

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE CONTACTO CON FRICCIÓN BASADO EN EL MÉTODO MORTAR CON UN LAGRANGIANO AUMENTADO

Federico Cavalieri y Alberto Cardona

Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC). Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina, fcavalieri@santafe-conicet.gov.ar
<http://www.cimec.org.ar>

Palabras Clave: contacto mecánico, mortár, lagrangiano aumentado, fricción.

Resumen. En este trabajo se presenta una formulación de contacto con fricción aplicable a problemas tridimensionales con deformación finita. La descripción de la cinemática de los cuerpos en contacto se realiza utilizando un método mortár. El cumplimiento de las restricciones de contacto y de fricción se establece con una formulación dual mixta a partir de un lagrangiano aumentado, de este modo no es necesario introducir ningún parámetro de penalización para la regularización de las fuerzas de contacto normal y tangencial. Para la verificación de los resultados obtenidos, se reproducen ejemplos numéricos de validación y otros aplicables a grandes deformaciones y desplazamientos tangenciales.

El contacto mecánico se define como el estudio de las tensiones y deformaciones de sólidos que se tocan entre sí, en uno o más puntos (Johnson, 1987). Las aplicaciones del contacto mecánico en problemas de ingeniería son de lo más diversas, como ser el diseño de engranajes (Gamez-Montero et al., 2005), el análisis de contacto entre una válvula de un motor de combustión interna y el asiento (Cavaliere, 2010), estudios de desgaste y tribología (Zenklusen et al., 2012; Cavaliere, 2010), procesos de conformado, o aplicaciones en bioingeniería, entre otras. Los primeros estudios de contacto datan del año 1882 con la publicación de Heinrich Hertz. Sin embargo, esta teoría se restringe a sólidos perfectamente elásticos con condiciones de borde muy simples, que limitan su utilización en aplicaciones generales del mundo real. En la actualidad, el Método de Elementos Finitos (MEF) es la técnica de simulación numérica más popular para el análisis de procesos que involucran el contacto mecánico. A través de los años, se han propuesto diferentes tipos de aproximaciones y algoritmos que intentan representar con precisión y robustez soluciones de tensiones y deformaciones. Sin embargo, debido a las fuertes no linealidades involucradas en la formulación, el estudio del contacto mecánico continúa siendo un área actual de investigación.

En el marco del MEF para la descripción del desplazamiento relativo entre dos cuerpos en contacto, una técnica ampliamente difundida es la del nodo-segmento, en la cual a un nodo de un cuerpo, denominado esclavo, se le asocia una zona de un segmento o superficie del otro cuerpo denominada master. En Wriggers (2002) y en Laursen (2002) puede encontrarse una extensa bibliografía con diferentes variantes y aplicaciones prácticas de esta aproximación. El principal inconveniente de la estrategia nodo-segmento es que no garantiza que una superficie transmita una presión de contacto uniforme a la otra superficie; en otras palabras, esta estrategia no supera los denominados tests de la parcela de contacto, (Papadopoulos y Taylor, 1990). Adicionalmente, con superficies de contacto no suaves, generan saltos de presión cuando los nodos esclavos se deslizan entre segmentos adyacentes (El-Abbasi y Bathe, 2001) y no cumplen con la condición de Brezzi y Fortin (1991), causando un mal condicionamiento de las matrices y pobre tasa de convergencia. Las aproximaciones del tipo nodo-segmento con doble pasada verifican los tests de la parcela, pero pueden bloquearse debido a las sobre-restricciones introducidas en la formulación (Puso y Laursen, 2004b).

Otra aproximación propuesta más recientemente es la de los métodos segmento-segmento o superficie-superficie, que relacionan el segmento de un cuerpo (segmento *master*) con algún segmento del otro cuerpo (segmento *esclavo*). La mayoría de los métodos segmento-segmento utilizan algún tipo de superficie de contacto intermedia, o proyección de superficies, e integran el trabajo virtual de contacto usando una cuadratura numérica con alguna interpolación en la presión. El método superficie-superficie tipo mortero fue originalmente propuesto como un método de descomposición de dominios y utilizado para resolver problemas de elementos finitos con discretizaciones no conformes. A diferencia de los algoritmos nodo-segmento, los métodos mortero son únicamente de una pasada y verifican los tests de la parcela debido a cómo están formulados. De esta manera, la propuesta de un esquema de doble pasada sería completamente innecesaria.

Específicamente, el primer trabajo que ha utilizado el método mortero fue el propuesto por Bernardi et al. (1992), donde se muestra la estabilidad del método en relación a las condiciones de Babuska-Brezzi. Los primeros desarrollos del método mortero con interés ingenieril fueron propuestos en el marco de pequeñas deformaciones, ver por ejemplo (McDevitt y Laursen, 2000). Luego, trabajos como Puso y Laursen (2004b); Puso (2004), Hüeber y Wohlmuth (2005), Hüeber et al. (2005), Fischer y Wriggers (2005), Hartmann y Ramm (2008), Popp et al. (2009), Popp et al. (2010), Hesch y Betsch (2011), Hüeber y Wohlmuth (2009), Cichosz y Bischoff

(2011), Hesch y Betsch (2010), Cavalieri et al. (2012), entre otros, han extendido esta aproximación a problemas con deformaciones finitas, grandes deslizamientos y variación en el tiempo. Los trabajos de Papadopoulos y Solberg (1998), Jones y Papadopoulos (2001), Solberg y Papadopoulos (2005) y Solberg et al. (2007) no son conocidos como métodos mortar; sin embargo, incorporan todas las características para ser clasificados como tales, Temizer (2012). Recientemente, Temizer (2012), Lorenzis et al. (2012) y Kim y Youn (2012) aplicaron el método mortar utilizando análisis isogeométrico.

El tratamiento de las restricciones del problema de contacto puede abordarse a través de diferentes estrategias: penalidad, multiplicadores de Lagrange, lagrangianos aumentados, entre otros. Por ejemplo, los trabajos de Puso y Laursen (2004b) y Yang et al. (2005) presentan una formulación mortar combinada con un método de penalidad. Puso (2004) propone un algoritmo mortar basado en un lagrangiano aumentado combinado con un esquema de doble lazo tipo Uzawa. Wohlmuth (1998) y más tarde Popp et al. (2009) proponen un algoritmo mortar basado en espacios duales de multiplicadores de Lagrange y, más recientemente, Cavalieri y Cardona (2013) proponen un algoritmo de contacto mortar basado en un lagrangiano aumentado aplicado a problemas de contacto sin fricción. Cada una de estas estrategias presentan ventajas y desventajas, tal como lo describen Cavalieri y Cardona (2013) y Popp et al. (2009).

La complejidad del estudio de contacto aumenta cuando se considera fricción. La primera formulación matemática del fenómeno de contacto con fricción fue propuesta hace más de 200 años en los trabajos de Coulomb y luego continuado por Hertz. Sin embargo, a pesar de los inmensos esfuerzos realizados para explicar la naturaleza física de la fricción, hasta el día de hoy no se encuentra un consenso universal sobre alguna teoría matemática o física que describa apropiadamente este complejo proceso. El hecho de que la fricción sea influenciada por la interacción de diferentes propiedades de los materiales también incrementa la dificultad en el modelado por su fuerte correlación entre las propiedades reológicas y tribológicas. El comportamiento tribológico es función de las interacciones entre una enorme cantidad de parámetros que cambian a lo largo del proceso de contacto, siendo necesario realizar una gran cantidad de ensayos experimentales midiendo la presión de contacto, los niveles de deformación plástica, los cambios geométricos, la velocidad de deslizamiento, la rugosidad de las superficies y las condiciones de lubricación para la determinación de valores globales para los coeficientes de fricción.

La fricción es modelada en la mayoría de los casos por medio de la ley de Coulomb. Si bien esta ley es aproximada ya que pone en juego sólo un coeficiente de fricción, permite describir relativamente bien el fenómeno para una amplia gama de aplicaciones. En esta ley, la fuerza de contacto normal es independiente de la de fricción y en ello radica su carácter no asociativo con un sistema de ecuaciones linealizadas no simétricas (Moreau, 1979). La consideración de la fricción es la mayor responsable de la degradación de la convergencia global de los algoritmos de contacto (Esche et al., 1997). Extensiones del método mortar a problemas de contacto con fricción pueden encontrarse en los siguientes trabajos: Puso y Laursen (2004a), Yang et al. (2005), Fischer y Wriggers (2006), Tur et al. (2009), Oliver et al. (2009) Hartmann et al. (2009), Heintz y Hansbo (2006), Gitterle et al. (2010), De Lorenzis et al. (2011), Temizer et al. (2012) y Temizer (2013).

A diferencia de los trabajos citados, aquí se propone un método lagrangiano aumentado combinado con un método mortar para aplicaciones de contacto con fricción y que resulta una extensión del trabajo de Cavalieri y Cardona (2013). La forma que adopta el lagrangiano permite obtener un funcional C1 diferenciable. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones resultante, incluyendo a los multiplicadores de Lagrange, se linealizan y se resuelven por medio de un

método de Newton-Raphson clásico. Los ejemplos numéricos propuestos muestran resultados de tensiones de contacto normal y tangencial suaves, aún en mallas arbitrarias.

1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

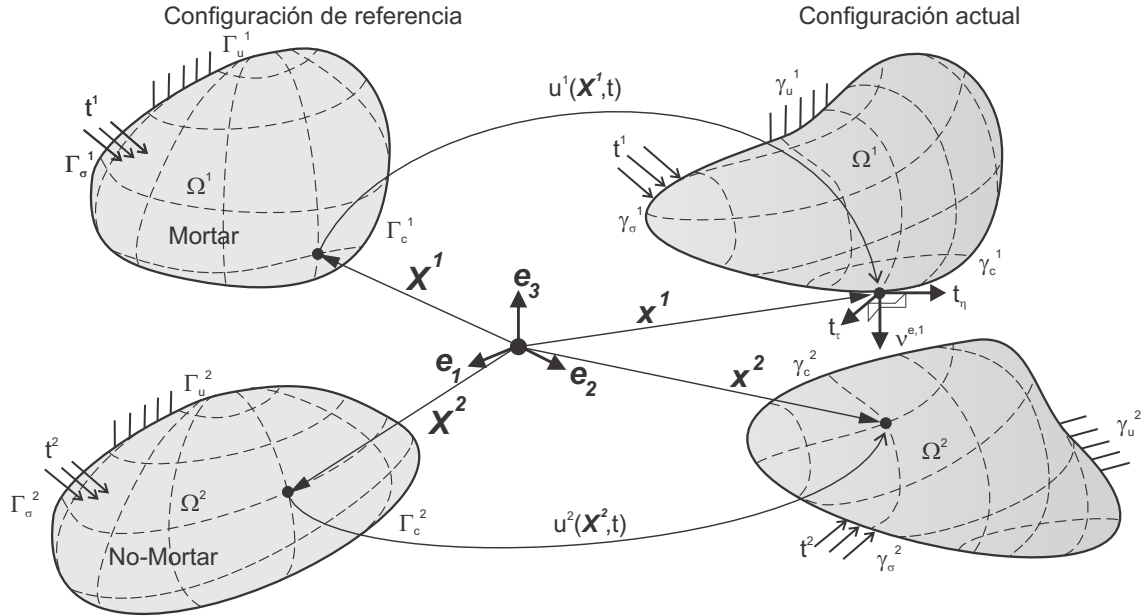


Figura 1: Notación utilizada para dos cuerpos en contacto con grandes deformaciones.

En la Fig. 1, se esquematiza el problema de contacto con grandes deformaciones para dos cuerpos \mathcal{B}^α con $\alpha = 1, 2$ ocupando un conjunto abierto $\Omega^\alpha \subset \mathbb{R}^3$ en la configuración de referencia y $\Omega_a^\alpha \subset \mathbb{R}^3$ en la configuración actual. En la configuración de referencia, las superficies de los cuerpos, $\partial\Omega^\alpha$, se dividen en tres fronteras disjuntas: Γ_u^α representa la condición de Dirichlet, Γ_σ^α representa la condición de Neumann y Γ_c^α representa la condición de contacto, en tanto que estas mismas condiciones en la configuración actual son: γ_u^α , γ_σ^α y γ_c^α .

En la configuración de referencia, los puntos materiales para cada sólido son denotados por el vector posición $\mathbf{X}^\alpha \in \Omega^\alpha$, en tanto que la posición actual de estos puntos materiales está dado por $\mathbf{x}^\alpha \in \Omega_a^\alpha$. Luego, el movimiento de ambos cuerpos se describe por los campos de desplazamientos \mathbf{u}^α que se relacionan con las posición actual y de referencia de las partículas por medio de $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{X}^\alpha + \mathbf{u}^\alpha$.

La energía potencial total para los cuerpos en contacto \mathcal{B}^α viene dada por,

$$\Pi = \Pi^c + \Pi^{\text{int,ext}}, \quad (1)$$

donde Π^c representa la energía potencial de contacto y, $\Pi^{\text{int,ext}}$ representa la energía potencial total debida a las cargas interiores y exteriores cuya expresión en el contexto de deformaciones finitas es

$$\Pi^{\text{int,ext}} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_{\Omega^\alpha} (\mathbf{E}^\alpha : \mathbf{S}^\alpha - \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha) d\Omega - \int_{\Gamma_N^\alpha} \hat{\mathbf{t}}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha d\Gamma \right] \quad (2)$$

Aquí \mathbf{b}^α es el vector de fuerzas de cuerpo en Ω^α , $\hat{\mathbf{t}}^\alpha$ es el vector tracción prescripto, \mathbf{S}^α es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff que se relaciona con las deformaciones por medio de una ley

constitutiva adecuada, por ejemplo,

$$\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{C}^\alpha : \mathbf{E}^\alpha \quad (3)$$

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo de cuarto orden y \mathbf{E} es el tensor de deformación de Green-Lagrange definido como

$$\mathbf{E}^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})^\alpha \quad (4)$$

con \mathbf{F} representando el gradiente de deformación. En este trabajo se pondrá especial énfasis en resolver las ecuaciones referidas al contacto y no se entrará en detalle en la resolución de las ecuaciones que gobiernan las deformaciones de los sólidos. Por lo tanto, la energía potencial debida exclusivamente a los efectos de contacto está dada por la siguiente expresión

$$\Pi^c = - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\gamma_c^\alpha} \bar{\mathbf{t}}_c^\alpha \cdot \mathbf{x}^\alpha d\gamma \quad (5)$$

donde $\bar{\mathbf{t}}_c^\alpha$ es el vector tracción de Cauchy del cuerpo \mathcal{B}^α expresado en la configuración actual. Asumiendo balance del momento lineal en la superficie de contacto, $\bar{\mathbf{t}}_c^1 d\gamma^1 = -\bar{\mathbf{t}}_c^2 d\gamma^2$, la energía potencial de contacto puede simplificarse como

$$\Pi^c = - \int_{\gamma_c^1} \bar{\mathbf{t}}_c^\alpha \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\gamma \quad (6)$$

Luego, si en lugar de utilizar el vector tracción de Cauchy $\bar{\mathbf{t}}_c^1$, se introduce un multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} = -\bar{\mathbf{t}}_c^1$, la energía potencial de contacto resulta en

$$\Pi^c = \int_{\gamma_c^1} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\gamma \quad (7)$$

En este trabajo, el método de los elementos finitos se utiliza para discretizar los dominios de los cuerpos. De este modo, la superficie de contacto de cada cuerpo y el vector tracción representado por el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ pueden ser parametrizados de la siguiente manera (Puso, 2004),

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{A=1}^{n^\alpha} N_A^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{x}_A^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_{A=1}^{n^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) \boldsymbol{\lambda}_A \quad (8)$$

donde $\mathbf{x}_A^\alpha \in \gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$ son las coordenadas nodales, $\boldsymbol{\xi}^\alpha$ son las coordenadas de los puntos de Gauss, n^α es el número de nodos en γ_c^α , y $N_A^\alpha : \gamma_c^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ son las clásicas funciones de forma utilizadas en la discretización por elementos finitos. El multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_A \in \gamma_c^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, Eq.(8)₂, se discretiza con las mismas funciones de forma utilizadas para aproximar la geometría y los desplazamientos en la superficie. Como normalmente se denomina en la literatura, γ_c^1 and γ_c^2 denotan las superficies no-mortar y mortar, respectivamente. Utilizando las ecuaciones Ec.(8)_{1,2} y la Ec.(7), la energía potencial de contacto se escribe de la siguiente manera,

$$\Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} \boldsymbol{\lambda}_A \cdot \left(\sum_{B=1}^{n^1} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_B^1(\boldsymbol{\xi}^1) d\gamma \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n^2} \int_{\gamma_c^2} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_C^2(\boldsymbol{\xi}^2) d\gamma \mathbf{x}_C^2 \right) \quad (9)$$

donde los términos de la Ec.(9) que se encuentran entre paréntesis, pueden interpretarse como una medida de la interpenetración o un huelgo promedio que se corresponde al nodo A . De esta forma

$$\Pi^c = \sum_{A=1}^{n^1} \lambda_A \cdot \mathbf{g}_A. \quad (10)$$

con

$$\mathbf{g}_A = \left(\sum_{B=1}^{n^1} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_B^1(\boldsymbol{\xi}^1) d\gamma \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n^2} \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_C^2(\boldsymbol{\xi}^2) d\gamma \mathbf{x}_C^2 \right) \quad (11)$$

2. CONTACTO CON FRICCIÓN

Si se tienen en cuenta los efectos de fricción, es necesario descomponer al vector huelgo \mathbf{g}_A y al multiplicador de Lagrange λ_A en una componente normal g_{NA} y λ_{NA} y en otra tangencial \mathbf{g}_{TA} y λ_{TA} , respectivamente, a través del vector normal $\boldsymbol{\nu}_A$ de la superficie γ_c^1 del nodo A . De este modo, la energía potencial de contacto dividida en un término normal y en otro tangencial resulta en la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \Pi^c = & \sum_{A=1}^{n^1} \left[\underbrace{\lambda_{NA}(t_{n+1}) \boldsymbol{\nu}_A(t_n) \cdot \left(\sum_{B=1}^{n^1} n_{AB}^1(t_{n+1}) \mathbf{x}_B^1(t_{n+1}) - \sum_{C=1}^{n^2} n_{AC}^2(t_{n+1}) \mathbf{x}_C^2(t_{n+1}) \right)}_{\text{Componente normal}} \right] + \\ & \sum_{A=1}^{n^1} \underbrace{\lambda_{TA}(t_{n+1}) [\mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}_A(t_n) \otimes \boldsymbol{\nu}_A(t_n)] \cdot \left(\sum_{B=1}^{n^1} n_{AB}^1(t_n) \mathbf{x}_B^1(t_{n+1}) - \sum_{C=1}^{n^2} n_{AC}^2(t_n) \mathbf{x}_C^2(t_{n+1}) \right)}_{\text{Componente tangencial}} \end{aligned} \quad (12)$$

donde n_{AB}^1 y n_{AC}^2 son los factores de peso cuyas expresiones se muestran a continuación,

$$n_{AB}^1 = \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_B^1(\boldsymbol{\xi}^1) d\gamma, \quad n_{AC}^2 = \int_{\gamma_c^1} N_A^1(\boldsymbol{\xi}^1) N_C^2(\boldsymbol{\xi}^2) d\gamma, \quad (13)$$

y que son computados mediante un algoritmo de ensamble como el que se presenta en [Cavaliere y Cardona \(2013\)](#). Notar que en la Ec.(12), en el término correspondiente a la componente normal, los factores de peso n_{AB}^1 y las posiciones \mathbf{x}_A^1 se encuentran evaluados en el paso de tiempo actual t_{n+1} , en tanto tanto que el término correspondiente al desplazamiento tangencial, los factores de peso se encuentran evaluados en el paso de tiempo previo t_n . Esta definición de la componente tangencial permite representar el movimiento tangencial incremental garantizando propiedades de objetividad en la formulación tal como lo demuestran [Puso y Laursen \(2004a\)](#). El vector normal $\boldsymbol{\nu}_A$, es el promedio de los vectores normales que concurren al nodo A calculado siguiendo el trabajo de [Cavaliere et al. \(2012\)](#). Para simplificar la formulación, $\boldsymbol{\nu}_A$ es evaluado en el paso de tiempo previo t_n ; de esta forma, su linealización no interviene en el cálculo de la matriz Hessiana. Luego, la solución general al problema de contacto unilateral con fricción puede ser obtenida mediante una formulación mortar de elementos finitos de la

siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } (\Pi^{\text{int,ext}} + \Pi^c) \\
 & \text{tal que} \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} g_{NA} \geq 0 & \text{Huelgo} \\ \lambda_{NA} \leq 0 & \text{Contacto} \\ g_{NA}\lambda_{NA} = 0 & \text{Condición de complementariedad} \end{array} \right. \quad (14) \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} \|\lambda_{TA}\| \leq -\mu\lambda_{NA} & \text{Ley de fricción} \\ \mathbf{g}_{TA} = \|\mathbf{g}_{TA}\| \frac{\lambda_{TA}}{\|\lambda_{TA}\|} & \text{Regla de deslizamiento.} \\ \|\mathbf{g}_{TA}\| (\|\lambda_{TA}\| + \mu\lambda_{NA}) = 0 & \text{Condición de complementariedad.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

En la Ec.(14), el primer conjunto de ecuaciones establece las condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para contacto unilateral expresadas en forma discreta para el nodo A y que se corresponden al caso de contacto sin fricción. La primera condición establece la restricción de impenetrabilidad, la segunda representa la condición de no tracción en la superficie de contacto, (se permite únicamente tensión de compresión) y la tercera es la ecuación de complementariedad.

El segundo conjunto de ecuaciones representan las condiciones de KKT de fricción. La primera de estas ecuaciones establece el valor máximo de la presión de contacto tangencial, que es $\mu\lambda_{NA}$, siendo μ el coeficiente de fricción. La segunda ecuación impone colinearidad entre el desplazamiento relativo y el vector de la presión de contacto tangencial. La tercera es la condición de complementariedad que indica que \mathbf{g}_{TA} y $\|\lambda_{TA}\| + \mu\lambda_{NA}$ no pueden ser simultáneamente no nulos. Por lo tanto, cuando $(\|\lambda_{TA}\| + \mu\lambda_{NA}) < 0$ y $\mathbf{g}_{TA} = 0$ se dice que el estado de contacto es de *stick*. Cuando $\mathbf{g}_{TA} \neq 0$ las tensiones tangenciales alcanzan a ser iguales a $\|\lambda_{TA}\| \geq -\mu\lambda_{NA}$, se dice que el cuerpo está deslizando o en estado de *slip*.

En el problema de contacto, cuando se tiene en cuenta la fricción, ésta presenta una complejidad adicional respecto del contacto normal (o contacto sin fricción) relacionada con el cambio de estado de *stick* a *slip*. En este sentido, los métodos de penalidad, multiplicadores de Lagrange, etc. utilizados para evaluar la fuerza de contacto normal, podrían ser introducidos para estimar la fuerza de contacto tangencial. Sin embargo, para el estado de *slip*, la fuerza de fricción depende directamente del valor de la fuerza de contacto normal, y el carácter asociativo se pierde. Un método frecuentemente utilizado para resolver la condición de fricción es a través de un esquema de penalidad en conjunto con un algoritmo del tipo *return mapping* (Simo y Hughes, 1998; Giannakopoulos, 1989). Ésta asume que para el estado de *stick*, la fuerza tangencial depende linealmente de una pequeña cantidad de *slip* relacionada con un parámetro de penalidad. La principal desventaja de este método es que el usuario tiene que encontrar el correcto valor del parámetro de penalidad en una forma relativamente arbitraria, lo que implica sucesivos análisis. Además, utilizando este método aparecen algunas dificultades numéricas en la condición de *stick* debido a la elevada rigidez que se genera en este estado. Esto ocurre debido a que en la ley de fricción de Coulomb, cuando un nodo se encuentra en *stick* su desplazamiento es nulo, lo que corresponde a un valor infinito del coeficiente de penalidad, produciendo un mal condicionamiento de la matriz de rigidez. Además, en el estado de *slip*, no hay dependencia entre el desplazamiento tangencial y la fuerza tangencial de contacto, lo que produce una matriz de rigidez no simétrica.

Estos inconvenientes son superados mediante la utilización de lagrangianos aumentados como los propuestos por Simo y Laursen (1992) y Laursen (1992), donde la fuerza de fricción surge de la utilización de un multiplicador de Lagrange calculado en la iteración previa. La ven-

taja de este método es que los problemas de contacto con fricción están asociados y entonces la matriz de rigidez es simétrica. Esta estrategia se combina con un algoritmo del tipo Uzawa, pero la utilización de este algoritmo presenta la desventaja en los tiempos de cómputo como consecuencia de dos lazos anidados. Además, como se demuestra en el trabajo de [Auricchio y Sacco \(1996\)](#), para problemas de contacto con placas, la formulación [Simo y Laursen \(1992\)](#) puede resultar en una solución que difiere de la exacta. En este trabajo, la solución al proble-

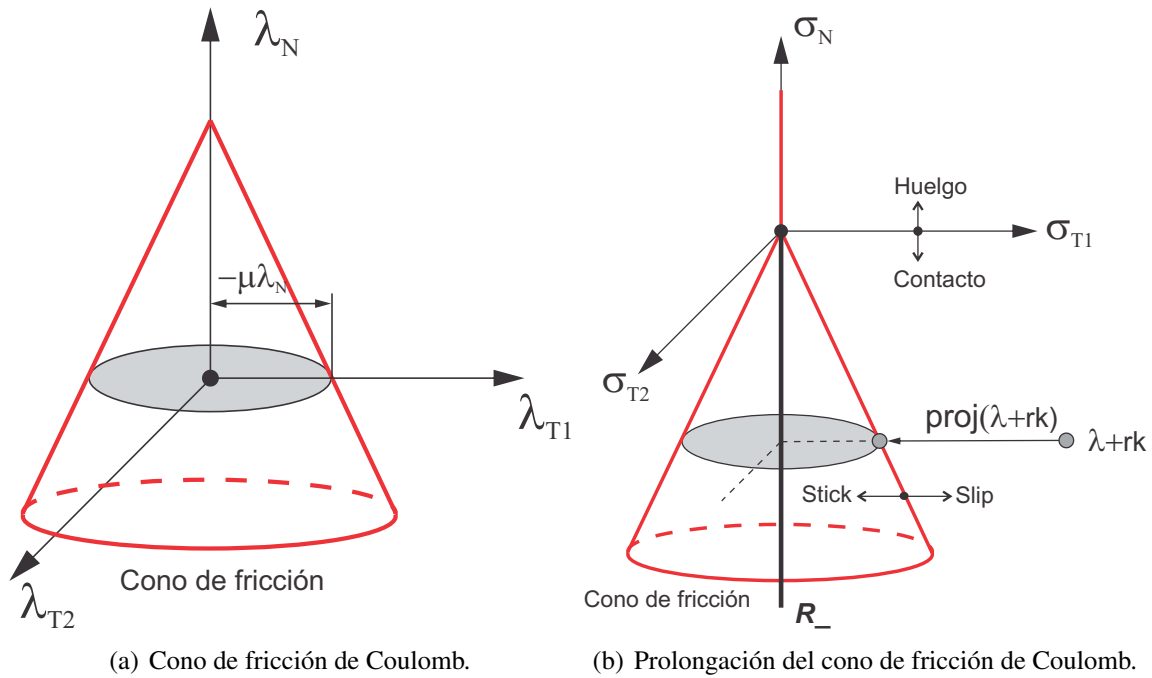


Figura 2: Fricción de Coulomb.

ma de contacto con fricción que se presenta en la Ec.(14), es resuelto como un problema de optimización con restricciones de desigualdad a través de una función del tipo lagrangiana aumentada que resulta en problema de punto de silla, donde los valores que hacen estacionario al funcional se resuelven en cada iteración en solo un lazo.

3. FUNCIÓN LAGRANGIANA AUMENTADA

El problema de contacto con fricción puede ser tratado de manera similar al problema de contacto unilateral que se presenta en el trabajo de [Cavaliere y Cardona \(2013\)](#). En este sentido, las tres primeras restricciones de desigualdad que se muestran en la Ec.(14) pueden ser representadas en forma equivalente como un único sub-diferencial de inclusión

$$\lambda_{NA} \in \partial\Psi_{\mathbf{R}_+}(g_{NA}) \quad (15)$$

donde $\Psi_{\mathbf{R}_+}$ es la función indicador de la mitad de la línea real positiva \mathbf{R}_+ y $\partial\Psi_{\mathbf{R}_+}$ es el sub-diferencial de $\Psi_{\mathbf{R}_+}$. La Ec. (15) expresa las condiciones de contacto unilateral, con un campo de presiones derivado de un potencial no suave $\Psi_{\mathbf{R}_+}(g_{NA})$ ([Alart y Curnier, 1991](#); [Heegaard y Curnier, 1993](#)). En forma análoga para las tres últimas desigualdades referidas a la fricción se tiene

$$\lambda_{TA} \in \partial\Psi_C(g_{TA}), \quad (16)$$

donde $\partial\Psi_C$ es la función indicadora del disco convexo C de radio $-\mu\lambda_{NA}$ centrado en el origen, esto es

$$C(\lambda_{NA}) = \frac{\lambda_{TA}}{\|\lambda_{TA}\|} \leq -\mu\lambda_{NA} \quad (17)$$

y que representa la ley de fricción isotrópica de Coulomb, ver Fig.(2)-a. Para el caso de huelgo, el estado se corresponde al vértice del cono de Coulomb. En caso de *stick*, el estado se encuentra en los puntos interiores al cono, en tanto que para el estado de *slip* el estado se encuentra sobre la superficie del cono.

El problema de la Ec.(14) puede ser regularizado y resuelto utilizando una formulación dual mixta basada en un método lagrangiano aumentado como el que se propone en Alart y Curnier (1991),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}^c(\boldsymbol{\Phi}^e) = & \sum_{A=1}^{m^1} \left(g_{NA}\lambda_{NA} + \frac{r}{2}\|g_{NA}(\mathbf{U})\|^2 - \frac{1}{2r}\text{dist}^2 [\lambda_{NA} + rg_{NA}(\mathbf{U}), R^-] \right. \\ & \left. g_{TA}\lambda_{TA} + \frac{r}{2}\|g_{TA}(\mathbf{U})\|^2 - \frac{1}{2r}\text{dist}^2 [\lambda_{TA} + rg_{TA}(\mathbf{U}), C^{aume}] \right) \end{aligned} \quad (18)$$

donde r es un parámetro de penalidad positivo que influye en la velocidad de convergencia pero no en la solución, $\text{dist}(x, C)$ es la distancia entre x y C y C^{aume} se refiere al conjunto convexo de fricción $C(\lambda_{NA} + rg_{NA})$. La utilización de $C(\lambda_{NA} + rg_{NA})$ corresponde a prolongar el cono de fricción por la mitad de la línea definida sobre la parte positiva del multiplicador aumentado, ver Fig. 2-b, lo que permite definir un conjunto convexo C para valores positivos y, consecuentemente, obtener un problema de contacto sin restricciones que resulta en el lagrangiano de la Ec.(18).

4. DEFINICIÓN DE UN ELEMENTO DE CONTACTO

Un *elemento de contacto* queda definido por el par de caras de aquellos elementos que potencialmente podrían establecer contacto, uno de ellos es el que se corresponde a la superficie no-mortar en tanto que el otro se corresponde a la superficie mortar. Si $N1$ es el número de caras en la superficie γ_c^1 , y $N2$ es el número de caras en la superficie γ_c^2 , esto implica que un total de $N1 \times N2$ elementos serán construidos. Notar que únicamente unos pocos de ellos estarán activos, esto es, aquellos donde la caras no-mortar y mortar encuentren intersección. El vector de coordenadas generalizadas de un elemento de contacto es

$$\boldsymbol{\Phi}^e = [\mathbf{x}_1^1{}^T \ \mathbf{x}_2^1{}^T \ \dots \ \mathbf{x}_{m^1}^1{}^T \ \mathbf{x}_1^2{}^T \ \mathbf{x}_2^2{}^T \ \dots \ \mathbf{x}_{m^2}^2{}^T \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{m^1}]^T, \quad (19)$$

donde m^1 y m^2 es el número de nodos de las caras no-mortar y mortar respectivamente, \mathbf{x}_I^1 son las coordenadas nodales de la cara no-mortar; \mathbf{x}_I^2 son las coordenadas nodales de las caras mortar, y λ_I son los multiplicadores de Lagrange. De este modo el número de grados de libertad para un elemento de contacto es $6m^1 + 3m^2$.

5. VECTOR DE FUERZAS INTERNAS

Como la presión de contacto $\boldsymbol{\lambda}$ depende directamente de la solución, $\boldsymbol{\lambda}$ es también dependiente de el sistema de referencia. Para evitar este inconveniente se define

$$\begin{aligned} \lambda_{NA} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}_A \\ \lambda_{TA} &= \boldsymbol{\lambda} - \lambda_{NA}\boldsymbol{\nu}_A \end{aligned} \quad (20)$$

Finalmente, para simplificar la notación y la interpretación de los estados de contacto, el multiplicador lagrangiano aumentado se escribe de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \sigma_{NA} \boldsymbol{\nu}_A + \boldsymbol{\sigma}_{TA} \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_{NA} &= \lambda_{NA} + r g_{NA} \\ \boldsymbol{\sigma}_{TA} &= \boldsymbol{\lambda}_{TA} + \mathbf{g}_{TA} \end{aligned} \quad (22)$$

El vector de fuerzas internas para un elemento de contacto se obtiene a partir de tomar variaciones en \mathcal{L}^c , ver Ec.(18), de este modo

$$\delta \mathcal{L}^c = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_B^1 \\ \delta \mathbf{x}_C^2 \\ \delta \boldsymbol{\lambda}_A \end{bmatrix} \cdot \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} n_{AB}^1 [\text{proj}_{R^-}(\sigma_{NA}) \boldsymbol{\nu}_A + \text{proj}_{Caume}(\boldsymbol{\sigma}_{TA})] \\ -n_{AC}^2 [\text{proj}_{R^-}(\sigma_{NA}) \boldsymbol{\nu}_A + \text{proj}_{Caume}(\boldsymbol{\sigma}_{TA})] \\ -\frac{1}{r} [\lambda_{NA} - \text{proj}_{R^-}(\sigma_{NA})] \boldsymbol{\nu}_A - \frac{1}{r} [\boldsymbol{\lambda}_{TA} - \text{proj}_{Caume}(\boldsymbol{\sigma}_{TA})] \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde $\text{proj}_{R^-}(x)$ es la proyección de x en R^- . El operador proyección $\text{proj}_C(x)$ definido como

$$\text{proj}_C(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq k, \\ kx/\|x\|, & \text{si } \|x\| > k, \end{cases} \quad (24)$$

permite establecer los estados de contacto, *gap*, *stick* o *slip*.

La condición de $\sigma^n \geq 0$ está asociada a la condición huelgo o *gap*, en este caso, $\text{proj}_{R^-}(\sigma_{NA}) = 0$ y $\text{proj}_{Caume}(\boldsymbol{\sigma}_{TA}) = \mathbf{0}$. Por lo tanto, a partir de la Ec.(23), el vector de fuerzas internas de contacto resulta en,

$$\mathbf{F}_A^{cont} = \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \boldsymbol{\lambda}_A \end{bmatrix} \quad (25)$$

La condición de *stick* está definida cuando $\|\boldsymbol{\sigma}_{TA}\| < -\mu\sigma^n$, en este caso, $\text{proj}_{R^-}(\sigma_{NA}) = \sigma_{NA}$ y $\text{proj}_{Caume}(\boldsymbol{\sigma}_{TA}) = \boldsymbol{\sigma}_{TA}$. Por lo tanto, a partir de la Ec.(23), el vector de fuerzas internas de contacto resulta en,

$$\mathbf{F}_A^{cont} = \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} n_{AB}^1 \boldsymbol{\sigma}_A \\ -n_{AC}^2 \boldsymbol{\sigma}_A \\ \mathbf{g}_A \end{bmatrix} \quad (26)$$

Finalmente, la condición de *slip* está asociada a la condición $\|\boldsymbol{\sigma}_{TA}\| \geq -\mu\sigma^n$, en este caso, $\text{proj}_{R^-}(\sigma_{NA}) = \sigma_{NA}$ y $\text{proj}_{Caume}(\boldsymbol{\sigma}_{TA}) = -\mu\sigma_{NA} \mathbf{t}_A$. Por lo tanto, a partir de la Ec.(23), el vector de fuerzas internas de contacto resulta en,

$$\mathbf{F}_A^{cont} = \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} n_{AB}^1 (\boldsymbol{\nu}_A - \mu \mathbf{t}_A \sigma_{NA}) \\ -n_{AC}^2 (\boldsymbol{\nu}_A - \mu \mathbf{t}_A \sigma_{NA}) \\ \boldsymbol{\nu}_A g_{NA} - \frac{1}{r} (\boldsymbol{\lambda}_{TA} + \mu \sigma_{NA} \mathbf{t}_A) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Aquí, \mathbf{t} se obtiene a partir de la siguiente definición,

$$\mathbf{t}_A = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{TA}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{TA}\|} \quad (28)$$

que representa al vector unitario de deslizamiento tangencial del nodo A .

6. MATRIZ HESSIANA

La linealización de las fuerzas de contacto resulta en la matriz Hessiana de contacto,

- Estado de huelgo $\sigma^n \geq 0$

$$\Delta \mathbf{F}_A^{cont} = \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \Delta \lambda_A \end{bmatrix} \quad (29)$$

- Estado de *stick* $\|\sigma_{TA}\| < -\mu\sigma^n$

$$\Delta \mathbf{F}_A^{cont} = \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} \Delta n_{AB}^1 \sigma_A + n_{AB}^1 \Delta \sigma_A \\ -\Delta n_{AC}^2 \sigma_A - n_{AC}^2 \Delta \sigma_A \\ \Delta \mathbf{g}_A \end{bmatrix} \quad (30)$$

- Estado de *slip* $\|\sigma_{TA}\| \geq -\mu\sigma^n$

$$\Delta \mathbf{F}_A^{cont} = \sum_{A=1}^{m^1} \begin{bmatrix} \Delta n_{AB}^1 (\nu_A - \mu \mathbf{t}_A \sigma_{NA}) + n_{AB}^1 \Delta (\nu_A - \mu \mathbf{t}_A \sigma_{NA}) \\ -\Delta n_{AC}^2 (\nu_A - \mu \mathbf{t}_A \sigma_{NA}) - n_{AC}^2 \Delta (\nu_A - \mu \mathbf{t}_A \sigma_{NA}) \\ \Delta (\nu_A g_{NA} - \frac{1}{r} (\lambda_{TA} + \mu \sigma_{NA} \mathbf{t}_A)) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Las linealizaciones de estas cantidades pueden ser calculadas a partir del trabajo de [Cavaliere y Cardona \(2013\)](#).

7. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Las soluciones obtenidas con el método mortar con fricción en los ejemplos que se presentan en este trabajo se comparan con soluciones de bibliografía.

7.1. Ejemplo de validación

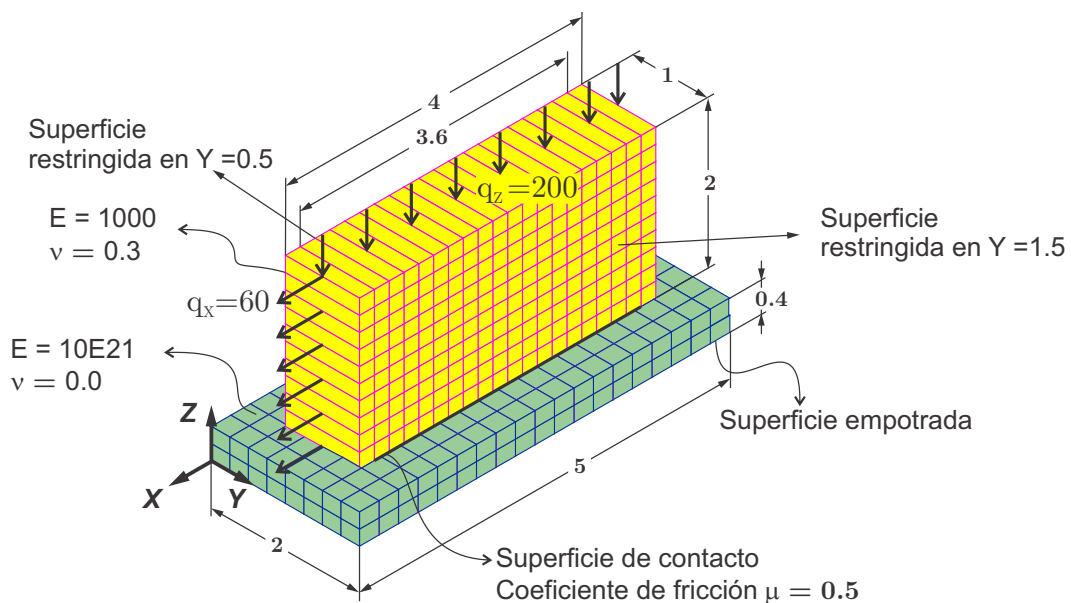
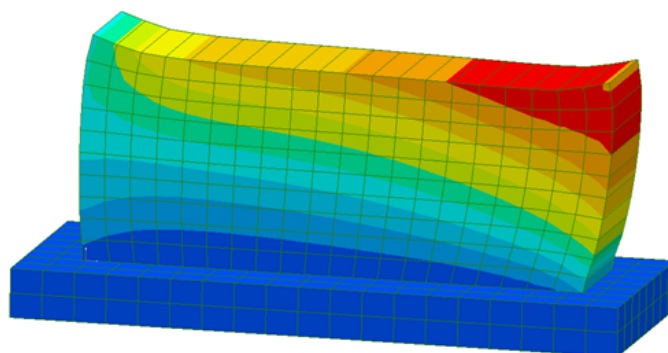


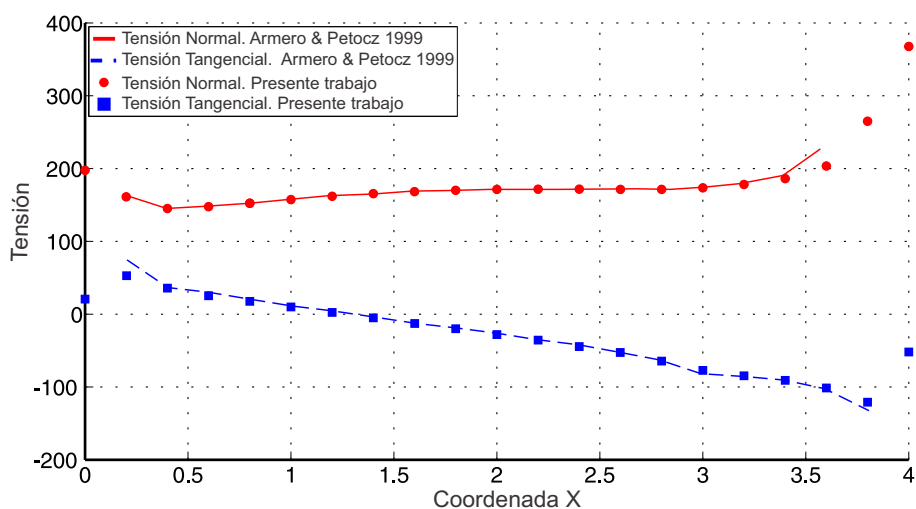
Figura 3: Cuerpo elástico comprimido contra una superficie rígida y traccionado tangencialmente.

Este test representa una validación importante para el análisis de los algoritmos de contacto que contemplan fricción. El ejemplo fue presentado originalmente por [Oden y Pire \(1984\)](#) como un test 2D en tanto que soluciones más recientes pueden encontrarse en [Armero y Petocz \(1999\)](#); [Areias et al. \(2004\)](#); [Cavaliere y Cardona \(2012\)](#) utilizando métodos nodo-segmento. Aquí se comparan resultados tridimensionales mediante la introducción de un estado plano de deformación que reproduce las mismas condiciones de borde que en el trabajo de [Armero y Petocz \(1999\)](#). La topología de la malla, condiciones de borde y propiedades del material utilizado en la simulación se muestran en la Fig. 3. El comportamiento del material es elástico lineal. Para el cuerpo superior, se empleó una malla con 462 nodos y 200 elementos hexaédricos. La zona de contacto evaluada es la que se acota con una distancia de 3,6, tal como se muestra en la Fig.3. Una presión uniforme $q_z = 200$ actúa sobre la superficie superior del cuerpo, produciendo una deformación contra la fundación rígida. Luego, otra presión $q_x = 60$ actúa sobre un lado del cuerpo, empujándolo en la dirección X .

La configuración deformada se muestra en la Fig. 4-a, donde se puede ver el mismo patrón de deformación que en [Armero y Petocz \(1999\)](#). La Fig. 4-b muestra una comparación de los resultados en términos de las tensiones normales y tangenciales en la interfase de contacto presentando muy buena correlación con los resultados de [Armero y Petocz \(1999\)](#).



(a) Desplazamientos nodales



(b) Variación de la tensión normal y tangencial en la interfase de contacto. Comparación con los resultados de [Armero y Petocz \(1999\)](#).

Figura 4: Soluciones numéricas.

7.2. Ejemplo con grandes deslizamientos

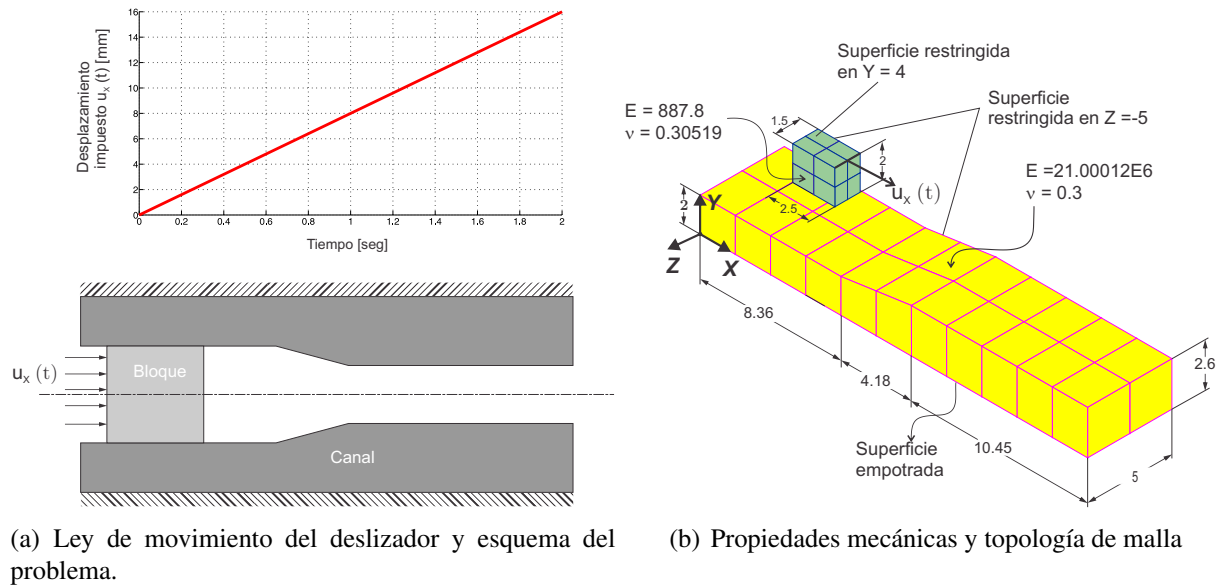


Figura 5: Deslizador que se presiona contra un canal.

El uso de algoritmos de contacto del tipo nodo segmento, a menudo causa problemas de pérdida de convergencia o distorsiones de los elementos debido a bloqueos. Asimismo, cuando las superficies de contacto discretizadas incluyen esquinas o grandes curvaturas en combinación con grandes desplazamientos, estos problemas son más evidentes. Esto se debe a que las fuerzas de reacción aparecen espontáneamente y son altamente concentradas en esas pequeñas áreas (Fischer y Wriggers, 2006). Una forma de evitar estos inconvenientes es a través de algoritmos de contacto que suavizan las superficies, por ejemplo, a través de funciones C1 (Stadler y Holzapfel, 2004). Sin embargo, es importante notar que una formulación nodo-segmento con elementos sólidos de alto orden y suavizado produce oscilaciones de las tensiones de contacto. Además, a pesar del suavizado, estos algoritmos no superan los test de la parcela de contacto (Cavaliere, 2010). La formulación mortero reduce los efectos de estas singularidades como se demostrará en este trabajo.

El ejemplo que aquí se presenta, consiste de un deslizador que es presionado contra un canal que posee esquinas, ver Fig. 5-a. Una penetración inicial de 1 mm entre el deslizador y el canal es propuesta para introducir una presión normal inicial. El proceso de presionado es simulado con un desplazamiento uniforme aplicado en 20 pasos de tiempo de izquierda a derecha, ver Fig. 5-a. El deslizador cubre una distancia máxima de 16 m. La Fig. 5-b muestra la topología de la malla y propiedades mecánicas del ejemplo. La fricción es modelada con una ley de Coulomb y un coeficiente de fricción de $\mu = 0,1$. Debido a la simetría del problema, solo un cuarto del problema es modelado. El deslizador representa el lado no mortero y el lado mortero es dado por el canal de acero.

La Fig. 6 muestra la evolución del deslizador a lo largo del tiempo junto con las presiones del contacto representadas por vectores. Notar que el deslizador pudo moverse sobre el canal sin problemas, sin evidenciar oscilaciones de las presiones de contacto.

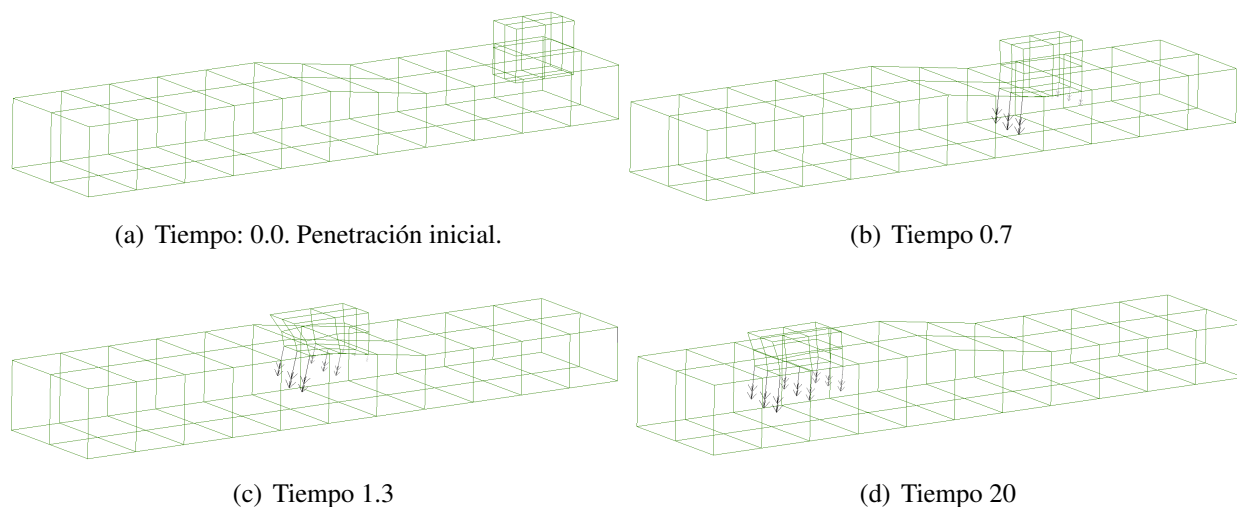


Figura 6: Ejemplo con grandes deslizamientos. Deformación y presiones de contacto vs. tiempo.

8. CONCLUSIONES

Un nuevo elemento finito de contacto basado en una descripción mortar y combinado con un lagrangiano aumentado ha sido propuesto para la solución de problemas de contacto con fricción y deformaciones finitas. El algoritmo presenta tres características: las ecuaciones se resuelven en un esquema monolítico, es aplicable a problemas con mallas no conformes y el usuario no tiene la necesidad de definir ningún parámetro de penalidad como se muestra a través de los ejemplos presentados.

En este trabajo se han presentado las ecuaciones para el cómputo del vector de fuerza interna y la matriz Hessiana. Esta estrategia puede ser implementada muy fácilmente en un código de elementos finitos para análisis no lineal, sin la necesidad de reformular la estructura principal del código. Los ejemplos numéricos muestran la capacidad del algoritmo para representar problemas con grandes grandes desplazamientos.

9. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y Universidad Nacional del Litoral (CAI+D 2009 PI65-330).

REFERENCIAS

- P. Alart y A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Math.*, 92:353–375, 1991.
- P. M. A. Areias, J. M. A. César de Sá, y C. A. Conceição António. Algorithms for the analysis of 3D finite strain contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:1107–1151, 2004.
- F. Armero y E. Petocz. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179:151–178, 1999.
- F. Auricchio y E. Sacco. Augmented lagrangian finite elements for plate contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:4141–4158, 1996.
- C. Bernardi, Y. Maday, y A.T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposi-

- tion: The mortar element method. In J.L. Lions (Eds.) H. Brezia, editor, *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, pages 13–51. Pitman and Wiley, 1992.
- F. Brezzi y M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Verlag, New York, 1991.
- F. Cavalieri. *Multiaxial Fatigue and Wear Design in Mechanical Components at High Temperature*. Thesis, Universidad Nacional del Litoral, <http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/tesis/handle/1/200>, 2010.
- F. Cavalieri y A. Cardona. An augmented lagrangian method to solve 3D contact problems. *Latin American Applied Research*, 42(201):281–289, 2012.
- F. Cavalieri y A. Cardona. An augmented lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems. 93(27):420–442, 2013.
- F. Cavalieri, V. Fachinotti, y A. Cardona. A mortar contact algorithm for three-dimensional elasticity problems. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 28(2):80–92, 2012.
- T. Cichosz y M. Bischoff. Consistent treatment of boundaries with mortar contact formulations using dual lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12):1317 – 1332, 2011. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510003087>.
- L. De Lorenzis, Temizer, P. Wriggers, y G. Zavarise. A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(13):1278–1300, 2011. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.3159>.
- N. EI-Abbasi y K.J. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computer and Structures*, 79:1473–1486, 2001.
- S.K. Esche, G.L. Kinzel, y T. Altan. Issues in convergence improvement for non-linear finite element programs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4577–4594, 1997.
- K.A. Fischer y P. Wriggers. Frictionless 2D contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *Computational Mechanics*, 36(3):226–244, 2005. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-005-0660-y>.
- K.A. Fischer y P. Wriggers. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:5020–5036, 2006.
- P. Gamez-Montero, F. Zárate, M. Sánchez, R. Castilla, y E. Codina. El problema del contacto en bombas de engranajes de perfil troncooidal. *Métodos numéricos para el calculo y diseño de ingeniería*, 21:213–229, 2005.
- A.E. Giannakopoulos. The radial mapping method for the integration of friction constitutive relations. *Computer and Structures*, 6:281–290, 1989.
- M. Gitterle, A Popp, M.W. Gee, y Wolfgang A. W. Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth newton method with consistent linearization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(5):543–571, 2010. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2907>.
- S. Hartmann, J. Oliver, R. Weyler, J.C. Cante, y J.A. Hernández. A contact domain method for large deformation frictional contact problems. part 2: Numerical aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33-36):2607 – 2631, 2009. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509001297>.
- S. Hartmann y E. Ramm. A mortar based contact formulation for non-linear dynamics using

- dual lagrange multipliers. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44:245–258, 2008.
- S. Hüeber y B.I. Wohlmuth. A primal dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(27-29): 3147 – 3166, 2005. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504004402>.
- S. Hüeber y B.I. Wohlmuth. Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(15-16):1338 – 1350, 2009. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782508004246>.
- J.H. Heegaard y A. Curnier. An augmented Lagrangian method for discrete large slip contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:569–593, 1993.
- P. Heintz y P. Hansbo. Stabilized lagrange multiplier methods for bilateral elastic contact with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36):4323 – 4333, 2006. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505004238>.
- C. Hesch y P. Betsch. Transient three-dimensional domain decomposition problems: Frame-indifferent mortar constraints and conserving integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(3):329–358, 2010. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2767>.
- C. Hesch y P. Betsch. Transient three-dimensional contact problems: mortar method. mixed methods and conserving integration. *Computational Mechanics*, 48(4):461–475, 2011. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-011-0583-8>.
- S. Hüeber, M. Mair, y B. I. Wohlmuth. A priori error estimates and an inexact primal-dual active set strategy for linear and quadratic finite elements applied to multibody contact problems. *Appl. Numer. Math.*, 54(3-4):555–576, August 2005. ISSN 0168-9274. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2004.09.019>.
- K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- R.E. Jones y P. Papadopoulos. A novel three-dimensional contact finite element based on smooth pressure interpolations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(7):791–811, 2001. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.163>.
- J. Kim y S. Youn. Isogeometric contact analysis using mortar method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(12):1559–1581, 2012. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.3300>.
- T.A. Laursen. *Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements*. Phd thesis, Stanford University, USA, 1992.
- T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer: Berlin, Heidelberg, 2002.
- L. Lorenzis, P. Wriggers, y G. Zavarise. A mortar formulation for 3D large deformation contact using nurbs-based isogeometric analysis and the augmented lagrangian method. *Computational Mechanics*, 49(1):1–20, 2012. ISSN 0178-7675. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-011-0623-4>.
- T. W. McDevitt y T. A. Laursen. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(10):1525–1547, 2000. ISSN 1097-0207. URL [http://dx.doi.org/10.1002/1097-0207\(20000810\)48:10<1525::AID-NME953>3.0.CO;2-Y](http://dx.doi.org/10.1002/1097-0207(20000810)48:10<1525::AID-NME953>3.0.CO;2-Y).
- J.I. Moreau. Application of convex analysis to some problems of dry friction. In H. Zorski, editor, *Trends of pure mathematics applied to mechanics*, volume 11, Pitma, London, 1979.

- J.T. Oden y E.B. Pire. Algorithms and numerical results for finite element approximation of contact problems with non-classical friction laws. *Computer and structures*, 19:137:147, 1984.
- J. Oliver, S. Hartmann, J.C. Cante, R. Weyler, y J.A. Hernández. A contact domain method for large deformation frictional contact problems. part 1: Theoretical basis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33-36):2591 – 2606, 2009. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578250900125X>.
- P. Papadopoulos y J.M. Solberg. A lagrange multiplier method for the finite element solution of frictionless contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8): 373 – 384, 1998. ISSN 0895-7177. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717798001289>. Recent Advances in Contact Mechanics.
- P. Papadopoulos y R.L. Taylor. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. Technical Report UCB/ SEMM Report 90/18, University of California at Berkeley, 1990.
- A. Popp, M.W. Gee, y W. A. Wall. A finite deformation mortar contact formulation using a primal dual active set strategy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1354–1391, 2009. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2614>.
- A. Popp, M. Gitterle, M. W. Gee, y W.A. Wall. A dual mortar approach for 3d finite deformation contact with consistent linearization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(11):1428–1465, 2010. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2866>.
- M. Puso. A 3D mortar method for solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:315–336, 2004.
- M. Puso y T.A Laursen. A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:4891–4913, 2004a.
- M.A. Puso y T.A. Laursen. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193: 601 – 629, 2004b. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782503005802>.
- J. C. Simo y T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- J.C. Simo y T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comput. Struct.*, 42:97–116, 1992.
- J.M. Solberg, R.E. Jones, y P. Papadopoulos. A family of simple two-pass dual formulations for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4-6):782 – 802, 2007. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782506002210>.
- J.M. Solberg y P. Papadopoulos. An analysis of dual formulations for the finite element solution of two-body contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(25-26):2734 – 2780, 2005. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578250400386X>.
- M. Stadler y G. A. Holzapfel. Subdivision schemes for smooth contact surfaces of arbitrary mesh topology in 3d. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(7): 1161–1195, 2004. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1001>.
- A. Temizer. A mixed formulation of mortar-based frictionless contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 223-224(0):173 – 185, 2012. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578251200059X>.
- A. Temizer. A mixed formulation of mortar-based contact with friction. *Computer Methods*

- in Applied Mechanics and Engineering*, 255(0):183 – 195, 2013. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512003714>.
- A. Temizer, P. Wriggers, y J.T.J.R. Hughes. Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212(0):115 – 128, 2012. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511003355>.
- M. Tur, F.J. Fuenmayor, y P. Wriggers. A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37-40):2860 – 2873, 2009. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509001595>.
- B. Wohlmuth. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38, 1998.
- P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley and Sons, New York, 2002.
- B. Yang, T.A. Laursen, y X. Meng. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62: 1183–1225, 2005.
- F. Zenklusen, F. Cavalieri, A. Cardona, J. Risso, y C. Luengo. Numerical and experimental stress analysis of an internal combustion engine valve during the closing event. In SAE International, editor, *SAE International, Proceedings 21st SAE Brasil International Congress and Exhibition Mobility Technology*, San Pablo, Brasil, October 2012. paper 36-0491.