIÓN DE NANOTUBOS DE CARBÓN MEDIANTE MODELO NO LOCAL

Fernanda M. de Borbón^{a,b}, Daniel Ambrosini^{a,b}

^a*Grupo de Dinámica Experimental, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad Universitaria, 5500 Mendoza, Argentina, fdeborbon@fing.uncu.edu.ar, <http://www.fing.uncu.edu.ar>*

^b*CONICET, Concejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,*

Palabras claves: Frecuencias naturales, nanotubos de carbón, modelo no local, elemento viga.

Resumen. Se estudia la influencia del parámetro no local en las frecuencias de vibración de nanotubos de carbón de dos capas (DWCNTs). Modelos físicos no locales aproximan el fenómeno de nanoescala en forma más precisa que las teorías convencionales locales. El modelo físico teórico-numérico basado en las hipótesis de Vlasov, fue inicialmente modificado permitiendo la inclusión de deformaciones angulares inducidas por el esfuerzo de corte e inercias rotacionales en las ecuaciones de movimiento. Además, el efecto de escala fue incorporado obteniéndose las ecuaciones diferenciales de movimiento no locales. Se desarrolla un elemento finito de viga que incorpora la formulación del modelo. En este trabajo se analizan la influencia del parámetro no local en nanotubos de diferentes esbelteces y condiciones de borde.

1 INTRODUCCIÓN

Los nanotubos de carbón (CNT) poseen un gran potencial como materiales debido a su comportamiento mecánico, térmico y eléctrico superior en relación a otros materiales. Se están investigando diversas aplicaciones tales como nuevos sensores, portadores de materiales biológicos, gases, líquidos y como refuerzos en materiales compuestos (Nakabayashi et al., 2008; Li et al., 2008).

Existen tres grandes enfoques para el estudio de CNT: la modelación atómica, la cual incluye técnicas como la dinámica molecular (DM) (Hu et al. 2012, Ansari et al, 2013) de gran precisión pero de elevado costo computacional, modelos híbridos atomísticos – continuos (Li and Chou, 2003; Mir et al. 2008) donde se incorporan potenciales interatómicos a través de igualar la energía potencial molecular con la energía de deformación mecánica y finalmente modelos de continuo los cuales si bien simplifican la estructura a considerar, permiten estudiar grandes sistemas con un costo computacional inferior a los dos enfoques anteriores. Los modelos de continuo pueden ser además de vigas (Ambrosini and de Borbón 2012, Yoon et al. 2004) y placas o cascaras (Mitra and Gopalakrishnan, 2009).

Aunque se ha demostrado el campo de aplicación de los modelos de continuo (Harik, 2002), su utilización en pequeñas escalas es cuestionada debido al hecho que en dimensiones nano o micro, la red atómica se vuelve importante y la naturaleza discreta del material no es homogénea como en un continuo. En otras palabras, las propiedades de los materiales son tamaño dependiente y por lo tanto el efecto de escala debe ser considerado (Arash and Wang, 2012). La teoría de Eringen (Eringen, 2002) indica que el estado tensional en un punto es función del campo de deformaciones en todos los puntos del cuerpo y por lo tanto, podría incorporar información sobre las fuerzas interatómicas. Peddieson et al (2003) demostró que la teoría no local podría ser aplicada a nanotecnología. Wang (2005) indicó que debería usarse para predecir correctamente propagación de ondas y fue el primero en estimar el parámetro de escala a utilizar. La ventaja principal en la utilización del modelo no local depende del parámetro de escala a utilizar el cual debe ser correctamente calibrado. Duan et al (2007) calibraron el parámetro para un modelo de viga Timoshenko dependiendo de la relación de aspecto. Ansari et al (2011) y Ansari and Sahmani (2012) calibraron modelos de placa y vigas con DM obteniendo valores del parámetro en función de la condición de borde del modelo. Además, observaron que estos valores no dependían de la quiralidad del CNT.

La teoría de Euler – Bernoulli no local es utilizada en la obtención de frecuencias naturales de vibración (Sudak, 2003; Ehteshami and Hajabasi, 2011) pero las frecuencias de resonancia de micro y nano resonadores son extremadamente altas y en consecuencia un modelo de Timoshenko predice mejor las frecuencias que un modelo de Euler. Asghari et al. (2010) presentaron una formulación no lineal de Timoshenko basado en la teoría de tensiones acoplada modificada. Yang et al (2011) investigaron la propagación de onda en DWCNT con un modelo de viga Timoshenko de orden superior. Shen et al. (2012) utilizaron la teoría no local de Timoshenko para la vibración de biosensores.

En cuanto a la aplicación de métodos numéricos para la obtención de frecuencias de CNT, Adali (2008) presentó una formulación variacional para la resolución de vibraciones libres y forzadas. Shakouri et al. (2009) obtuvo una solución aproximada a través del método de Galerkin. Eltahir et al. (2013) utilizaron el método de elementos finitos para el estudio de vibraciones de nano vigas Euler – Bernoulli.

En este trabajo se desarrolla un elemento finito de viga incorporando el efecto de escala al modelo de Ambrosini et al (2000) y Ambrosini and de Borbón (2012). Se analiza la influencia del parámetro no local en nanotubos de diferentes esbelteces y condiciones de borde.

2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

De acuerdo a la teoría de elasticidad no local de Eringen (Eringen 2002), la tensión en un punto de referencia x en un continuo elástico depende no solo de la deformación en el punto x sino también de la deformación de todo los puntos del cuerpo. Entonces, el tensor de tensiones no local σ en el punto x se expresa como

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \int_V \lambda(|x-x'|, \alpha) C_{ijkl} \epsilon_{kl}(x') dV(x'), \quad \forall x \in V \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned}\quad (1)$$

donde σ_{ij} y ϵ_{ij} son los tensores de tensiones y deformaciones respectivamente, C_{ijkl} es el tensor de elasticidad clásico de cuarto orden y u_i es el vector desplazamiento. La Eq. (1) muestra que la tensión σ en un punto de referencia de la deformación local en x' inducida por la deformación en un volumen finito V alrededor en un punto material a través de un kernel no local $\lambda(|x-x'|, \alpha)$ que pondera la deformación clásica alrededor del punto x producida por la deformación en el punto x' . λ es el módulo no local o factor de atenuación la cual es función de la distancia Euclidiana $|x-x'|$ y de una constante material α . α se define como $e_0 a/l$ la cual depende de características de longitud internas a (longitud de la red, tamaño de grano, longitud del enlace C-C), y de características de longitud externas l (longitud de fisura, longitud de onda). El parámetro e_0 es una constante adimensional propia de cada material el cual puede ser estimado a partir de experimentos o simulaciones numéricas. No existe un único valor de e_0 para nanotubos porque está relacionado a la compleja microestructura interna del material y depende tanto del tamaño como de la quiralidad del nanotubo.

La función kernel $\lambda(|x-x'|, \alpha)$ está dada por Eringen como

$$\lambda(|x-x'|, \alpha) = (2\pi^2 \alpha^2)^{-1} K_0 \left(\frac{\sqrt{x \cdot x'}}{l\alpha} \right) \quad (2)$$

donde K_0 es la función de Bessel modificada. Combinando la Eq. (1) y (2) se puede obtener la relación constitutiva de la forma siguiente

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma = C : \epsilon \quad (3)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano.

Dado que los nanotubos tienen una dimensión preponderante frente a las otras como es el caso de las vigas, las ecuaciones constitutivas pueden aproximarse a la tensión unidimensional determinada como

$$\sigma(x) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma(x)}{\partial x^2} = E \epsilon(x) \quad (4)$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young. Cuando el parámetro no local $e_0 a$ es igual a cero se recuperan las ecuaciones constitutivas de la teoría clásica.

Se desea incorporar el efecto de escala a las ecuaciones desarrolladas por Ambrosini et al. (2000). Este modelo basado en la teoría de Vlasov para vigas de pared delgada y sección abierta, es una teoría general de vigas que puede ser utilizada en vigas de pared abierta como cerrada como es el caso de los nanotubos. Además, incorpora en su formulación

deformaciones por corte e inercias rotacionales en las ecuaciones de movimientos y esfuerzos internos. Siguiendo la convención de Vlasov, se adopta una terna izquierda de coordenadas globales (x, y, z) como se muestra en la **Error! Reference source not found.** Los desplazamientos asociados son designados como ξ , η y ζ .

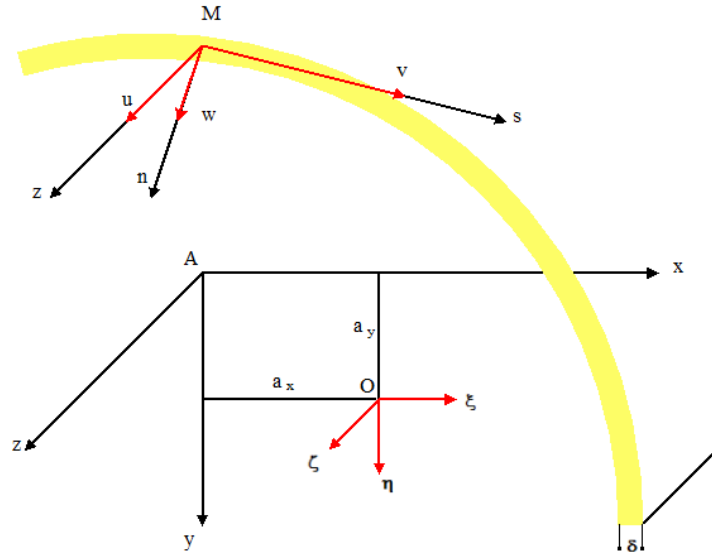


Figure 1: Sistema de eje coordenado

Del modelo de Ambrosini et al. (2000) se desprende que la relación deformación – desplazamiento y que las ecuaciones cinemáticas de Euler – Lagrange son las siguientes:

$$\varepsilon = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) x - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) y - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \varphi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} = \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - q_y - \rho J_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} = \rho F \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - q_x - \rho J_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = -\rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \rho F a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \rho F a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - m_a$$

donde M_x , M_y y B son momentos flectores y B es el bimomento respectivamente, ρ es la densidad, F es el área de la sección transversal, J_x y J_y son los momentos de inercia respecto a los ejes principales, J_d es el módulo de torsión, J_φ es el momento de inercia sectorial, a_x y a_y son las coordenadas del centro de corte, θ es el giro alrededor del eje z , q_x , q_y y m_a representan las cargas externas aplicadas por unidad de longitud. γ_{mx} y γ_{my} están dados por:

$$\begin{aligned}\gamma_{mx} &= \frac{Q_x}{k_x FG}, \\ \gamma_{my} &= \frac{Q_y}{k_y FG}\end{aligned}\quad (7)$$

donde Q_x y Q_y son los esfuerzos de corte, k_x y k_y son los coeficientes de Cowper y G es el módulo de elasticidad transversal. Finalmente

$$r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F} \quad (8)$$

Teniendo en cuenta las Eq. (4) y (6), se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}M_x - \mu \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} &= -EJ_x \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right), \\ M_y - \mu \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} &= EJ_y \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}B - \mu \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} &= -EJ_\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \\ \mu &= (e_0 a)^2\end{aligned}\quad (10)$$

Sustituyendo las Eq. (9) en la (6) se obtienen las ecuaciones diferenciales de movimiento no locales.

$$\begin{aligned}EJ_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) + \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) - \\ - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \mu \rho J_x \left(\frac{\partial^6 \eta}{\partial z^4 \partial t^2} - \frac{\partial^5 \gamma_{my}}{\partial z^3 \partial t^2} \right) = q_y - \mu \frac{\partial^2 q_y}{\partial z^2}, \\ EJ_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) + \rho F \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) - \\ - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \mu \rho J_y \left(\frac{\partial^6 \xi}{\partial z^4 \partial t^2} - \frac{\partial^5 \gamma_{mx}}{\partial z^3 \partial t^2} \right) = q_x - \mu \frac{\partial^2 q_x}{\partial z^2}, \\ EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \rho F a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \\ + \mu \rho J_\varphi \frac{\partial^6 \theta}{\partial z^4 \partial t^2} + \mu GJ_d \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - \mu \rho F \left(a_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + a_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = m_a - \mu \frac{\partial^2 m_a}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (11)$$

2.1 Modelo para nanotubos de carbón

En un nanotubo de doble capa (DWCNT por sus siglas en inglés) los desplazamientos en la dirección x e y de cada tubo están acoplados por la interacción p dada por las fuerzas de van der Waals. Mientras que los desplazamientos de torsión se mantienen desacoplados. Como los tubos interiores y exteriores son concéntricos originalmente y la interacción de van der Waals está determinada por el espacio entre los tubos, la presión de van der Waals neta permanece igual a cero para cada tubo si los tubos vibran coaxialmente, es decir si tienen la misma curva de desplazamiento. Para una pequeña amplitud no coaxial producida por vibraciones lineales, la presión de van der Waals en cualquier posición ξ (ó η) entre dos tubos depende linealmente de la diferencia de los desplazamientos de los tubos en esa posición (Ru, 2000):

$$p = c_1(\xi_2 - \xi_1), \quad (12)$$

donde c es el coeficiente de interacción de van der Waals entre los tubos. El coeficiente c puede ser estimado como (Saito 2001):

$$c_k = \frac{320(2r_k)}{0.16a^2} \text{ erg/cm}^2 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Otras expresiones de c pueden encontrarse en la literatura, pero como ha quedado demostrado en de Borbón and Ambrosini (2012) la elección del parámetro afecta ampliamente las frecuencias no coaxiales.

Teniendo en cuenta las Eq. (11) y (12) se obtienen las ecuaciones diferenciales de movimiento no locales para DWCNT.

$$\begin{aligned} EJ_y \left(\frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{1mx}}{\partial z^3} \right) + \rho F \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \right) - \rho J_y \left(\frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{1mx}}{\partial z \partial t^2} \right) - \\ - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial t^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \mu \rho J_y \left(\frac{\partial^6 \xi_1}{\partial z^4 \partial t^2} - \frac{\partial^5 \gamma_{1mx}}{\partial z^3 \partial t^2} \right) = c_1(\xi_2 - \xi_1) - \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} EJ_y \left(\frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{2mx}}{\partial z^3} \right) + \rho F \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \right) - \rho J_y \left(\frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{2mx}}{\partial z \partial t^2} \right) - \\ - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial t^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \mu \rho J_y \left(\frac{\partial^6 \xi_2}{\partial z^4 \partial t^2} - \frac{\partial^5 \gamma_{2mx}}{\partial z^3 \partial t^2} \right) = -c_1(\xi_2 - \xi_1) + \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & EJ_x \left(\frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my1}}{\partial z^3} \right) + \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \right) - \rho J_x \left(\frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my1}}{\partial z \partial t^2} \right) - \\
 & - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \mu \rho J_x \left(\frac{\partial^6 \eta_1}{\partial z^4 \partial t^2} - \frac{\partial^5 \gamma_{my1}}{\partial z^3 \partial t^2} \right) = c_1 (\eta_2 - \eta_1) - \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial z^2} \right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 & EJ_x \left(\frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my2}}{\partial z^3} \right) + \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \right) - \rho J_x \left(\frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my2}}{\partial z \partial t^2} \right) - \\
 & - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2 \partial t^2} \right) + \mu \rho J_x \left(\frac{\partial^6 \eta_2}{\partial z^4 \partial t^2} - \frac{\partial^5 \gamma_{my2}}{\partial z^3 \partial t^2} \right) = -c_1 (\eta_2 - \eta_1) + \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial z^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F a_y \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - \rho F a_x \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \\
 & + \mu \rho J_\varphi \frac{\partial^6 \theta_1}{\partial z^4 \partial t^2} + \mu GJ_d \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} - \mu \rho F \left(a_y \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial t^2} + a_x \frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = 0 \\
 & EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F a_y \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \rho F a_x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \\
 & + \mu \rho J_\varphi \frac{\partial^6 \theta_2}{\partial z^4 \partial t^2} + \mu GJ_d \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^4} - \mu \rho F \left(a_y \frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial t^2} + a_x \frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

3 MODELO DE ELEMENTO FINITOS

3.1 Formulación variacional

Expresando las Eq. (14) a (16) solamente en términos de los desplazamientos y eliminando las deformaciones por corte:

$$\begin{aligned}
& EJ_{y1} \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^4} + \rho F_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \right) - \frac{EJ_{y1} \rho}{k_x G} \left(\frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial z^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial z^2} \right) - \\
& - \rho J_{y1} \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial z^2} + \frac{\rho^2 J_{1y}}{k_x G} \left(\frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^4} + a_y \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} \right) - \mu \rho F_1 \left(\frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial z^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial z^2} \right) + \\
& + \mu \rho J_y \frac{\partial^6 \xi_1}{\partial z^4 \partial z^2} - \frac{\mu \rho^2 J_{1y}}{k_x G} \left(\frac{\partial^6 \xi_1}{\partial z^2 \partial z^4} + a_y \frac{\partial^6 \theta_1}{\partial z^2 \partial z^4} \right) - c_1 (\xi_2 - \xi_1) + \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
& EJ_{y2} \frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^4} + \rho F_2 \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} \right) - \frac{EJ_{y2} \rho}{k_x G} \left(\frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial z^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial z^2} \right) - \\
& - \rho J_{y2} \frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial z^2} + \frac{\rho^2 J_{2y}}{k_x G} \left(\frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^4} + a_y \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^4} \right) - \mu \rho F_2 \left(\frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial z^2} + a_y \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial z^2} \right) + \\
& + \mu \rho J_{2y} \frac{\partial^6 \xi_2}{\partial z^4 \partial z^2} - \frac{\mu \rho^2 J_{2y}}{k_x G} \left(\frac{\partial^6 \xi_2}{\partial z^2 \partial z^4} + a_y \frac{\partial^6 \theta_2}{\partial z^2 \partial z^4} \right) + c_1 (\xi_2 - \xi_1) - \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EJ_x \frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^4} + \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial z^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \right) - \frac{EJ_x \rho}{k_y G} \left(\frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial z^2} - a_x \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial z^2} \right) - \\
& - \rho J_x \frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial z^2} + \frac{\rho^2 J_x \partial^2}{k_y G \partial z^2} \left(\frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^4} - a_x \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} \right) - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial z^2} - a_x \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial z^2} \right) + \\
& + \mu \rho J_x \frac{\partial^6 \eta_1}{\partial z^4 \partial z^2} - \mu \frac{\rho^2 J_x}{k_y G} \left(\frac{\partial^6 \eta_1}{\partial z^2 \partial z^4} - a_x \frac{\partial^6 \theta_1}{\partial z^2 \partial z^4} \right) - c_1 (\eta_2 - \eta_1) + \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial z^2} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
& EJ_x \frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^4} + \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} \right) - \frac{EJ_x \rho}{k_y G} \left(\frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial z^2} - a_x \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial z^2} \right) - \\
& - \rho J_x \frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial z^2} + \frac{\rho^2 J_x \partial^2}{k_y G \partial z^2} \left(\frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^4} - a_x \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^4} \right) - \mu \rho F \left(\frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial z^2} - a_x \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial z^2} \right) + \\
& + \mu \rho J_x \frac{\partial^6 \eta_2}{\partial z^4 \partial z^2} - \mu \frac{\rho^2 J_x}{k_y G} \left(\frac{\partial^6 \eta_2}{\partial z^2 \partial z^4} - a_x \frac{\partial^6 \theta_2}{\partial z^2 \partial z^4} \right) + c_1 (\eta_2 - \eta_1) - \mu c_1 \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial z^2} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EJ_{\varphi} \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - \rho J_{\varphi} \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F a_y \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - \rho F a_x \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \\
& + \mu \rho J_{\varphi} \frac{\partial^6 \theta_1}{\partial z^4 \partial t^2} + \mu GJ_d \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} - \mu \rho F \left(a_y \frac{\partial^4 \xi_1}{\partial z^2 \partial t^2} + a_x \frac{\partial^4 \eta_1}{\partial z^2 \partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = 0 \\
& EJ_{\varphi} \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - \rho J_{\varphi} \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F a_y \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \rho F a_x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \\
& + \mu \rho J_{\varphi} \frac{\partial^6 \theta_2}{\partial z^4 \partial t^2} + \mu GJ_d \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^4} - \mu \rho F \left(a_y \frac{\partial^4 \xi_2}{\partial z^2 \partial t^2} + a_x \frac{\partial^4 \eta_2}{\partial z^2 \partial t^2} - r^2 \frac{\partial^4 \theta_2}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Las Eq. (17) a (19) junto con las condiciones de borde representan la forma fuerte o diferencial del problema. Para desarrollar un elemento finito, las ecuaciones diferenciales pueden ser sustituidas por la forma débil equivalente (Beker et al ,1981; Zienkiewicz and Taylor, 1994). A partir del método de Galerkin para operadores diferenciales de orden par

$$\int_0^l v_i A(u_i) dz = 0 \quad i = 1, \dots, 3 \tag{20}$$

donde $A(u_i)$ representa la ecuación diferencia con $u_1 = \xi$, $u_2 = \eta$ and $u_3 = \theta$. El problema débil es encontrar

$$\begin{aligned}
& u_i \in \text{Cin} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, 3 \\
& \underbrace{B(u_i, v_i)}_{\text{Trabajo Virtual interno}} = \underbrace{l(v_i)}_{\text{Trabajo virtual externo}} \\
& \forall v_i \in \text{Cin}^* \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, 3 \\
& \text{Siendo} \\
& \text{Cin} = \left\{ u_i(z, t) \in L_2(\Omega), \frac{\partial u_i(z, t)}{\partial z} \in L_2(\Omega) \text{ and } \frac{\partial^2 u_i(z, t)}{\partial z^2} \in L_2(\Omega) \right\} \\
& \text{Cin}^* = \left\{ v_i(z, t) \in L_2(\Omega), \frac{\partial v_i(z, t)}{\partial z} \in L_2(\Omega) \text{ and } \frac{\partial^2 v_i(z, t)}{\partial z^2} \in L_2(\Omega) \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

donde el operador $B(u_i, v_i)$ contiene términos asociados a la rigidez y masa y el operador $l(v_i)$ contiene las condiciones de borde. Las funciones u_i elegidas poseen las siguientes características:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \xi(z, t) = \alpha_1(t) \xi(z) \\
u_2 &= \eta(z, t) = \alpha_2(t) \eta(z) \\
u_3 &= \theta(z, t) = \alpha_3(t) \theta(z)
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\alpha_i = e^{i\omega t} \quad i = 1, \dots, 3 \tag{23}$$

3.2 Elemento Viga

Para interpolar los desplazamientos de las funciones u_i y v_i se adoptaron los polinomios cúbicos de Hermite como funciones de forma (Figura 2).

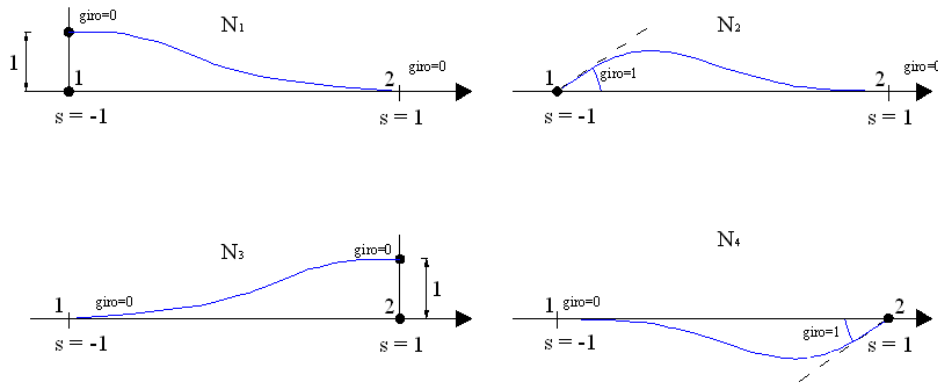


Figura 2: Funciones de forma. Polinomios cúbicos de Hermite.

Los desplazamientos de un elemento de longitud h_e se definen como

$$u_i = v_i = N_i^e a_i^e \quad (24)$$

donde N_i^e es la matriz de funciones de forma para un elemento y a_i^e es el vector nodal con los grados de libertad del elemento. Utilizando la siguiente nomenclatura para indicar la derivada primera y segunda de las funciones de forma:

$$G^e = \left(\frac{\partial N_1^e(s)}{\partial s} \quad \frac{\partial N_2^e(s)}{\partial s} \quad \frac{\partial N_3^e(s)}{\partial s} \quad \frac{\partial N_4^e(s)}{\partial s} \right) \left(\frac{ds}{dz} \right)$$

$$B^e = \left(\frac{\partial^2 N_1^e(s)}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^2 N_2^e(s)}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^2 N_3^e(s)}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^2 N_4^e(s)}{\partial s^2} \right) \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 \quad (25)$$

Se pueden presentar finalmente las expresiones de las matrices de rigidez y masa elementales incorporando la formulación no local. Las matrices de masa se presentan como una suma de matrices solo con el propósito de clarificar su contenido.

$$K^e = \begin{bmatrix} \int B^T EJ_y B dz & 0 & 0 \\ 0 & \int B^T EJ_x B dz & 0 \\ 0 & 0 & \int B^T EJ_\varphi B dz \\ & & + \\ & & \int G^T GJ_d G dz \end{bmatrix} \quad (26)$$

Las primeras dos matrices M_1^e y Mnl_1^e contienen los términos de masa de la teoría clásica y no local propiamente dicha. La matriz M_2^e contiene términos asociados a las deformaciones por corte. Finalmente, M_3^e y Mnl_3^e contiene términos asociados a las deformaciones por corte pero a la derivada cuarta del tiempo tanto en su forma local como no local. En vigas esbeltas, estas últimas matrices pueden ser despreciadas (Clough and Penzien, 1975).

$$M_1^e = \begin{bmatrix} \int N^T m N dz & & \\ + & 0 & \int N^T m a_y N dz \\ \int G^T \rho J_y G dz & & \\ 0 & \int N^T m N dz & \\ & + & - \int N^T m a_x N dz \\ & \int G^T \rho J_x G dz & \\ \int N^T m a_y N dz & - \int N^T m a_x N dz & \int N^T m r^2 N dz \\ & & + \\ & & \int G^T \rho J_\varphi G dz \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$Mnl_1^e = \begin{bmatrix} \int G^T \mu m G dz & & \\ + & 0 & \int G^T \mu m a_y G dz \\ \int B^T \mu \rho J_y B dz & & \\ \hline 0 & \int G^T \mu m G dz & \\ & + & - \int G^T \mu m a_x G dz \\ & \int B^T \mu \rho J_x B dz & \\ \hline \int G^T \mu m a_y G dz & - \int G^T \mu m a_x G dz & \int G^T \mu m r^2 G dz \\ & & + \\ & & \int B^T \mu \rho J_\phi B dz \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$M_2^e = \begin{bmatrix} \int G^T \frac{mEJ_y}{k_x FG} G dz & & \int G^T \frac{mEJ_y}{k_x FG} a_y G dz \\ & 0 & \\ \hline 0 & \int G^T \frac{mEJ_x}{k_y FG} G dz & - \int G^T \frac{mEJ_x}{k_y FG} a_x G dz \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$M_3^e = \begin{bmatrix} \int N^T \frac{\rho J_y m}{k_x FG} N dz & & \int N^T \frac{\rho J_y m}{k_x FG} a_y N dz \\ & 0 & \\ \hline 0 & \int N^T \frac{\rho J_x m}{k_y FG} N dz & - \int N^T \frac{\rho J_x m}{k_y FG} a_x N dz \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$Mnl_3^e = \begin{bmatrix} \int G^T \mu \frac{\rho J_y m}{k_x FG} G dz & & \int G^T \mu \frac{\rho J_y m}{k_x FG} a_y G dz \\ & 0 & \\ \hline 0 & \int G^T \mu \frac{\rho J_x m}{k_y FG} G dz & - \int G^T \mu \frac{\rho J_x m}{k_y FG} a_x G dz \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Las matrices de rigidez y masa han sido ordenadas de modo de mostrar el acoplamiento flexo torsional.

3.3 Problema de autovalores

El problema de autovalores es:

$$(K - \lambda M_1 - \lambda M_2 - \lambda Mnl_2 + \lambda^2 M_3 + \lambda^2 Mnl_3)a = 0 \quad (32)$$

donde

$$\lambda = \omega^2 \quad (33)$$

Si se denomina

$$b = \lambda a \quad (34)$$

La eq. (32) puede ser expresada como

$$Ka - \lambda a M_1 - \lambda a M_2 - \lambda a Mnl_2 + \lambda b M_3 + \lambda b Mnl_3 = 0 \quad (35)$$

La eq. (35) puede ser expresada en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_1 + M_2 + Mnl_2 & -M_3 - Mnl_3 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

Por lo tanto se puede encontrar la frecuencia angular y la frecuencia como

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\lambda}, \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (37)$$

4 SIMULACIONES NUMÉRICAS

Para validar el modelo de viga y el elemento de viga desarrollado se reproduce un ejemplo de Ehteshami and Hajabasi (2011). Luego, las frecuencias coaxiales y no coaxiales son obtenidas para nanotubos de diferentes esbelteces considerando las deformaciones por corte. Se analiza la influencia del parámetro no local.

4.1 Ejemplo de validación

El nanotubo se encuentra simplemente apoyado y empotrado – apoyado y tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} E = 1 \text{ TPa} & \rho = 2,3 \text{ g/cm}^3 \\ t = 0,35 \text{ nm} & \nu = 0,25 \\ d_1 = 0,7 \text{ nm} & d_2 = 1,4 \text{ nm} \\ \mu = e_0 a/l = 0,1 & l/d_2 = 10 \end{array}$$

Se utilizan 10 elementos viga para la obtención de las frecuencias naturales de vibración. Los resultados se presentan en **Error! Reference source not found.** y [Tabla 2](#).

Frecuencias [Hz]			
	Este trabajo	Ehteshami (2011)	Diferencia
$\mu = 0$	7,45e10	7,45e10	0,0%
$\mu = 0,1$	7,14 e10	7,10 e10	0,42%

Tabla 1: Ejemplo de validación - CNT Simplemente apoyado.

Frecuencias [Hz]			
	Este trabajo	Ehteshami (2011)	Diferencia
$\mu = 0$	1.16e11	1.16e11	0,0%
$\mu = 0,1$	1,11e11	1,10e11	0,64%

Tabla 2: Ejemplo de validación - CNT Empotrado apoyado.

Para ambos ejemplos, los resultados obtenidos con el elemento de viga desarrollado presentan una excelente concordancia.

4.2 Influencia del parámetro no local

Con el fin de investigar la influencia del modelo no local en las frecuencias naturales de vibración, se estudian diferentes ejemplos numéricos con un modelo de Euler (EBM) y teniendo en cuenta las deformaciones por corte (TBM). Los datos geométricos y mecánicos y las condiciones de borde consideradas son idénticos a los del ejemplo de validación. Se utilizan dos esbelteces $l/d_2 = 10$ y $l/d_2 = 20$. Además, el parámetro μ se varía entre 0 a 0,3. Los resultados se presentan en Tablas 3 y 6.

Frecuencias [Hz]						
	1 modo coaxial			1 modo no coaxial		
	EBM	TBM	Diferencia	EBM	TBM	Diferencia
$\mu = 0$	7,45E+10	7,30E+10	2,01%	1,22E+12	1,21E+12	1,39%
$\mu = 0,1$	7,14E+10	7,00E+10	1,96%	1,23E+12	1,21E+12	1,39%
$\mu = 0,2$	6,39E+10	6,28E+10	1,72%	1,24E+12	1,22E+12	1,39%
$\mu = 0,3$	5,54E+10	5,45E+10	1,66%	1,25E+12	1,23E+12	1,39%

Tabla 3: CNT Simplemente apoyado $l/d_2=10$.

Frecuencias [Hz]						
	1 modo coaxial			1 modo no coaxial		
	EBM	TBM	Diferencia	EBM	TBM	Diferencia
$\mu = 0$	1,16E+11	1,14E+11	2,32%	1,22E+12	1,20E+12	1,66%
$\mu = 0,1$	1,11E+11	1,08E+11	2,35%	1,23E+12	1,21E+12	1,67%
$\mu = 0,2$	9,76E+10	9,52E+10	2,46%	1,24E+12	1,22E+12	1,93%
$\mu = 0,3$	8,33E+10	8,12E+10	2,52%	1,25E+12	1,22E+12	2,11%

Tabla 4: CNT Empotrado apoyado $l/d_2=20$.

En Tablas 3 y 4, se observa que las frecuencias coaxiales disminuyen al considerar las deformaciones por corte aproximadamente en 2% para las dos condiciones de borde consideradas. Las frecuencias no coaxiales también disminuyen pero el valor se mantiene invariable con las condiciones de borde.

Con respecto al parámetro no local, las frecuencias coaxiales disminuyen con el aumento del parámetro. En el caso simplemente apoyado disminuyen en un 25% mientras que para los CNT empotrados – apoyados disminuyen en un 28%. Sin embargo, las frecuencias no coaxiales aumentan cuando el parámetro no local aumenta. En ambas condiciones de borde aumentan en un 2%.

Frecuencias [Hz]						
	1 modo coaxial			1 modo no coaxial		
	EBM	TBM	Diferencia	EBM	TBM	Diferencia
$\mu = 0$	1,86E+10	1,85E+10	0,54%	1,22E+12	1,22E+12	0,35%
$\mu = 0,1$	1,79E+10	1,78E+10	0,56%	1,23E+12	1,22E+12	0,42%
$\mu = 0,2$	1,60E+10	1,59E+10	0,63%	1,24E+12	1,23E+12	0,36%
$\mu = 0,3$	1,39E+10	1,38E+10	0,72%	1,25E+12	1,24E+12	0,35%

Tabla 5: CNT Simplemente apoyado $l/d_2=20$.

Frecuencias [Hz]						
	1 modo coaxial			1 modo no coaxial		
	EBM	TBM	Diferencia	EBM	TBM	Diferencia
$\mu = 0$	2,90E+10	2,89E+10	0,34%	1,22E+12	1,22E+12	0,22%
$\mu = 0,1$	2,77E+10	2,75E+10	0,72%	1,23E+12	1,22E+12	0,60%
$\mu = 0,2$	2,44E+10	2,43E+10	0,41%	1,24E+12	1,23E+12	0,48%
$\mu = 0,3$	2,08E+10	2,07E+10	0,48%	1,25E+12	1,24E+12	0,64%

Tabla 6: CNT Empotrado apoyado $l/d_2=20$.

En el caso de los nanotubos de esbeltez igual a 20 (Tablas 5 y 6), la influencia de las deformaciones por corte es inferior respecto a los casos anteriores tanto para las frecuencias coaxiales como no coaxiales. Las frecuencias no coaxiales no varían con la esbeltez de los nanotubos.

Con respecto al parámetro no local, se observa nuevamente una disminución en las frecuencias coaxiales y un aumento en las frecuencias no coaxiales con el aumento del parámetro no local para las dos condiciones de borde consideradas. Los valores se mantienen idénticos a los de las vigas de esbeltez igual a 10.

5 CONCLUSIONES

Se presenta una teoría de viga de orden superior no local para nanotubos de doble capa incluyendo aquellos que podrían tener deformaciones iniciales. El modelo es aplicable a condiciones de borde arbitrarias. Se desarrolla un elemento viga y se resuelven diversos ejemplos numéricos a través del método de elementos finitos.

Se observa que la influencia de las deformaciones por corte disminuye con la esbeltez de los nanotubos considerados tanto en frecuencias coaxiales como no coaxiales. El parámetro no local afecta considerablemente el valor de las frecuencias coaxiales disminuyendo su valor y su efecto no puede ser despreciado. Esta disminución en las frecuencias no varía con la esbeltez considerada. Las frecuencias no coaxiales aumentan levemente con el aumento del

parámetro no local. Finalmente se concluye que para hacer uso de las ventajas de un modelo no local, el parámetro debe ser correctamente calibrado.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo financiero de la Universidad Nacional de Cuyo y CONICET.

REFERENCIAS

- Adali S. Variational Principles for Transversely Vibrating Multiwalled Carbon Nanotubes Based on Nonlocal Euler-Bernoulli Beam Model. *Nano Letters*, 9(5): 1737–1741, 2009.
- Ambrosini D and de Borbón F. On the influence of the shear deformation and boundary conditions on the transverse vibration of multi-walled carbon nanotubes. *Computational Materials and Science*, 53: 214 – 218, 2012.
- Ambrosini D, Riera JD and Danesi RF. A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams. *Engineer Structure*, 22: 890 – 900, 2000.
- Ansari R, Sadeghi F and Ajori S. Continuum and molecular dynamics study of C₆₀ fullerene – carbon nanotube oscillators. *Mechanic Research Communications*, 47: 18 – 23, 2013.
- Ansari R, Rouhi H and Sahmani S. Calibration of the analytical nonlocal shell model for vibrations of double-walled carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions using molecular dynamics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53:786 – 792, 2011.
- Ansari R and Sahmani S. Small scale effect on vibrational response of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions based on nonlocal beam models. *Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 17: 1965 – 1979, 2012.
- Arash B and Wang Q. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Computational Materials and Science*, 51: 303 – 313, 2012.
- Asghari M, Kahrobaiyan MH and Ahmadian MT. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*, 48: 1749 – 1761, 2010.
- Becker EB, Carey GF and Oden JT. *Finite Elements: An Introduction*, vol 1. Prentice Hall, New Jersey, 1981.
- Clough R and Penzien J. *Dynamics of Structures*. Singapore: McGraw- Hill, 1975.
- De Borbón F and Ambrosini D. On the influence of van der Waals coefficient on the transverse vibration of double walled carbon nanotubes. *Computational Materials and Science*, 65: 504 – 508, 2012.
- Duan WH, Wang CM and Zhang YY. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics. *Journal of Applied Physics*, 101: 024305, 2007.
- Ehteshami H and Hajabasi M. Analytical approaches for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes modeled as multiple nonlocal Euler beams. *Physica E*, 44:270 – 285, 2011.
- Eltaher MA, Alshorbagy AE and Mahmoud FF. Vibration analysis of Euler – Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37:4787 – 4797, 2013.
- Eringen AC. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer, 2002.
- Harik VM. Mechanics of carbon nanotubes: applicability of the continuum-beam models. *Computational Materials and Science*, 24:328–342, 2002.
- Hu YG, Liew KM and Wang Q. Modeling of vibrations of carbon nanotubes. *Procedia Engineering*, 31: 343 – 347, 2012.
- Li C and Chou C. Elastic moduli of multi-walled carbon nanotubes and the effect of van der

- Waals forces. *Composites Science and Technologies*, 63: 1517 – 1524, 2003.
- Li C, Thostenson ET and Tsu-Wei Chou TW. Sensors and actuators based on carbon nanotubes and their composites: A review. *Composites Science and Technology*, 68 (6):1227-1249, 2008.
- Mitra M, Gopalakrishnan S. Wave propagation in multi-walled carbon nanotube. *Computational Materials and Science*, 45: 411 – 418, 2009.
- Nakabayashi D, Moreau ALD, Coluci VR, Galvão DS, Cotta MA and Ugarte D. Carbon Nanotubes as Reinforcement Elements of Composite Nanotools. *Nano Letters*, 8(3): 842–847, 2008.
- Peddieon J, Buchanan G and McNitt RP. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41: 305 – 312, 2003.
- Ru C. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes with interlayer radial displacements. *Physical Review B*, 62 (24): 16962–16967, 2000.
- Saito R, Matsuo R, Kimura T, Dresselhaus G, Dresselhaus M. Anomalous potential barrier of double-wall carbon nanotube. *Chemical Phys. Letters*, 348(3-4): 187 – 193, 2001.
- Shakouri A, Lin RM and Ng TY. Free flexural vibration studies of double walled carbon nanotubes with different boundary conditions and modeled as nonlocal Euler beams via the Galerkin method. *Journal of Applied Physics*, 106: 094307, 2009.
- Shen ZB, Li XF , Sheng LP and Tang GJ. Transverse vibration of nanotube-based micro sensor via nonlocal Timoshenko beam theory. *Computational Materials and Science*, 53: 340 – 346, 2012.
- Sudak LJ. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 94: 7281, 2003.
- Wang Q. Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 98: 124301, 2005.
- Yang Y, Zhang L and Lim CW. Wave propagation in double-walled carbon nanotubes on a novel analytically nonlocal Timoshenko-beam model. *Journal of Sound and Vibration*, 330: 1704 – 1717, 2011.
- Yoon J, Ru CQ and Mioduchowski A. Terahertz vibration of short carbon nanotubes modeled as Timoshenko-beams. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 71: 1–8, 2004.
- Zienkiewicz O, Taylor R. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 4ta ed. 1994.