

## ANÁLISIS DE REDUCCIÓN DE VIBRACIONES EN TORRES MEDIANTE UN SISTEMA DE CONTROL ACTIVO

**Gonzalo Alvarez<sup>a</sup>, Anibal Mirasso<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad Universitaria, 5500  
Mendoza, Argentina, galvarez@fing.uncu.edu.ar.*

<sup>b</sup>*IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad Universitaria, 5500  
Mendoza, Argentina, aemirasso@uncu.edu.ar*

**Palabras claves:** Vibraciones, control activo, amortiguador de masa sintonizado, análisis en espacio de estado.

**Resumen.** Es frecuente el empleo de sistemas estructurales tipo torre como base para equipos con propósitos determinados, los cuales pueden alterar su funcionamiento ante vibraciones inducidas por acciones externas. Como consecuencia de dichas vibraciones se incrementa el daño por fatiga en el sistema estructural. Tal es el caso de torres de generadores eólicos, en las que las acciones del viento inducen vibraciones inherentes al funcionamiento del equipo. A los efectos de disminuir el daño por fatiga y mejorar las condiciones de funcionamiento, es posible considerar la inclusión de un sistema de control activo que produzca una importante reducción de las vibraciones mencionadas. En este trabajo se presenta el diseño y análisis de un sistema de control activo, en conjunto con un amortiguador de masa sintonizado para una estructura tipo torre. Se definen los parámetros de control asignando polos en el espacio de estado de un modelo reducido. Dicho modelo se obtiene a partir del funcional de Hamilton y el empleo de modos asumidos. Los parámetros así definidos se utilizan en un modelo de elementos finitos del sistema estructural. Los resultados obtenidos se comparan con resultados disponibles en la literatura. Se discute la relación entre la asignación de polos en el espacio de estado, con la magnitud de las fuerzas desarrolladas en el sistema de control, el amortiguamiento logrado y los tiempos necesarios para amortiguar las vibraciones del sistema estructural.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas estructurales tipo torre son la tipología usual de edificios de gran altura; y además, frecuentemente utilizados como base para equipos con propósitos determinados. En ambos usos es deseable limitar sus vibraciones inducidas por acciones externas, a los efectos de asegurar la calidad de las prestaciones del servicio para el cual son construidas, o su integridad estructural, evitando fallas por deformaciones excesivas o por fatiga. Tal es el caso de las torres de generadores eólicos, en las que las acciones del viento inducen vibraciones inherentes al funcionamiento del equipo. A los efectos disminuir el daño por fatiga, y mejorar las condiciones de funcionamiento, la reducción de vibraciones puede considerarse mediante la inclusión de un sistema de control activo, en conjunto con un amortiguador de masa sintonizado. Según Soong y Constantinou (1994) este sistema se lo denomina masa activa sintonizada y constituye un sistema híbrido de control, ya que combina las propiedades de un sistema pasivo (amortiguador de masa sintonizado) y de un sistema activo de control.

La disminución de vibraciones es un tema de interés permanente y constante evolución, como queda en evidencia cuando se piensa en las primeras simples ideas de Ordmondroyd y Den Hartog (1928) de incluir amortiguadores de masa sintonizada, hasta los más modernos sistemas en edificios de gran altura como el conocido Taipei 101 inaugurado en 2004 (<http://www.taipei-101.com.tw/en/DB/damper.asp>).

Una detallada discusión del estado del arte sobre sistemas de control en estructuras, tanto civiles y mecánicas como aeroespaciales, ha sido recientemente presentado por Korkmaz, S. (2011). Se destaca allí que la primera propuesta de combinar un amortiguador de masa sintonizada con un sistema de control se debe a Chang y Soong (1980). Según Song (1990) las ideas de actuar sobre las estructuras de edificios, se remonta a las presentadas por Eugene Freyssenet en 1960 y Lev Zetlin en 1965, quienes proponen actuar con cables pretensados y cables tensados con “tensores” hidráulicos respectivamente. Song (1990) reconoce en el trabajo de Yao (1972) el primer tratamiento riguroso de control de estructuras siguiendo los lineamientos de la teoría de control moderno.

Soong y Constantinou (1994) sostienen que el primer edificio en el que se instala un sistema de control actuando sobre una masa agregada es el Kyobashi Seiwa en 1989 (Kobori et al, 1990). Se logra actuar con una fuerza sobre la estructura para disminuir las acciones dinámicas debidas a vientos y sismos. Existen trabajos posteriores donde se presentan mediciones del comportamiento de dicho sistema. También sostienen que Aizawa et al. (1990) colocaron e instrumentaron un dispositivo similar en un edificio de seis pisos. Citan que es debido a Matsumoto et al (1990) la colocación de un sistema de control actuando sobre un péndulo sintonizado en un edificio de 296 metros de altura y en la torre de el puente Akashi Kaiko de 300 metros de altura, con el propósito de mejorar la eficiencia de energía necesaria en el sistema de control. Otros sistemas presentados en la literatura son entre otros: el sistema híbrido de múltiples péndulos del Yokohama Landmark Tower (Abiru et al, 1992); y el sistema híbrido de arco oscilante de Tokyo Park Tower (Koike et al, 1998).

En Argentina uno de los primeros trabajos en llamar la atención sobre la aplicación de los amortiguadores de masa sintonizados en estructuras civiles bajo la acción del viento es debido a Montanaro et al. (1999), en el que discuten la eficiencia de sistemas masa resorte y tanques con líquidos sintonizados al primer modo de estructuras de tipo torre. Posteriormente, Bassotti y Ambrosini (2004, 2007) y Ambrosini et al. (2004), han analizado la posibilidad de utilizar sistemas de tipo masa resorte sintonizados con los modos fundamentales de estructuras de edificios típicamente usados en la provincia de Mendoza, bajo la acción de diversos sismos. Ascheri et al. (2010, 2007, 2006) han presentado una alternativa para el análisis y diseño

óptimo de dispositivos pasivos de disipación de energía, para ser usados en estructuras de pórticos y tabiques bajo acción sísmica. Consiste en usar un algoritmo de control activo predictivo de estructuras, para definir las fuerzas adecuadas para controlar la estructura en análisis ante acciones sísmicas diversas. Posteriormente con esas fuerzas se optimiza el diseño de los dispositivos pasivos. Se ha usado un algoritmo de control en el espacio de estado en tiempo discreto, que minimiza una función lineal cuadrática adecuadamente definida.

Recientemente, Garrido et al. (2012) han analizado la eficiencia de un sistema semiactivo de control en un sistema masa resorte, en el que el amortiguamiento cambia según una ley de control óptimo recortado. Curadelli y Amani (2012) han analizado distintos algoritmos de control óptimo para definir los parámetros de sistemas semi activos de control, utilizados en una estructura plana de tipo pórtico de seis niveles, sometida a diversos sismos.

En sistemas estructurales que son modelados con el método de elementos finitos usando múltiple grados de libertad, es conveniente recurrir a un sistema reducido de unos pocos grados de libertad, que sea representativo del sistema estructural completo, para definir los parámetros del sistema de control. Para reducir los grados de libertad de un sistema discretizado por elementos finitos, a los efectos de realizar un análisis dinámico, es frecuente la utilización de modos naturales de vibración (Meirovitch, 1980). Ese mismo enfoque suele utilizarse para obtener un modelo reducido para definir los parámetros del sistema de control. Gawronski (2004) ha propuesto criterios para truncar la cantidad de modos a incluir. Seto y Mitsuta (1992) han propuesto un método que, según la posición de nodos de modos superiores, selecciona puntos de la estructura donde ubica masas concentradas, que vincula entre sí con resortes elásticos para generar un sistema reducido dinámicamente equivalente a partir de los modos y con análisis de sensibilidad.

En la última década la generación eólica de energía ha tenido un notable desarrollo a partir de la necesidad de lograr alternativas de generación cada vez menos contaminantes del medio ambiente. Los aerogeneradores se ubican en sitios elevados de la superficie mediante torres. El sistema estructural resultante tiene características dinámicas particulares como consecuencia de las dimensiones geométricas, las masas propias y de las interacciones que resultan entre el sistema estructural con el suelo de fundación y con la acción del viento. Es muy frecuente que el sistema estructural tenga modos de vibración libre con frecuencias inferiores a las velocidades de giro durante la generación, debiendo evitarse las amplificaciones de vibraciones causadas por diversas razones. En los últimos años se han realizado numerosas contribuciones en la bibliografía, entre otras pueden citarse las siguientes. Matthew A. Lackner, Mario A. Rotea, (2011) han propuesto el empleo de amortiguadores de masa sintonizados y sistemas de control activos para disminuir las vibraciones de aerogeneradores ubicados en el mar. Gordon M. Stewart, Matthew A. Lackner (2011) han alertado sobre la sensibilidad que introducen en el sistema de control de los aerogeneradores, la dinámica propia de los actuadores que materializan las acciones de control del sistema. M. Harte, B. Basu, S.R.K. Nielsen (2012) han analizado la interacción dinámica entre el suelo de fundación y el sistema estructural de los aerogeneradores. A. Staino, B. Basu, S.R.K. Nielsen (2012) y A. Staino, B. Basu (2013) ha presentado alternativas para el control de vibraciones en aerogeneradores con velocidades de giro variables, y bajo amortiguamiento aerodinámico, mediante un sistema de tensores activos en el interior de las palas, definido con un modelo reducido.

A continuación se presenta el diseño y análisis de un sistema de control activo, en conjunto con un amortiguador de masa sintonizado. Se define los parámetros del sistema de control asignando polos en el espacio de estado de un modelo reducido. Dicho modelo se obtiene a partir del funcional de Hamilton y el empleo de modos asumidos. Los parámetros así

definidos se utilizan en un modelo de elementos finitos del sistema estructural. Se discute la relación entre la asignación de polos en el espacio de estado, con la magnitud de las fuerzas desarrolladas en sistema de control, el amortiguamiento logrado y los tiempos necesarios para amortiguar las vibraciones del sistema estructural.

## 2 FORMULACIÓN UTILIZADA

Se consideran sistemas estructurales tipo torres en los cuales la aproximación de teoría de vigas es muy adecuada para analizar su respuesta ante diversas acciones que dependen del tiempo. En la Figura 1 se puede observar un esquema del tipo estructural considerado y la nomenclatura utilizada.

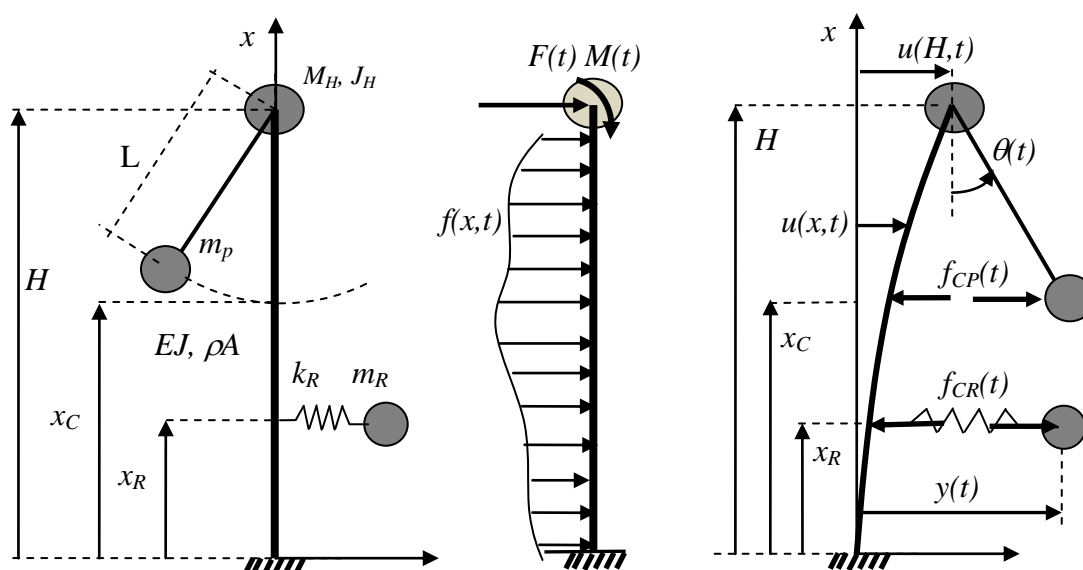


Figure 1: Esquema del tipo estructural considerado

Se consideran torres cuya sección transversal tiene doble eje de simetría, y de dimensiones mucho menores que la altura de la torre. Así resulta posible asumir la validez de las hipótesis de la teoría de vigas de Navier Bernoulli, también denominada teoría de Bernoulli Euler (Balachandran y Magreb, 2006); despreciando además los efectos de inercia rotacional. Cualquier punto material se identifica mediante la abscisa  $x$ , medida desde la base de la torre hacia el extremo libre superior, ubicado en  $x=H$ . Con  $\rho A(x)$  se identifica la inercia de traslación de la sección transversal ubicada en la abscisa  $x$ ; y con  $J(x)$ , el momento de inercia. En el extremo libre superior se considera una masa agregada a la torre, con inercia de traslación  $M_H$ , y de rotación  $J_H$ . El material se asume elástico lineal siguiendo la ley de Hooke, con modulo de elasticidad  $E$ . A la torre se le considera agregados dos amortiguadores de masa, uno tipo péndulo de masa  $m_P$  y otro tipo masa resorte con masa  $m_R$  y constante elástica  $k_R$ . El primero ubicado en el extremo libre de la torre y el segundo en la abscisa  $x_R$ .

Las acciones externas sobre el sistema estructural son las fuerzas distribuidas  $f(x,t)$  a lo largo de la torre, las acciones concentradas en el extremo superior de la torre que se identifican con  $F(t)$  y  $M(t)$ , fuerza concentrada y momento respectivamente. Las fuerzas del sistema de control  $f_{CP}(t)$  y  $f_{CR}(t)$  se aplican respectivamente en las abscisa  $x_C$  y  $x_R$  sobre la torre, y sobre las masas del péndulo y del sistema masa-resorte.

Las respuesta del sistema se analiza mediante los desplazamientos  $u(x,t)$  de los centros de gravedad de la sección transversal de la torre, mediante el giro  $\theta(t)$  del péndulo respecto de la

vertical, y mediante el desplazamiento  $y(t)$  de la masa  $m_R$ .

## 2.1 Funcional de Hamilton

Las ecuaciones de equilibrio pueden obtenerse a partir de exigir que el funcional de Hamilton sea estacionario entre dos instantes de tiempo cualesquiera (Balachandran y Magreb, 2006). Mediante este planteo es simple incorporar los amortiguadores de masa (AM) ya sea sintonizados o no, y distinguir sus contribuciones en las ecuaciones de equilibrio. Si se considera un péndulo en el extremo libre de la torre, y un sistema masa resorte en algún punto de la torre ubicado en la abscisa  $x_R$ , el funcional de Hamilton se puede expresar como:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} [L_T(u(x,t)) + L_{AM}(u(H,t), \theta(t))] dt \quad (1)$$

Con  $L_T$  y  $L_{AM}$  los Lagrangeanos asociados a la torre y al amortiguador de masa respectivamente. El Lagrangeano asociado a la torre está dado por la diferencia entre su energía cinética  $T_T$  y su energía potencial total  $\pi_T$ , en la forma:

$$L_T = (T_T - \pi_T) \quad (2)$$

Siendo la energía potencial total de la torre:

$$\pi_T = \int_0^H \left\{ \frac{EJ}{2} \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 - f(x,t) \cdot u(x,t) \right\} dx - F(t) \cdot u(H,t) - M(t) \cdot \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]_{x=H} + f_{CP}(t) \cdot u(x_C,t) + f_{CR}(t) \cdot u(x_R,t) \quad (3)$$

En tanto que la energía cinética está dada por:

$$T_T = \int_0^H \frac{\rho A}{2} \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} M_H \cdot \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]_{x=H}^2 + \frac{1}{2} J_H \cdot \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right]_{x=H}^2 \quad (4)$$

Es oportuno destacar que el Lagrangeano asociado a la torre sólo depende de los desplazamientos de la torre de  $u(x,t)$  y de sus derivadas. No depende de los parámetros de respuesta de los amortiguadores de masa, pero sí tiene incluida las fuerzas del sistema de control  $f_{CP}(t)$  y  $f_{CR}(t)$ , aplicadas en las abscisas  $x_C$  y  $x_R$  respectivamente.

El Lagrangeano asociado al amortiguador de masa se puede expresar como la diferencia entre su energía cinética y su energía potencial total en la forma:

$$L_{AM} = (T_P - \pi_P) + (T_{MR} - \pi_{MR}) \quad (5)$$

Siendo las energías potenciales totales del péndulo  $\pi_P$ , y de la masa resorte  $\pi_{MR}$

$$\begin{aligned} \pi_P &= m_p \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos(\theta(t))) - f_{CP}(t) \cdot [u(H,t) + L \text{seno}(\theta(t))] \\ \pi_{MR} &= \frac{1}{2} k_R \cdot (y(t) - u(x_R,t))^2 - f_{CR}(t) \cdot y(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Por otra parte, las energías cinéticas del péndulo  $T_P$ , y de la masa resorte  $T_{MR}$  están dadas por

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \langle \vec{v}_p(t), \vec{v}_p(t) \rangle$$

$$T_{MR} = \frac{1}{2} m_R \left( \frac{dy(t)}{dt} \right)^2$$
(7)

donde  $\langle \vec{v}_p(t), \vec{v}_p(t) \rangle$  es el producto escalar del vector velocidad, que es la derivada respecto al tiempo del vector posición de la masa del péndulo, y se puede expresar como:

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} H - L \cos(\theta(t)) \\ u(H,t) + L \operatorname{seno}(\theta(t)) \end{array} \right\}$$
(8)

Cabe señalar que el Lagrangeano asociado al péndulo  $L_p = T_p - \pi_p$  depende tanto de la posiciones del péndulo  $\theta(t)$  y del extremo libre de la torre  $u(H,t)$ , como también de sus velocidades. En forma similar, el Lagrangeano asociado a la masa resorte  $L_{MR} = T_{MR} - \pi_{MR}$  depende de la posiciones de la masa  $y(t)$ , del desplazamiento de la posición de vínculo con la torre  $u(x_R,t)$ , y de sus velocidades.

## 2.2 Discretización del funcional de Hamilton

El Lagrangeano asociado a la torre depende de  $u(x,t)$  y el Lagrangeano asociado al péndulo sólo depende de dos grados de libertad que son  $\theta(t)$  y  $u(H,t)$ . A los efectos de resolver el problema en forma aproximada mediante un número finito de grados de libertad se usa el método de modos asumidos (Meirovitch, 1980), que es la versión del método de Rayleigh Ritz en el contexto de problemas dinámicos (Meirovitch, 1980). Se plantea entonces que los desplazamientos de la torre se pueden expresar como una combinación lineal de funciones base multiplicados por coeficientes que dependen del tiempo, en la forma

$$u(x,t) = \phi_i(x) \cdot q_i(t)$$
(9)

donde el índice repetido indica suma desde 1 hasta N; siendo N el número total de funciones base o modos asumidos. Esta nomenclatura se asume válida en lo que sigue, salvo que se aclare lo contrario.

Las funciones base asumidas  $\phi_i(x)$  deben satisfacer las condiciones esenciales del problema, también denominadas condiciones cinemáticas. Resulta así posible considerar como funciones base a los modos de vibración libre de la torre, empotrada en la base y con una masa en el extremo libre, sin amortiguador de masa ni sistema de control; ya sea que éstos se calculen mediante un modelo de elementos finitos o mediante soluciones analíticas, como la presentada por Balachandran y Magreb (2006), para el caso de una torre con una masa en su extremo libre.

Al considerar la combinación lineal propuesta (9) en las expresiones de energía cinética (4) y potencial (3) de la torre se tiene:

$$\pi_{TO}(q_i(t), q_j(t)) = \frac{1}{2} K_{ij}^{TO} \cdot q_i(t) \cdot q_j(t) - b_i^{TO}(t) \cdot q_i(t) + b_i^C(t) \cdot q_i(t)$$
(10)

con la denominada matriz de rigidez dada por:

$$K_{ij}^{TO} = \int_0^H \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \cdot EJ \cdot \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx$$
(11)

El vector de acciones equivalentes a las fuerzas externas del sistema es:

$$b_i^{TO}(t) = \int_0^H \phi_i(x) \cdot f(x,t) \cdot dx + \phi_i(H) \cdot F(t) + M(t) \cdot \left[ \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \right]_{x=H} \quad (12)$$

Y el vector de acciones equivalentes del sistema de control se define en la forma:

$$b_i^C(t) = \phi_i(x_C) \cdot f_{CP}(t) + \phi_i(x_R) \cdot f_{CR}(t) \quad (13)$$

Mientras que la energía cinética de la torre (4) resulta:

$$T_{TO}(\dot{q}_i(t), \dot{q}_j(t)) = \frac{1}{2} M_{ij}^T \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) \quad (14)$$

donde  $\dot{\xi} \equiv d\xi(t)/dt$  indica derivada primera respecto del tiempo de la función  $\xi(t)$  a la que se aplique; y con la denominada matriz de masa dada por:

$$M_{ij}^{TO} = \int_0^H \phi_i(x) \cdot \rho A \cdot \phi_j(x) dx + \phi_i(H) \cdot M_H \cdot \phi_j(H) + \frac{d\phi_i(H)}{dx} \cdot J_H \cdot \frac{d\phi_j(H)}{dx} \quad (15)$$

Se debe destacar que las ecuaciones (10-15) son las mismas que se obtienen para un sistema estructural tipo torre, independientemente del amortiguador de masa y del sistema de control. Al considerar la combinación lineal propuesta por la ecuación (9) en la energía potencial total del amortiguador de masa dado por las ecuaciones (6) resulta:

$$\begin{aligned} \pi_p(q_i(t), \theta(t)) &= m_p \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos(\theta(t))) - f_{CP}(t) \cdot [\phi_i(H) \cdot q_i(t) + L \text{seno}(\theta(t))] \\ \pi_{MR}(q_i(t), y(t)) &= \frac{1}{2} k_R \cdot (y(t) - \phi_i(x_R) \cdot q_i(t))^2 - f_{CR}(t) \cdot y(t) \end{aligned} \quad (16)$$

De la misma forma la energía cinética dada por las ecuaciones (7) queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_p(\dot{q}_i(t), \dot{q}_j(t), \dot{\theta}(t)) &= \frac{1}{2} \cdot \phi_i(H) \cdot m_p \cdot \phi_j(H) \cdot \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) + \\ &+ \frac{1}{2} m_p \cdot L^2 \cdot \dot{\theta}(t)^2 + m_p \cdot L \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \phi_i(H) \cdot \dot{q}_i(t) \\ T_{MR}(\dot{q}_i(t), \dot{q}_j(t), \dot{y}(t)) &= \frac{1}{2} m_R (\dot{y}(t))^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Se tiene así que el funcional de Hamilton expresado por la ecuación (1) depende de un número finito de funciones de la variable independiente t, y al considerar las ecuaciones (10-17) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} H(q_i, \dot{q}_i, \theta, \dot{\theta}, y, \dot{y}) &= \int_{t_1}^{t_2} [T_{TO}(\dot{q}_i) - \pi_{TO}(q_i)] dt + \int_{t_1}^{t_2} [T_p(\dot{q}_i, \theta, \dot{\theta}) - \pi_p(q_i, \theta)] dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [T_{MR}(\dot{y}) - \pi_{MR}(q_i, y)] dt \end{aligned} \quad (18)$$

Se debe destacar que el primer sumando de la ecuación (18) corresponde al funcional de

Hamilton de la torre como si no estuviese ningún amortiguador de masa. El segundo sumando corresponde al péndulo y tiene los términos de acoplamiento con la torre; mientras que el tercero corresponde a la masa resorte, y también tiene los términos de acoplamientos con la torre. No hay acoplamiento entre el péndulo y la masa resorte entre sí.

### 2.3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de la condición de estacionario del funcional de Hamilton dado por la ecuación (18), que al depender de un número finito de funciones del tiempo  $q_i(t)$  con  $i$  desde 1 hasta  $N$ , de  $\theta(t)$  y de  $y(t)$ , se reducen a las conocidas Ecuaciones de Lagrange (Balachandran y Magreb, 2006). Así las ecuaciones de movimiento que resultan de considerar arbitrarias a las variaciones de  $q_i(t)$  son:

$$0 = -\left\{K_{ij}^{TO} \cdot q_j(t) - b_i^{TO}(t) + b_i^C(t) - f_{CP}(t) \cdot \phi_i(H)\right\} - \left\{M_{ij}^{TO} + m_p \cdot \phi_i(H) \cdot \phi_j(H)\right\} \cdot \ddot{q}_j(t) \\ - \left\{m_p \cdot L \cdot \phi_i(H) \cdot \left[\ddot{\theta}(t) \cdot \cos(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)^2 \operatorname{seno}(\theta(t))\right]\right\} \\ + k_R \cdot \phi_i(x_R) \cdot y(t) - \phi_i(x_R) \cdot k_R \cdot \phi_j(x_R) \cdot q_j(t) \quad (19)$$

al considerar arbitrarias a las variaciones de  $\theta(t)$  y de  $y(t)$  resultan respectivamente

$$0 = -m_p \cdot g \cdot L \cdot \operatorname{sen}(\theta(t)) + f_{CP}(t) \cdot L \cdot \cos(\theta(t)) - m_p \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) \\ - m_p \cdot L \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \phi_i(H) \cdot \ddot{q}_i(t) \quad (20) \\ 0 = -k_R \cdot y(t) + k_R \cdot \phi_i(x_R) \cdot q_i(t) + 1 \cdot f_{CR}(t) - m_R \cdot \ddot{y}(t)$$

En las ecuaciones (19-20) hay varios términos no lineales en  $\theta(t)$  y sus derivadas, pero al considerar los desarrollos en serie de potencias de dichos términos alrededor de  $\theta(t)$  igual a cero y al retener sólo los términos lineales es posible obtener las siguientes ecuaciones de movimiento en su versión lineal

$$0 = -\left\{K_{ij}^{TO} \cdot q_j(t) - b_i^{TO}(t) + b_i^C(t) - f_{CP}(t) \cdot \phi_i(H)\right\} - \left\{M_{ij}^{TO} + m_p \cdot \phi_i(H) \cdot \phi_j(H)\right\} \cdot \ddot{q}_j(t) \\ - \left\{m_p \cdot L \cdot \phi_i(H) \cdot \ddot{\theta}(t)\right\} + k_R \cdot \phi_i(x_R) \cdot y(t) - \phi_i(x_R) \cdot k_R \cdot \phi_j(x_R) \cdot q_j(t) \quad (21) \\ 0 = -m_p \cdot g \cdot L \cdot \theta(t) + f_{CP}(t) \cdot L - m_p \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) - m_p \cdot L \cdot \phi_i(H) \cdot \ddot{q}_i(t) \\ 0 = -k_R \cdot y(t) + k_R \cdot \phi_i(x_R) \cdot q_i(t) + 1 \cdot f_{CR}(t) - m_R \cdot \ddot{y}(t)$$

Si se consideran sólo dos modos o funciones base en la ecuación (9), y se agrupan las funciones incógnitas en el vector de grados de libertad  $x(t)$ , definido como su vector transpuesto en la forma:

$$x(t) = \{q_1(t) \quad q_2(t) \quad \theta(t) \quad y(t)\}^T \quad (22)$$

las ecuaciones de movimiento del modelo reducido resultan:

$$M \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = p^{TO}(t) + p^{CP}(t) \cdot f_{CP}(t) + p^{CR}(t) \cdot f_{CR}(t) \quad (23)$$

siendo la matriz de masa  $M$  y la matriz de rigidez  $K$  del sistema reducido acoplado las siguientes:



$$M = \begin{pmatrix} M_{11}^{TO} + \phi_1(H) \cdot m_p \cdot \phi_1(H) & M_{12}^{TO} + \phi_1(H) \cdot m_p \cdot \phi_2(H) & m_p \cdot L \cdot \phi_1(H) & 0 \\ M_{21}^{TO} + \phi_2(H) \cdot m_p \cdot \phi_1(H) & M_{22}^{TO} + \phi_2(H) \cdot m_p \cdot \phi_2(H) & m_p \cdot L \cdot \phi_2(H) & 0 \\ m_p \cdot L \cdot \phi_1(H) & m_p \cdot L \cdot \phi_2(H) & m_p \cdot L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_R \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$K = \begin{pmatrix} K_{11}^{TO} + \phi_1(x_R) \cdot k_R \cdot \phi_1(x_R) & K_{12}^{TO} + \phi_1(x_R) \cdot k_R \cdot \phi_2(x_R) & 0 & -k_R \cdot \phi_1(x_R) \\ K_{21}^{TO} + \phi_2(x_R) \cdot k_R \cdot \phi_1(x_R) & K_{22}^{TO} + \phi_2(x_R) \cdot k_R \cdot \phi_2(x_R) & 0 & -k_R \cdot \phi_2(x_R) \\ 0 & 0 & m_p \cdot g \cdot L & 0 \\ -k_R \cdot \phi_1(x_R) & -k_R \cdot \phi_2(x_R) & 0 & k_R \end{pmatrix}$$

y los vectores de acciones equivalentes en el sistema reducido

$$p^{TO}(t) = \begin{Bmatrix} b_1^{TO}(t) \\ b_2^{TO}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad p^{CP} = \begin{Bmatrix} \phi_1(H) - \phi_1(x_C) \\ \phi_2(H) - \phi_2(x_C) \\ L \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad p^{CR} = \begin{Bmatrix} -\phi_1(x_R) \\ -\phi_2(x_R) \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Se puede destacar que todos los coeficientes de las ecuaciones de movimiento expresadas por las ecuaciones (23) dependen de las funciones base asumidas  $\phi_i(x)$  que pueden estar expresadas en forma analítica o en forma discreta.

### 3 DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

Para definir el sistema de control se trabaja con el modelo reducido definido anteriormente, cuyas ecuaciones de movimiento están expresadas por las ecuaciones (23), pero en el espacio de estado. Así las ecuaciones de equilibrio en el espacio de estado resultan:

$$\dot{z}(t) = A \cdot z(t) + \Gamma_{CP} \cdot f_{CP}(t) + \Gamma_{CR} \cdot f_{CR}(t) + \Gamma_{TO}(t) \quad (26)$$

con el vector de estado  $z(t)$  definido como su vector transpuesto en la forma:

$$z(t) = \{q_1(t) \quad q_2(t) \quad \theta(t) \quad y(t) \quad \alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \alpha_3(t) \quad \alpha_4(t)\}^T \quad (27)$$

La matriz de coeficientes en el espacio de estado resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 0_4 & I_4 \\ -M^{-1}K & 0_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Siendo  $I_4$  y  $0_4$  las matrices identidad y nula de orden cuatro respectivamente. Los vectores de acciones equivalentes a las acciones de control sobre el péndulo  $\Gamma_{CP}$ , sobre la masa resorte  $\Gamma_{CR}$  y a las acciones externas sobre la torre  $\Gamma_{TO}(t)$  son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{CP} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1^{CP} & \gamma_2^{CP} & \gamma_3^{CP} & \gamma_3^{CP} \end{bmatrix}^T \\ \Gamma_{CR} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1^{CR} & \gamma_2^{CR} & \gamma_3^{CR} & \gamma_3^{CR} \end{bmatrix}^T \\ \Gamma_{TO} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1^{TO} & \gamma_2^{TO} & \gamma_3^{TO} & \gamma_3^{TO} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\gamma^{TO}(t) &= M^{-1} \cdot p^{TO}(t); \\ \gamma^{CP} &= M^{-1} \cdot p^{CP} \\ \gamma^{CR} &= M^{-1} \cdot p^{CR}\end{aligned}\quad (30)$$

Se considera como acción externa una acción impulso en el extremo de la torre. De esta manera el vector equivalente a las acciones externas dado por la ecuación (12) resulta:

$$b_i^{TO}(t) = \phi_i(H) \cdot F_H \cdot \delta(t) \quad (31)$$

siendo  $\delta(t)$  la función Delta de Dirac, y  $F_H$  la magnitud de la fuerza aplicada durante el  $\delta(t)$ . El vector de acciones equivalentes expresado por las ecuaciones (30) resulta:

$$\gamma^{TO}(t) = M^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1(H) \cdot F_H \\ \phi_2(H) \cdot F_H \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \delta(t) \quad (32)$$

Si bien es posible definir en forma independiente las acciones de control asociadas al péndulo  $f_{CP}(t)$  y asociadas a la masa resorte  $f_{CR}(t)$ , se plantea una única acción de control por realimentación de estado (Dorf y Bishop, 2001), Moreno et al.(2003)), por lo que se considera proporcional al vector de estado, en la forma:

$$f_C(t) = -G \cdot z(t) \quad (33)$$

Siendo  $G = \{g1 \ g2 \ g3 \ g4 \ g5 \ g6 \ g7 \ g8\}$  un vector fila de constantes a determinar. Así las ecuaciones en el espacio de estados del sistema con control por realimentación de estado se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_C \cdot z(t) + \Gamma_T(t) \\ A_C &= (A - \Gamma_C \cdot G) \\ \Gamma_C &= \Gamma_{CP} + \Gamma_{CR}\end{aligned}\quad (34)$$

Se pretende que el sistema con control garantice una respuesta amortiguada para las acciones de tipo impulsivas consideradas. Por tratarse de un sistema lineal, y asumiendo que el sistema es completamente controlable, está garantizada la libre ubicación de los polos de la matriz  $A_C$  que representa al sistema con bucle cerrado (Dorf y Bishop, 2001; Soong, 1990). Para que el sistema sea completamente controlable se debe verificar que la matriz de controlabilidad tenga rango completo, es decir que exista su matriz inversa (Dorf y Bishop, 2001; Moreno et al.2003). La matriz de controlabilidad, para el sistema considerado está dada por:

$$M_C = [\Gamma_C \quad A \Gamma_C \quad A^2 \Gamma_C \dots \dots \dots A^Q \Gamma_C.] \quad (35)$$

siendo  $Q$  igual al orden del espacio de estado menos uno.

Resulta entonces posible y conveniente asignar dichos polos en el semi plano negativo del plano  $s$ , y así garantizar una respuesta en el tiempo de tipo oscilatoria amortiguada. La asignación de polos y el método de Ackermann (Dorf y Bishop, 2001) permite obtener las constantes de  $G$ .

Una vez encontrados los valores de las constantes de  $G$  en el modelo reducido, es posible trasladarlas al modelo completo de elementos finitos planteado en variables reales. Para ello

se eligen dos puntos en los cuales se miden los desplazamientos y velocidades. Se eligen en este caso los puntos situados en  $x=H$  y  $x=H/2$ . Es posible asociar  $u(H,t)$  y  $u(H/2,t)$  con las variables modales, en la forma:

$$\begin{cases} u(H,t) \\ u(H/2,t) \end{cases} = B \cdot \begin{cases} q_1(t) \\ q_2(t) \end{cases} \quad (36)$$

$$B = \begin{pmatrix} \phi_1(H) & \phi_2(H) \\ \phi_1(H/2) & \phi_2(H/2) \end{pmatrix}$$

Mientras la matriz B tenga inversa, es posible despejar en la forma

$$\begin{cases} q_1(t) \\ q_2(t) \end{cases} = B^{-1} \begin{cases} u(H,t) \\ u(H/2,t) \end{cases} \quad (37)$$

Así la acción de control dada por ecuación (33) se puede re escribir en la forma:

$$\begin{aligned} f_c(t) = & - \left\{ \begin{bmatrix} g1 & g2 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \begin{cases} u(H,t) \\ u(H/2,t) \end{cases} + g3 \cdot \theta(t) + g4 \cdot y(t) \right\} \\ & - \left\{ \begin{bmatrix} g5 & g6 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \begin{cases} \dot{u}(H,t) \\ \dot{u}(H/2,t) \end{cases} + g7 \cdot \dot{\theta}(t) + g8 \cdot \dot{y}(t) \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

De esta manera habiendo determinado las constantes de  $G$  en un espacio modal reducido, la acción de control  $f_c(t)$  dada por la ecuación (38) puede ser llevada a un modelo de elementos finitos. En dicho modelo se miden los desplazamientos  $u(H,t)$ ,  $u(H/2,t)$  y sus velocidades, en los puntos de la torre en  $x=H$  y  $x=H/2$ , y se aplica la acción de control en la masa del péndulo  $m_p$  y en la masa  $m_R$ . El sistema de control reacciona contra la torre en  $x=x_C$  y en  $x=x_R$ .

Es oportuno señalar que el modelo reducido y el sistema de control presentados anteriormente se reducen a respectivos sistemas de dimensión tres, y seis en espacio de estado, cuando sólo se considera como amortiguador de masa el péndulo; o en su defecto la masa resorte. En ambos casos se deberá eliminar las filas y columnas asociadas al amortiguador de masa que no se incluya en las ecuaciones de movimiento dadas por las ecuaciones (23), (26) y (34). De esa manera habrá sólo seis constantes de  $G$  a determinar y se tendrá la posibilidad de asignar seis polos que aseguren el adecuado amortiguamiento del sistema.

#### 4 APLICACIÓN EN UNA TORRE CON AMORTIGUADOR MASA RESORTE

Como primer caso de estudio se considera un ejemplo que está bien discutido en dos partes en Preumont y Seto (2008), una para obtener el modelo reducido y otra para definir el sistema de control. Se trata de una torre de altura  $H=1500\text{mm}$ , de sección transversal de tipo tubo cuadrado de 50 mm de lado y 2,3 mm de espesor, de material acero y con una masa en el extremo libre  $M_H=2\text{ kg}$ ,  $J_H=0$ , con una excitación de tipo impulso en el extremo libre. En la primera parte definen un sistema reducido mediante un método propuesto en Seto y Mitsuta (1992, 1994), por el cual se eligen puntos materiales a partir de los nodos de modos de vibración, obtenidos con matrices de transferencia, donde se ubican masas concentradas vinculadas con resortes elásticos y se ajustan los coeficientes de masa y rigideces con un método de sensibilidad. En la segunda parte (Seto et al., 1995) se incorpora un amortiguador de masa activo a ese modelo reducido, con una acción de control definida mediante el método LQ (sistema lineal con función objeto cuadrática) de control óptimo. El amortiguador de masa

incorporado consiste en un sistema masa-resorte ubicado en el extremo libre de la torre  $x_R=H$ .

Para aplicar la metodología propuesta en este trabajo, se ha desarrollado un modelo de elementos finitos en ANSYS usando 15 elementos de igual longitud BEAM188 (ANSYS, 2009) a lo largo del eje de la torre entre  $x=0$  y  $x=H$ . Se consideró una masa concentrada de 2Kg en el extremo libre con el elemento Mass21 (ANSYS, 2009). Se obtuvieron los modos de vibración libre de la torre, con la masa en el extremo y sin sistema de control, y se consideraron las componentes de desplazamiento transversal de los dos primeros modos normalizados respecto de la matriz de masa como funciones base  $\phi_i(x)$  en forma discreta. Para los valores de  $x$  característicos, las funciones base discretas se presentan en la Tabla 1.

X	0	H/15	H/5	H/3	8H/15	2H/3	4H/5	14H/15	H
$\phi_1(x)$	0.00	0.004	0.033	0.086	0.201	0.294	0.395	0.501	0.555
$\phi_2(x)$	0.00	-0.033	-0.219	-0.450	-0.632	-0.549	-0.297	0.072	0.276

Table 1: Modos de vibración considerados como funciones base.

Con estas funciones base discretas, las derivadas e integrales que definen los coeficientes de las ecuaciones de movimiento dadas por las ecuaciones (23-25) se realizan numéricamente. Las ecuaciones del modelo reducido sin el amortiguador de masa resultan de dos grados de libertad y son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 9141.27 & 0 \\ 0 & 550148.56 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55.48 \\ 27.6 \end{Bmatrix} \cdot \delta(t) \quad (39)$$

Tal como lo presentado en Preumont y Seto (2008), es posible comparar la respuesta del modelo reducido y la del modelo completo de elementos finitos realizado en ANSYS mediante la respuesta en el dominio de la frecuencia en diferentes puntos de la torre, ante un impulso en el extremo de la misma. En la Figura 2 se puede observar la respuesta del extremo libre de la torre mientras que en la Figura 3 en el punto  $x=H/2$ . Ambas curvas de respuesta en frecuencia fueron obtenidas utilizando intervalos de frecuencia 0.0399 Hz. En la Figura 2 se pueden observar dos picos en la respuesta que corresponden a las dos primeras frecuencias naturales de vibración libre que son:  $f_1=15.21$  Hz y  $f_2=118.04$  Hz. Se puede observar que el modelo reducido tiene una respuesta que se superpone en todo el rango de frecuencia analizado con las del sistema completo de elementos finitos.

En la Figura 3 también se observan dos picos correspondientes a las mismas dos primeras frecuencias naturales de vibración del sistema. Sin embargo, el sistema reducido no presenta amplificación en la tercera frecuencia correspondiente al tercer modo de vibración del modelo completo de elementos finitos, que se manifiesta en la Figura 3 por el tercer pico en  $f_3=349.164$  Hz que presenta la curva del modelo completo.

Esta diferencia es de esperar ya que en el modelo reducido se incluyeron solamente los dos primeros modos de vibración del sistema libre. Se puede decir que las Figuras 2 y 3 aseguran que el modelo reducido y el de elementos finitos son equivalentes en el rango de frecuencias que incluyen los dos primeros modos; al igual que lo presentado en Preumont y Seto (2008).

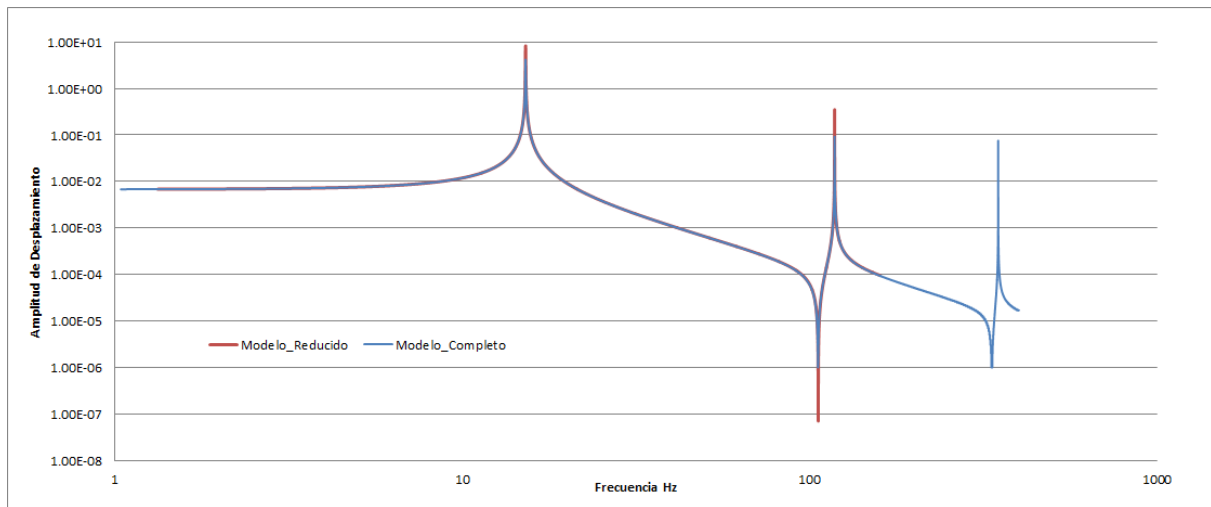


Figure 2: Amplitud de desplazamiento del extremo de la torre

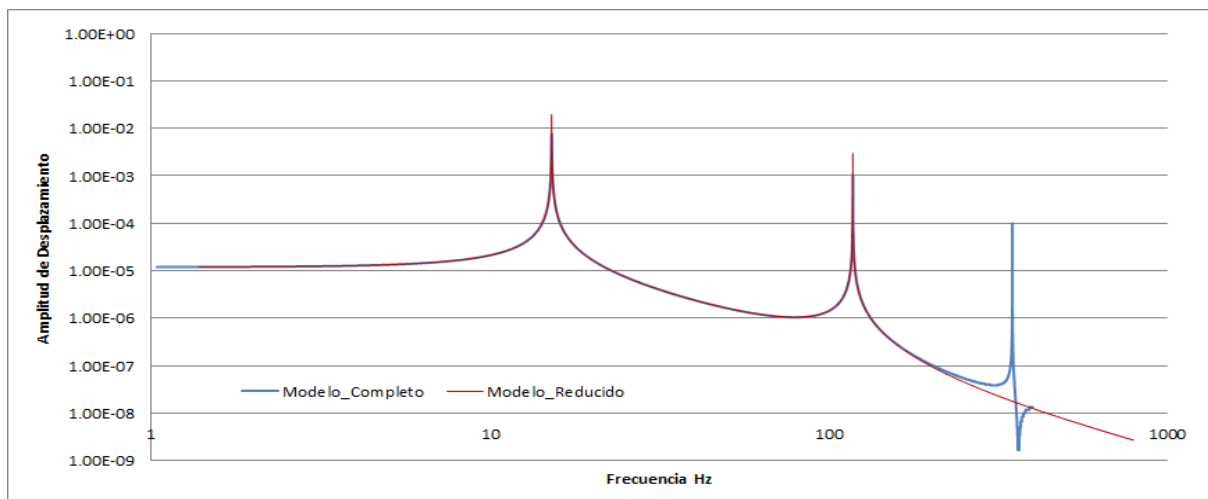


Figure 3: Amplitud de desplazamiento del nodo medio de la torre

Antes de definir el sistema de control, tanto en el modelo reducido como en el modelo completo de elementos finitos, se ha incorporando un sistema masa resorte en el extremo de la torre sintonizado a 15.21 Hz correspondiente con el primer modo de vibración. La masa agregada se eligió como 4% de la masa total del sistema; es decir 0,28 Kg, mientras que la rigidez es 2554 N/m. La masa total del sistema es la suma de la masa de la torre 5,16 Kg más la masa agregada de 2Kg. Las ecuaciones del modelo reducido con el amortiguador de masa resultan:

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(H) \cdot F_H \\ \phi_2(H) \cdot F_H \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \delta(t) + \begin{Bmatrix} p_1^{CR} \\ p_2^{CR} \\ p_3^{CR} \end{Bmatrix} \cdot f_C(t) \quad (40)$$

siendo  $M$  la matriz de masa y  $K$  la matriz de rigidez del sistema reducido acoplado, dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$K = \begin{pmatrix} 9927 & 391 & -1417 \\ 391 & 550340 & -705 \\ -1417 & -705 & 2554 \end{pmatrix}$$

y el vector de acciones equivalentes al sistema de control

$$\begin{pmatrix} p_1^{CR} \\ p_2^{CR} \\ p_3^{CR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5548 \\ -0.2760 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

En la Figura 4 se presenta los desplazamientos en el extremo libre de la torre en función del tiempo, ante un impulso en el extremo libre, tanto para el modelo reducido como para el completo. El modelo reducido de tres grados de libertad fue resuelto utilizando el método de la diferencia central con un  $\Delta t=0.002$  s, mientras que el modelo completo de elementos finitos con el amortiguador de masa sintonizado fue resuelto utilizando el método de integración en el tiempo HHT (Hughes, 1987) que ofrece ANSYS con un  $\Delta t=0.00025$ s. Se puede observar que no hay diferencias significativas entre ambos modelos.

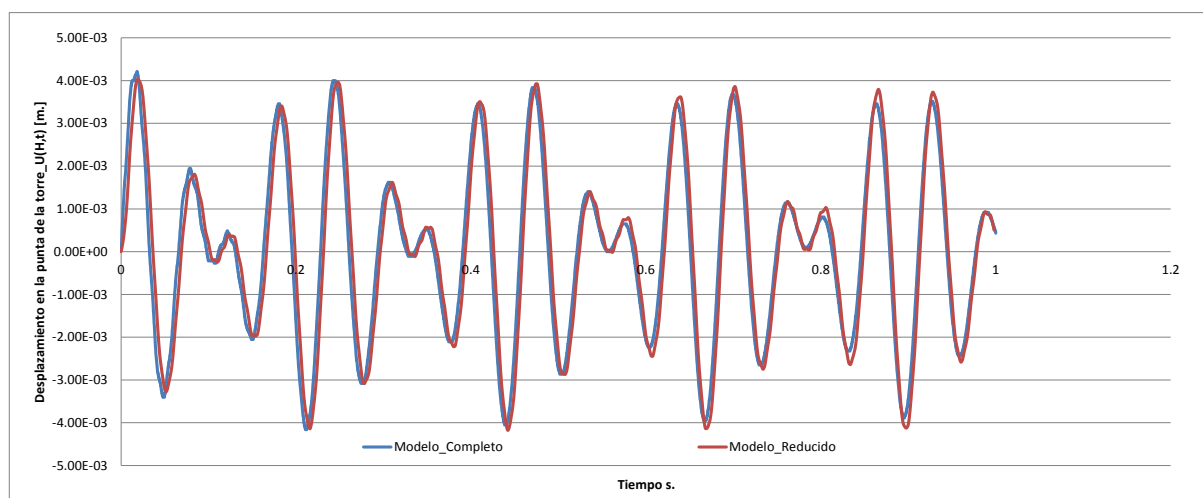


Figure 4: Desplazamiento del extremo de la torre. Modelos con Masa-Resorte Sintonizado

En la Figura 5 se presenta la respuesta en el dominio de la frecuencia del extremo de la torre incluyendo el amortiguador de masa sintonizado, ante un impulso en el mismo punto, obtenidas con un intervalo de frecuencia de 0.0399Hz. Al compararse con la Figura 2 se puede observar que en correspondencia con la frecuencia asociada al primer modo se ha producido un doble pico cuando se incorporó el sistema masa resorte sintonizado. Las nuevas frecuencias de la torre con la masa en la punta y el amortiguador de masa sintonizado son  $f_1=11.13$ Hz,  $f_2=17.6$ Hz y  $f_3=118.07$ Hz. A partir de la excelente concordancia que se observa en los resultados entre el modelo reducido y el modelo completo, se puede asegurar que el modelo reducido es equivalente dinámicamente al modelo completo de elementos finitos en el rango de frecuencias de interés.

Antes de definir el sistema de control es necesario verificar que el sistema sea

completamente controlable para los cual la matriz de controlabilidad por la ecuación (35) debe tener inversa. Para este caso la matriz de controlabilidad resulta

$$M_c = [\Gamma_c \quad A \Gamma_c \quad \dots \quad A^5 \Gamma_c] = 1.0E+5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.5548E-5 & 0 & -0.1067 & 0 & 2176 \\ 0 & 0.2760E-5 & 0 & -1.546 & 0 & 851428 \\ 0 & -3.571E-5 & 0 & 0.3607 & 0 & -7725 \\ 0.5548E-5 & 0 & -0.1067 & 0 & 2176 & 0 \\ 0.2760E-5 & 0 & -1.546 & 0 & 851428 & 0 \\ -3.571E-5 & 0 & 0.3607 & 0 & -7725 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

y su determinante vale 2.2146E+30 que garantiza la existencia de su inversa y así el modelo resulta controlable. Con el modelo reducido definido y verificado que es completamente controlable es posible definir el sistema de control.

A partir de las ecuaciones (26) se puede definir la matriz  $A_c$  del sistema reducido con control dada por la ecuación (34). Para obtener las constante  $G$ , se considera una posición de polos en el plano  $s$  tal que el amortiguamiento buscado sea del orden de  $\zeta_1 = 43\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2 = 34\%$  para el segundo modo. Así usando el método de Ackermann, las constantes  $G$  para el modelo reducido y mediante la transformación expresada por las ecuaciones (35-37) se obtienen las constantes  $G$  para el modelo completo de elementos finitos. En la Tabla 2 se presentan los valores obtenidos.

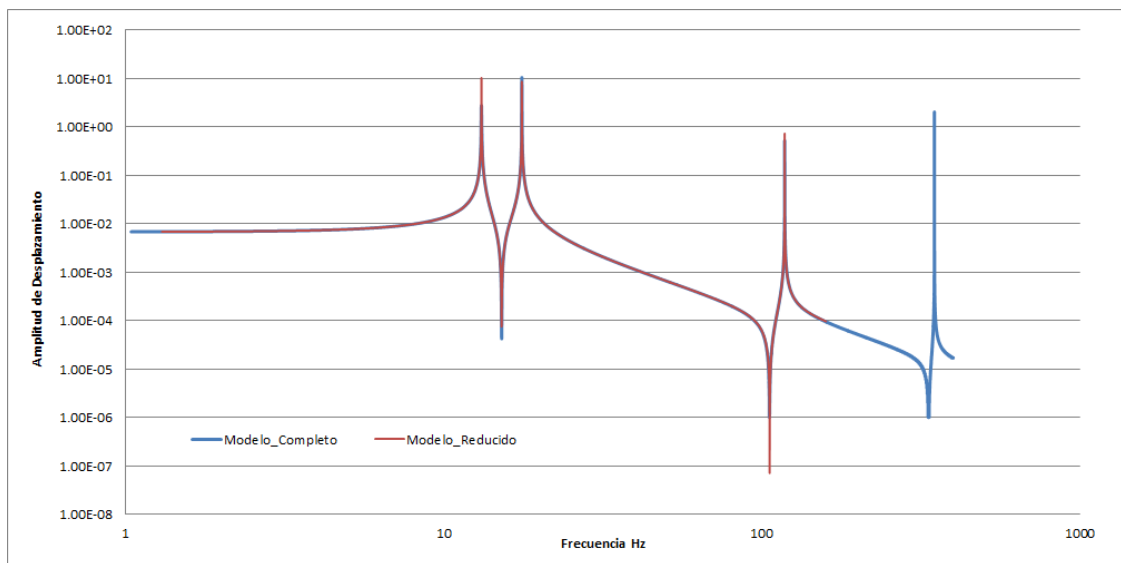


Figure 5: Amplitud de desplazamiento del extremo de la torre. Modelos con Masa-Resorte Sintonizado

$G$	g1	g2	g3	g4	g5	g6
<i>Modelo Reducido</i>	10793	34	-1013	-62.55	-0.2015	-55
<i>Modelo Completo</i>	16782	7380	-1013	-97	-42	-55

Table 2: Constantes del Sistema de Control.

En la Figura 6 se presentan las respuestas del desplazamiento en función del tiempo en el extremo de la torre con el sistema de control definido, ante un impulso en dicho punto, para el modelo completo de elementos finitos y para el reducido. El modelo reducido de tres grados de libertad con control fue resuelto utilizando el método de la diferencia central con un  $\Delta t = 0.001$  s, mientras que el modelo completo de elementos finitos con el amortiguador de

masa sintonizado y el sistema de control fue resuelto utilizando el método de integración en el tiempo HHT (Hughes, 1987) que ofrece ANSYS con un  $\Delta t=0.00025$ s. La incorporación del sistema de control en ANSYS se realizó mediante la programación en APDL.

Las respuestas de ambos modelos son similares, logrando un amortiguamiento prácticamente total al finalizar el segundo ciclo; de la misma forma que lo obtenido en forma analítica y experimental por Seto y Mitsuta (1994). Se debe destacar que en el planteo de Seto y Mitsuta (1994) referente a la obtención del modelo reducido y de la estrategia de control utilizadas (LQR) son distintas a las propuestas en el presente trabajo. Además, el periodo de la respuesta en este trabajo es inferior al presentado por Seto y Mitsuta (1994), y es probable que las fuerzas desarrolladas en el sistema de control sean también distintas; siendo en este trabajo posiblemente mayores. No es posible compararlas ya que no están presentadas en Seto y Mitsuta (1994).

De la Figura 6 es posible estimar el orden del amortiguamiento logrado en el sistema completo de elementos finitos con la incorporación del sistema masa resorte sintonizado y el sistema de control. Considerando los dos primeros picos positivos de la respuesta y el pico positivo en el segundo 0.3, aproximando con mínimos cuadrados para una función exponencial de la forma  $e^{-\xi\omega t}$ , se puede inferir que el amortiguamiento logrado es del orden de 41%. Se debe destacar que al asignar los polos de la matriz  $A_c$ , se planteó un amortiguamiento de  $\zeta_1 = 43\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2 = 34\%$  para el segundo modo. Resulta así que el valor de amortiguamiento obtenido en el modelo de elementos finitos, es del orden del amortiguamiento planteado en el modelo reducido propuesto.

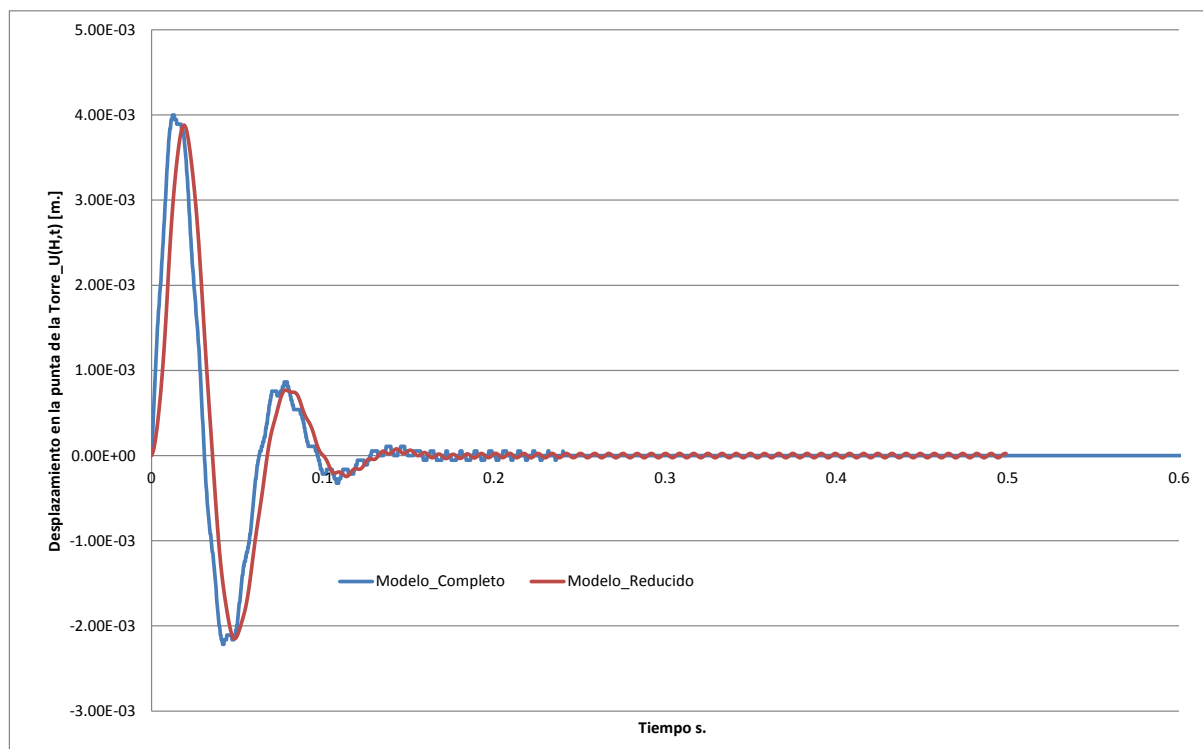


Figure 6: Desplazamiento en el extremo de la torre. Modelo Masa-Resorte Sintonizado y control

La metodología propuesta para encontrar el modelo reducido y definir el sistema de control por retroalimentación de estado mediante la asignación de polos resulta así satisfactoria para el problema de interés, y resulta posible aplicarla al caso de una torre un generador eólico.



## 5 APLICACION EN UNA TORRE DE GENERACIÓN EÓLICA CON AMORTIGUADOR TIPO PÉNDULO

Se considera la torre de un aerogenerador de eje horizontal. Se trata de una torre de sección circular de 77 metros de altura, con una masa agregada en el extremo libre de 80000kg, a la que se le considera su inercia de traslación, aunque no la de rotación. Como amortiguador de masa sintonizada se incorpora un péndulo en el extremo superior de la torre, con largo tal que su frecuencia natural coincida con la del primer modo de vibración en flexión de la torre con masa agregada. Como masa del péndulo se asume un 1% de la masa total del sistema; es decir 2333.3 kg.

En la tabla 3 se presentan las características geométricas de la torre eólica utilizada en el modelo de elementos finitos resuelto en ANSYS

TRAMOS	7	6	5	4	3	2	1
Long del tramo m.	9	6	6	6	6	6	3
Altura m.	42	33	27	21	15	9	3
$r_{\text{externo}}$ mm.	1900	1900	1900	1900	1900	1900	1900
$r_{\text{interno}}$ mm.	1880	1878	1876	1872	1868	1866	1864
Espesor mm.	20	22	24	28	32	34	36

TRAMOS	14	13	12	11	10	9	8
Long del tramo m.	1.126	1.36	3.9	8.351	5.549	8.766	6
Altura m.	77.052	75.926	74.566	70.666	62.315	56.766	48
$r_{\text{externo}}$ mm.	1600	1600	1712	1775	1850	1900	1900
$r_{\text{interno}}$ mm.	1584	1584	1698	1763	1836	1884	1882
Espesor mm.	16	16	14	12	14	16	18

Table 3: Características geométricas de la torre eólica.

Se realizaron dos modelos de elementos finitos en ANSYS usando 14 elementos de igual longitud, de tipo BEAM188 (ANSYS, 2009) a lo largo de la torre, y con la masa agregada en el extremo libre con un elemento MASS21 (ANSYS, 2009). En uno de los modelos se incluyó el péndulo y en el otro no. Con el modelo de elementos finitos con masa agregada y sin péndulo se obtuvieron los modos de vibración libre, que se asumieron como funciones base discretas para definir el modelo reducido. Se consideraron como funciones base para la ecuación (9) los dos primeros modos de flexión correspondientes a  $f_1=0.426$  Hz y  $f_2=3.13$  Hz. En la Figura 7 se presentan los desplazamientos transversales de dichos modos normalizados respecto de la matriz de masa usados como funciones base para definir el modelo reducido.

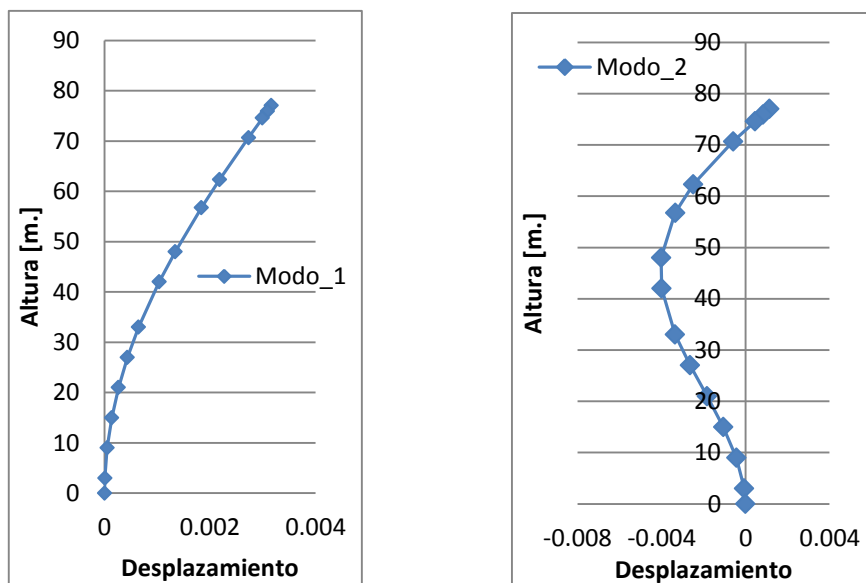


Figure 7: Modos naturales de vibración del modelo de Elementos finitos

En la Figura 8 se puede observar la respuesta en el extremo de la torre en el dominio de la frecuencia, correspondientes a los modelos con masa agregada, pero sin péndulo y sin sistema de control. Se trata de la respuesta del extremo superior de la torre cuando se da un impulso en dicho extremo, el intervalo de frecuencia utilizado es de 0.002Hz. Se puede apreciar que los dos primeros modos de vibración de la torre tienen una representación excelente en el modelo reducido; mientras que para los modos superiores al segundo, el modelo reducido no presenta amplificaciones.

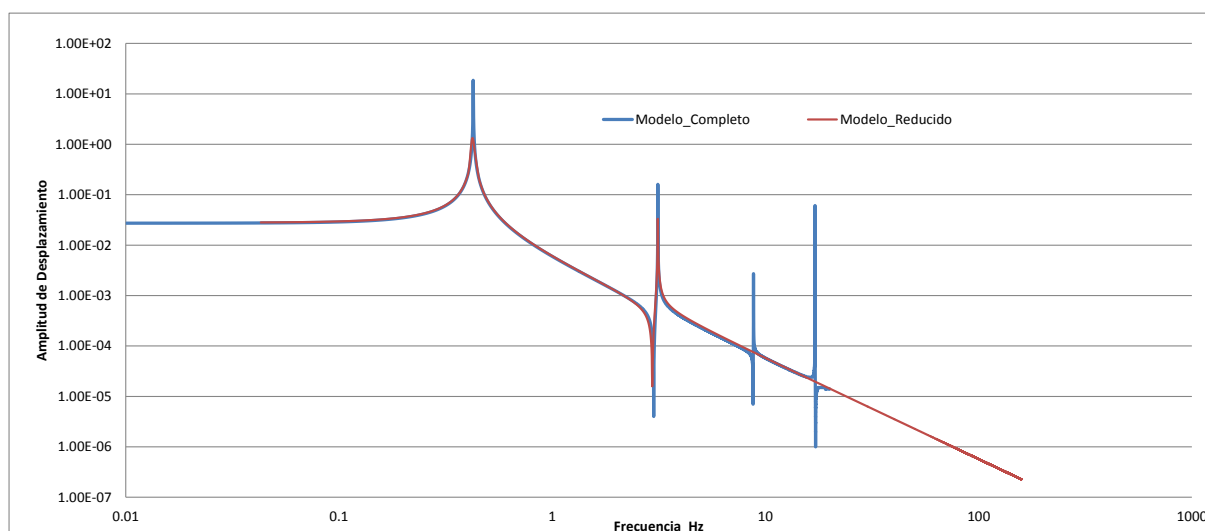


Figure 8: Amplitud de desplazamiento en extremo de la torre. Comparación de modelos.

A los efectos de reducir las amplitudes de las vibraciones libres inducidas por un impulso en el extremo de la torre, se acopla en dicho extremo el péndulo. Ante un impulso en el extremo de la torre la respuesta del desplazamiento en dicho extremo en función del tiempo se puede observar en las curvas de la Figura 9. Se puede observar una excelente correlación entre el modelo de elementos finitos desarrollado en ANSYS resuelto con un paso de tiempo  $\Delta t = 0.0025$  y el modelo reducido resuelto con un paso  $\Delta t = 0.001$ , ambos con el péndulo incorporado. Se puede apreciar el típico fenómeno denominado “beating” cuando se adiciona

a una estructura principal un amortiguador de masa sintonizada. Dado que no hay elementos que disipen energía, y que el amortiguamiento del material se consideró nulo no hay manifestación apreciable de disminución de amplitudes de oscilación. Para conseguir reducir las vibraciones se incorpora el sistema de control.

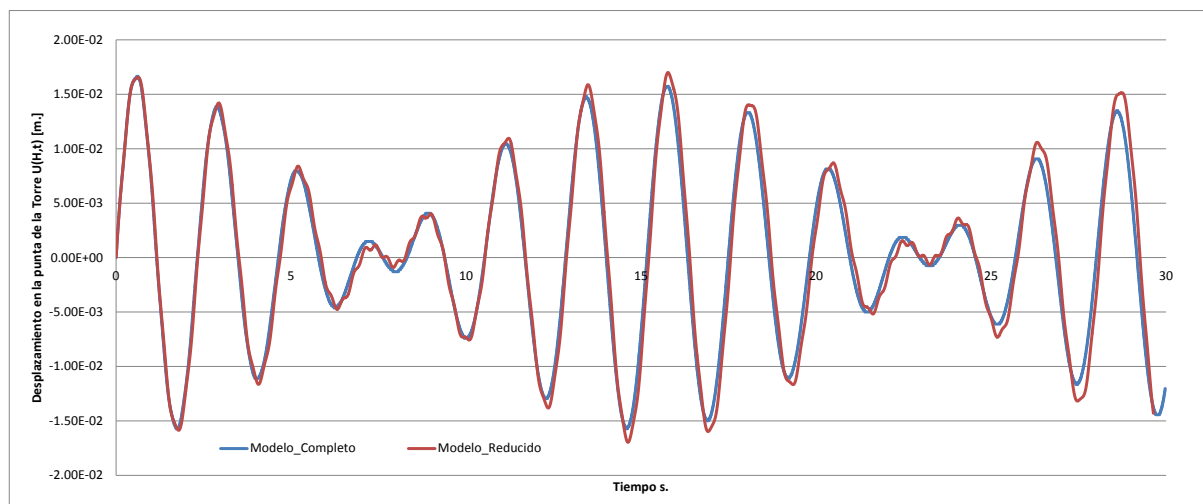


Figure 9: Desplazamiento en extremo de la torre. Modelos con péndulo sintonizado

Con el modelo reducido de tres grados de libertad que incluye el péndulo sintonizado, quedan definidas las ecuaciones (26), y así la matriz del sistema con control de retroalimentación de estado  $A_C$  definida por la ecuación (34). Mediante la asignación de polos y el método de Ackermann (Dorf y Bishop, 2001) es posible encontrar las constantes de  $G$  para el sistema reducido, y transformarlas con las ecuaciones (35-37) para ser utilizadas en el sistema completo de elementos finitos.

En primer instancia se asignaron polos del modelo reducido tales que el primer modo tenga un amortiguamiento  $\zeta_1 = 45\%$ , mientras que para el segundo modo de  $\zeta_2 = 45\%$ . Con esa asignación de polos se determinaron las constantes  $G$  con el método de Ackermann y se transformaron para incluirlas en el modelo completo de elementos finitos desarrollado en ANSYS, mediante la programación con APDL. Los resultados obtenidos se presentan en las Figuras 10 y 11. En la Figura 10 se puede observar el desplazamiento del extremo de la torre en función del tiempo, ante un impulso en el extremo de la torre, cuando actúa el sistema de control, tanto en el modelo de elementos finitos desarrollado en ANSYS como en el modelo reducido. Se puede decir que existe una excelente correlación entre ambos modelos. Es posible apreciar que se consigue un gran amortiguamiento en la oscilación libre del extremo de la torre. Considerando los dos primeros picos y el pico correspondiente al segundo 5 de la respuesta de la Figura 10, y aproximando con mínimos cuadrados para una función exponencial de la forma  $e^{-\xi\omega t}$ , se puede inferir que el amortiguamiento logrado es del orden de 36% con el sistema de control y el péndulo sintonizado, cuando en el sistema reducido se propuso un valor de  $\zeta_1 = 45\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2 = 45\%$  para el segundo modo mediante la asignación de polos.

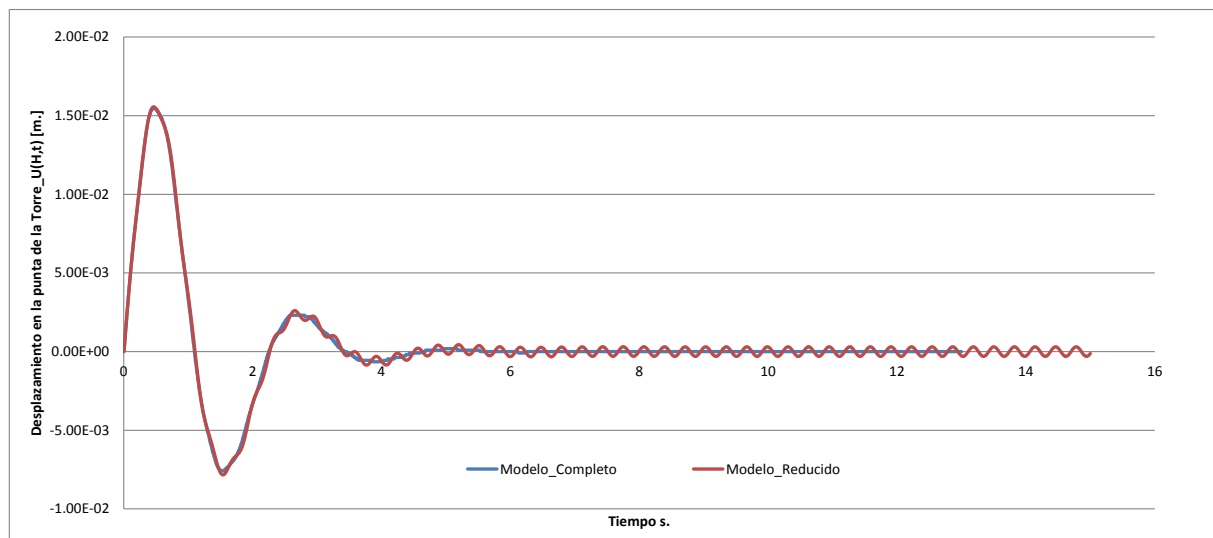


Figure 10: Desplazamiento en extremo de la torre. Modelos con péndulo sintonizado y control

Así mismo, en la Figura 10 se puede observar que la curva obtenida con el modelo reducido presenta oscilaciones de pequeña amplitud residuales; mientras que en la curva obtenido del modelo de ANSYS, dichas oscilaciones no se observan. Esto se debe al amortiguamiento numérico que introduce el método de integración en el tiempo utilizado en ANSYS, que es el denominado HHT que está ampliamente tratado en Hughes (1987). En el modelo reducido se ha utilizado el método de diferencia central.

En la Figura 11 se pueden comparar los desplazamientos en el extremo libre de la torre en función del tiempo, para los tres modelos desarrollados en ANSYS. Se ha excitado con un impulso en el extremo de la torre, y se ha resuelto mediante el método HHT disponible en ANSYS con un intervalo de tiempo  $\Delta t=0.005$  en los tres casos.

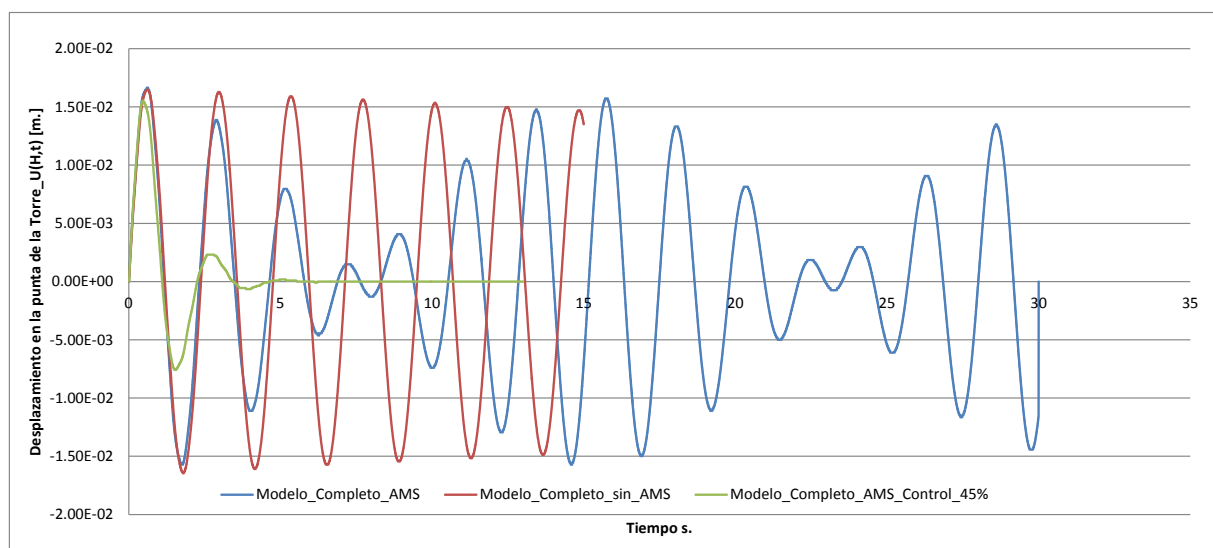


Figure 11: Desplazamientos en extremo de la torre. Modelos completos con y sin péndulo y péndulo con control

Se puede apreciar que la curva roja, correspondiente al modelo de la torre con la masa agregada, corresponde a una oscilación armónica prácticamente libre de amortiguamiento. Por otra parte, la curva azul que manifiesta el fenómeno de beating, corresponde al modelo de la torre con masa agregada y con péndulo sintonizado, aunque sin el sistema de control. Por

último, la curva verde correspondiente al modelo de la torre con masa agregada, con péndulo sintonizado y con el sistema de control definido, presenta un amortiguamiento tal que en dos ciclos las vibraciones se anulan prácticamente. De la comparación resulta evidente la eficiencia del amortiguamiento logrado.

Para obtener estos altos niveles de amortiguamiento se han ubicado los polos del sistema reducido de forma tal que su componente real sea negativa. A mayor valor absoluto de la componente negativa de los polos, mayor nivel de amortiguamiento se consigue.

A los efectos de analizar la incidencia de la asignación de polos con el amortiguamiento del sistema y las fuerzas desarrolladas en el sistema de control, se han analizado cuatro posiciones de los polos originales corriéndolos hacia la izquierda del plano  $s$ ; es decir, hacia valores cada vez menores de sus componentes reales. En la Figura 12 se pueden observar, para diferentes asignaciones de polos, los desplazamientos en el extremo de la torre en función del tiempo de los modelos desarrollados en ANSYS, de la torre con masa agregada, con péndulo y sistemas de control. La curva azul es la correspondiente al mayor amortiguamiento, y considerada anteriormente en las Figuras 10 y 11.

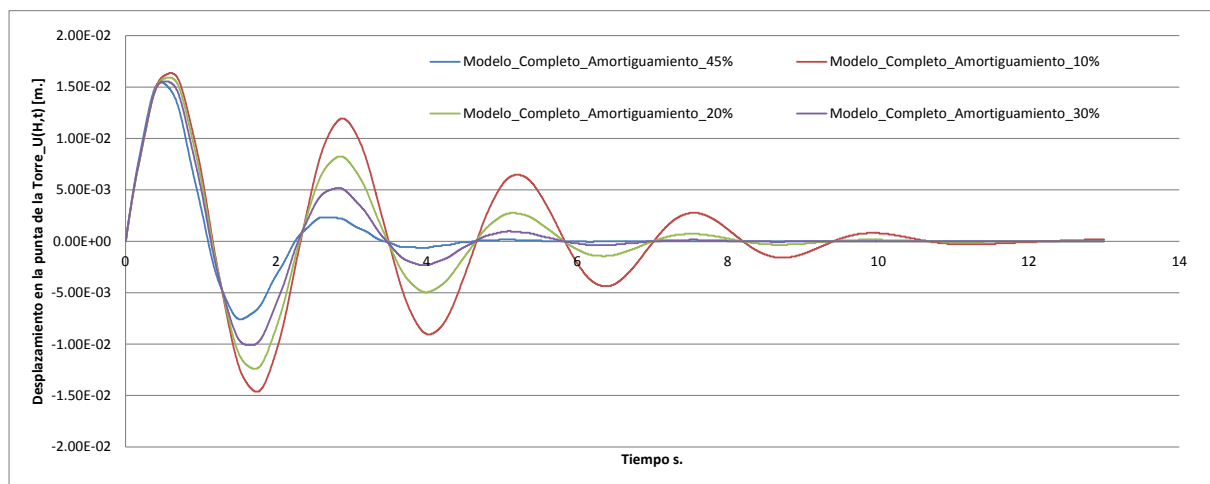


Figure 12: Desplazamiento en el extremo de la torre: Modelos completos con péndulo y control

Es posible estimar el valor de amortiguamiento logrado en el sistema torre, masa agregada, péndulo y sistema de control, considerando los picos positivos principales correspondientes a la envolvente de cada curva, y aproximando con mínimos cuadrados para una función exponencial de la forma  $e^{-\xi\omega t}$ . En la Tabla 4 se presentan los valores de amortiguamiento planteados al asignar polo y los estimados de la respuesta del modelo completo de elementos finitos. Se puede concluir que los amortiguamientos conseguidos con la metodología presentada, son consistentes con los planteados al asignar polos en el modelo reducido.

$G$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
<i>Propuesto al asignar polos</i>	10%	20%	30%	45%
<i>Obtenido en la respuesta de ANSYS</i>	12%	18%	24%	36%

Table 4: Comparación de amortiguamientos.

Para lograr este tipo de respuesta, el sistema de control desarrolla una fuerza que actúa en el péndulo y reacciona sobre la torre. En la Figura 13 se presenta las magnitudes de la fuerza desarrollada por el sistema de control en función del tiempo para las distintas asignaciones de polos posibles, y por lo tanto de amortiguamiento, presentadas anteriormente. Se puede

observar que las magnitudes de las fuerzas desarrolladas por el sistema de control son muy sensibles a los valores de amortiguamiento pretendidos.

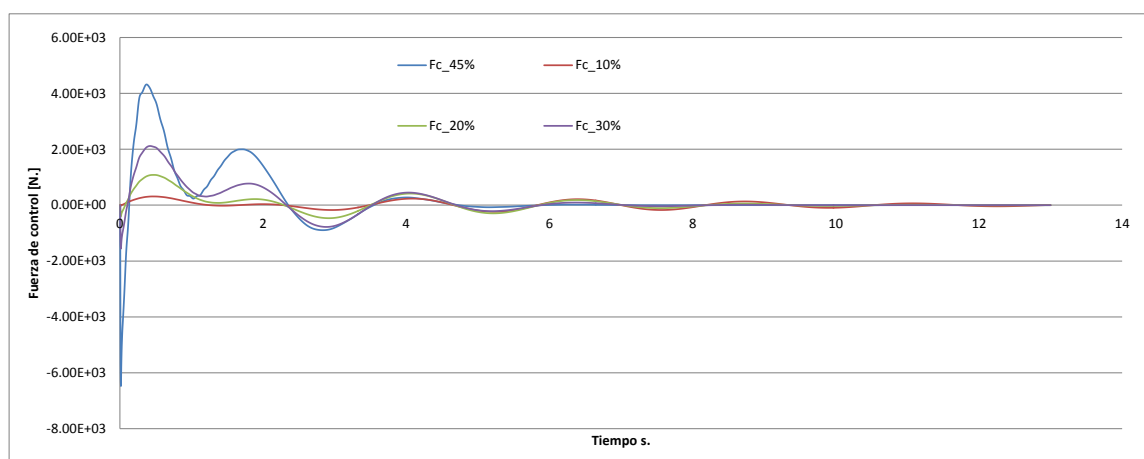


Figure 13: Fuerza de control en Newtons en función del tiempo

En el caso del mayor amortiguamiento analizado, se produce un gran pico negativo de fuerza de control seguido de un pico positivo correspondiente a un 7/4 % del valor anterior. Estos valores máximos son determinantes al momento de diseñar el accionamiento del sistema de control. Cuando los valores de amortiguamiento son bajos, los valores positivos son los más grandes. Los valores máximos de fuerza del sistema de control tanto positiva como negativa son parecidos para cuando se plantea un 30% de amortiguamiento. Según la fuerza máxima a desarrollar por el sistema de control, que condiciona el diseño del dispositivo, se puede decir que hay un valor de amortiguamiento para el que la fuerza del sistema de control negativa y positiva son de magnitudes similares. Para valores de amortiguamiento menores, las magnitudes máximas de la fuerza son positivas; y por el contrario, para valores mayores de amortiguamiento, las magnitudes máximas de la fuerza son negativas. En estos casos, el sistema de control resulta sobre dimensionado en una dirección.

## 6 CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología para diseñar un sistema híbrido de control de estructuras tipo torre, que combina amortiguadores de masa sintonizados y control activo mediante retroalimentación en el espacio de estado. El sistema de control se define mediante un modelo reducido, obtenido a partir del principio de Hamilton, discretizado con el método de modos asumidos, con modos de vibración libre definidos en forma discreta a partir de un modelo de elementos finitos. Para la estructura tipo torre se considera teoría de viga de Navier Bernoulli de sección transversal con doble eje de simetría, fuerzas externas distribuidas y concentradas, y una masa en el extremo libre con inercia de traslación y de rotación. La formulación del funcional de Hamilton incluye amortiguadores de masa tipo péndulo y tipo masa resorte, vinculados a la torre en distintos puntos. Se han analizado distintos casos que tienen como excitación impulsos en el extremo de la torre.

La equivalencia entre el modelo reducido y el de elementos finitos se verifica en el dominio de la frecuencia. Se definieron las constantes del sistema de control en el espacio de estado del modelo reducido mediante la asignación de polos y el método de Ackermann, y se convirtieron al modelo completo de elementos finitos desarrollado en ANSYS, eligiendo apropiadamente los puntos en los cuales medir posición y velocidad en la torre. Se comparó la respuesta en el dominio del tiempo del modelo reducido con control con la del modelo

completo de elementos finitos desarrollado en ANSYS, al que se le programó con APDL el sistema de control, obteniendo resultados muy similares. No se han manifestado perturbaciones de modos superiores en las respuestas obtenidas. Esto refuerza la idea que la respuesta de estructuras tipo torre está dominada por modos de bajas frecuencias.

En todos los casos analizados se ha logrado obtener en el modelo completo de elementos finitos el mismo orden de amortiguamiento propuesto al asignar polos en el modelo reducido en espacio de estado.

Se ha obtenido que para un amortiguamiento de 30% las fuerzas del sistema de control son similares en ambos sentidos. Pero se considera que es necesario explorar como definir la asignación de polos para lograr el mayor amortiguamiento posible, minimizando la magnitud de la fuerza de control requerida.

Si bien sólo se consideraron excitaciones debidas a impulsos en el extremo de la torre, los resultados son muy buenos como para explorar en futuros trabajos excitaciones debidas a viento y sismos. También es posible considerar en futuros trabajos la incidencia de posibles perturbaciones al sistema de control definido, tales como cambios en las sollicitaciones o propiedades del sistema.

## REFERENCIAS

- ANSYS, “ANSYS help system/mechanical APDL/Element reference/element library”, ANSYS, Inc, 2009.
- Ambrosini, D., Cuitiño, G. y Rebecco, J., Eficiencia de amortiguadores de masa sintonizados en estructuras sismorresistentes, *Mecánica Computacional*, 23:447-462, 2004.
- Ascheri, J.P, Rubinstein, M., Möller, O., Optimización de dispositivos de control pasivo a partir de un modelo de control activo predictivo, *Mecánica Computacional*, 29:185-201, 2010.
- Ascheri, J.P, Rubinstein, M., Möller, O., Diseño de sistemas sismorresistentes de control pasivo utilizando estrategias de control activo predictivo, *Mecánica Computacional*, 26:2283-2300, 2007.
- Ascheri, J.P, Rubinstein, M., Möller, O., Diseño matemático de disipadores de energía sísmica utilizando estrategias de control activo predictivo, *Mecánica Computacional*, 25:2163-2178, 2006.
- Balachandran, B., Magreb, E.B., *Vibraciones*, Thomson Learning, 2006.
- Bassotti, R. y Ambrosini, D. Influencia de amortiguadores de masa sintonizados en la disminución de efectos torsionales de estructuras sismorresistentes, *Mecánica Computacional*, 23:481-497, 2004.
- Bassotti, R. y Ambrosini, D. Sobre la utilización de amortiguadores de masa sintonizada en la Provincia de Mendoza, *Mecánica Computacional*, 26:2321-2340, 2007.
- Chang, J.C.H. y Soon, T.T., Structural control using active tuned mass damper, *J. Eng. Mech., ASCE*, 106:1091-1098, 1980
- Curadelli, O., Amani, M., Estudio comparativo de estrategias de control para dispositivos semi activos de control de vibraciones, *Mecánica Computacional*, 31:2255-2264, 2012.
- Dorf, R.C., Bishop, R.H., *Modern Control Systems*, Prentice Hall, 2001.
- Eronini Umez-Eronini, *Dinámica de Sistemas y Control*, Thompson Learning, 2001.
- Garrido, H., Curadelli, O., Ambrosini, D., Estudio paramétrico sobre la efectividad y la adaptabilidad del amortiguador sintonizado de masa semiactivo, *Mecánica Computacional*, 31:2349-2367, 2012.
- Gawronski, W.K., *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. Springer

- Verlag, 2004.
- Harte, M., Basu, B., Nielsen S.R.K., Dynamic analysis of wind turbines including soil-structure interaction, *Engineering Structures*, 45: 509–518, 2012.
- Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, 1987.
- Kobori, T. et al., Study on active mass driver (AMD) system – active seismic response controlled structure, *4th World Congress of Council on Tall Buildings and Urban Habitat*, Hong Kong, November 1990.
- Korkmaz, S. A review of active structural control: challenges for engineering informatics, *Computers and Structures*, 89:2113–2132, 2011.
- Lackner, M. A., Rotea, M. A., Structural control of floating wind turbines, *Mechatronics*, 21:704–719, 2011.
- Martinez, C., Curadelli, O., Compagnoni, E., Distribución óptima de amortiguadores en estructuras tridimensionales bajo excitación sísmica, *Mecánica Computacional*, 31:2511–2525, 2012.
- Matsumoto, T. et al., Study on powered passive mass damper for high rise building, *Proceedings of AIJ Annual Meeting*, (in Japanese), October, 1990.
- Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- Montanaro, M.I., Ambrosini, D., Danesi, R.F., Análisis computacional de sistemas de control pasivo de vibraciones, *Mecánica Computacional*, 19, 8, 1999.
- Moreno, L., Garrido, S., Balaguer, C., *Ingeniería e Control. Modelado, Análisis y Control de Sistemas Dinámicos*, Editorial Ariel S.A., España, 2003.
- Ormondroyd, J., Den Hartog, J.P., The theory of damped vibration absorber, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 50,9-22, 1928.
- Preumont, A. y Seto, K., *Active Control of Structures*, John Wiley & Sons, 2008.
- Seto, K., y Mitsuta, S., A new method for making a reduce order model of flexible structure using unobservability and uncontrollability and its application in vibration control. *Proceedings of 1<sup>st</sup> International Conference on Motion and Vibration Control*, 153–158, 1992.
- Seto, K., y Mitsuta, S., A new method for making a reduce order model of flexible structure using unobservability and uncontrollability and its application in vibration control. *Japanese Society of Mechanical Engineering International Journal*, Serie C, Vol.37. N°3, 444-449, 1994.
- Seto, K., Kondo, S., Ezurre, K., Vibration control method for flexible structure with distributed parameters using a hybrid dynamic absorber, *ASME 1995 Design Engineering Technical Conference*, DE-Vol.83-3, 1995.
- Song, T.T., *Active Structural Control: Theory and Practice*, John Wiley&Sons,1990.
- Soong, T.T. y Constantinou, M.C., *Passive and Active Structural Vibration Control in Civil Engineering*, Springer Verlag, 1994.
- Staino, A. Basu, B. Nielsen, S.R.K., Actuator control of edgewise vibrations in wind turbine blades, *Journal of Sound and Vibration*, 331:1233–1256, 2012.
- Staino ,A., Basu, B., Dynamics and control of vibrations in wind turbines with variable rotor speed, *Engineering Structures*, 56:58–67, 2013.
- Stewart G. M., Lackner, M. A., The effect of actuator dynamics on active structural control of offshore wind turbines, *Engineering Structures*, 33:1807–1816, 2011.
- Yao, J.T.P, Concept of structural control, *ASCE Journal of Structural Division*, 99:1567-1574, 1972.