

## LOSAS FLOTANTES PARA ATENUACIÓN DE VIBRACIONES INDUCIDAS POR CARGAS MÓVILES

**José E. Stuardi, Raúl Ritta y Pablo Filoni**

*Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba,  
Av. Velez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, jstuardi@gmail.com.ar*

**Palabras claves:** losas flotantes, vibraciones, vías férreas.

**Resumen.** La construcción de losas flotantes es un método utilizado para el control de vibraciones generadas por cargas móviles, como tránsito automotor o férreo. El problema de vibraciones es especialmente sensible en túneles de subterráneos, o en vías construidas sobre viaductos, por el aumento de sus propias vibraciones, propagación de ondas en el suelo y consecuente perturbación en las edificaciones próximas. El problema general presenta cierta complejidad, debido a la presencia de cargas móviles, interacción, propagación de ondas y radiación de energía hacia las fronteras infinitas del suelo, entre otros. Debido a estas causas, los resultados de las investigaciones han sido obtenidos usando diversos modelos simplificados o idealizados de distinta forma, o considerando condiciones que conlleven a problemas factibles de solución. El objetivo del presente trabajo es el estudio del comportamiento dinámico de losas flotantes utilizadas para tráfico férreo sobre fundaciones rígidas. El modelo contempla una viga continua para los rieles, los que apoyan en forma elástica sobre la losa flotante. Esta última es modelada como otra viga continua apoyada sobre elementos elásticos provistos de amortiguamiento. El medio rodante es tenido en cuenta mediante una carga armónica que se mueve con una velocidad especificada y en contacto con las vías. Lo anteriormente descripto conduce a un sistema de ecuaciones acopladas que son resueltas en forma numérica en el dominio del número de onda-frecuencia. A partir de la formulación es posible el análisis de curvas de dispersión, velocidades críticas, transmisibilidades y desplazamientos y fuerzas dinámicas máximas en la interfaz rueda-riel. Los resultados obtenidos en un caso de prueba muestran la consistencia de la formulación y del modelo, mientras que la solución numérica es de bajo costo computacional.

## 1 INTRODUCCIÓN

La dinámica de sistemas férreos es motivo de estudio desde hace décadas. El sistema férreo abarca desde el vehículo rodante hasta el suelo y cada parte de su cadena de componentes posee particularidades y condicionamientos específicos. Cabe citar a las masas suspendidas y no suspendidas del vehículo, comprendiendo además ruedas, rieles, durmientes, pads de aislamiento en placas de apoyo de riel y durmientes, fijaciones y estructura de apoyo. Esta última está normalmente constituida por balasto o construcciones de losas flotantes, que descansan sobre el suelo de fundación, el que posee propiedades que varían normalmente a lo largo de los kilómetros de vía. La complejidad de cada parte de la cadena del sistema y la diversidad de enfoques en el estudio es grande, contemplando diversos análisis en función del diferente tipo de excitación o el propósito del estudio, que puede basarse en aspectos tan diferentes como la dinámica del vehículo, la protección ambiental o en ambos simultáneamente, como el caso del ruido generado por el contacto rueda-riel.

Respecto de las excitaciones, se puede citar en primer lugar al pasaje de las cargas estáticas de los ejes. Esta carga resulta importante para el análisis de vías y sistema circundante, sin presentar mayor importancia en relación con la propagación de ondas en el suelo, por ejemplo. Otra causa de excitación la constituyen las irregularidades del sistema de vías, lo que explica la presencia de vibraciones en frecuencias medias, también asociadas con las vibraciones generadas por las irregularidades del terreno encontradas al pasar las ruedas del tren.

Las irregularidades presentes en el vehículo, especialmente defectos en la concentricidad de ruedas o la formación de planos generados por el desgaste irregular de la superficie de rodadura, conducen a vibraciones de alta frecuencia, debido a la relativamente alta velocidad de giro de las ruedas. En este mismo grupo se citan a las interrupciones en la continuidad de rieles, es decir juntas o cruces. Aumenta de esta forma la emisión de ruido, también generado por la rugosidad o las irregularidades a menor escala presentes en la rueda y el riel.

Finalmente las vibraciones también pueden ser causadas por las variaciones de rigidez del sistema de vías generada por el apoyo de los rieles sobre durmientes. La rueda experimenta así una rigidez de apoyo que varía en forma periódica con el paso de los durmientes. Como consecuencia de este fenómeno, la fuerza de interacción varía periódicamente y el sistema encuentra una excitación, cuya frecuencia fundamental es la de paso de durmientes.

El problema dinámico posee múltiples aristas, debido a la presencia de cargas móviles, interacción, propagación de ondas y radiación de energía hacia las fronteras infinitas del suelo, etc. Por ello las investigaciones se han basado en diversos modelos simplificados, que consideran condiciones que conllevan a problemas factibles de solución en la práctica.

Para mitigar problemas de vibraciones en áreas sensibles o generadas por trenes de alta velocidad, se recurre actualmente a soluciones basadas en losas flotantes; dispositivos que se utilizaron por primera vez en el sistema de tránsito rápido de Washington DC en los años 70. Desde los años 80 y 90 la investigación asociada al comportamiento dinámico de estos sistemas ha adquirido especial relevancia. El primer trabajo significativo donde se reporta el estudio de una viga sobre fundación elástica pertenece a Winkler y se remonta al año 1867 (Fryba, 1995). En la primera mitad del siglo 20 aparecieron algunos trabajos que tratan el problema de vibración generada por cargas armónicas sobre vigas sin amortiguamiento. Las vibraciones en una viga sobre fundación elástica sometida a una carga armónica en movimiento fue considerada en los trabajos de Mathews (1958, 1959) y ampliada por Duffy (1990), quien utiliza la transformada de Fourier en la modelación del espacio y la de Laplace en el tiempo. Los primeros trabajos citando vigas dobles, con una capa de material elástico entre ellas, corresponden a la década del 70, aunque aquellos con alguna aplicabilidad al sistema de vías aparecieron recién hace algo más de una década atrás (Cui and Chew, 2000; Chen and Shiu, 2004).

Dentro de los trabajos más recientes cabe citar aquellos basados en modelos continuos y los que utilizan una discretización por elementos finitos en una o varias dimensiones del espacio de solución. Dentro del primer grupo se encuentran modelos lineales (Hussein and Hunt, 2006) resueltos en el dominio del número de onda-frecuencia y modelos no lineales (Kuo *et al.*, 2008) resueltos por integración numérica en el dominio del tiempo.

La atenuación de losas flotantes fue evaluada mediante elementos finitos por Crockett and Pyke, (2000) y mediante un modelo 3D por Hussein and Hunt (2003). La eficiencia de los sistemas de losas flotantes fue analizada por Lombaert *et al.* (2006) encontrando que los modelos más simples sobreestiman las atenuaciones a bajas frecuencias. Es conocido el hecho de que las bajas frecuencias son amplificadas lo que incrementa las vibraciones en baja frecuencia. Hui (2009) comparó la performance de variados sistemas de aislamiento aplicados en viaductos mostrando que más allá de las frecuencias verticales de las losas, sus frecuencias flexionales deterioran la transmisibilidad. Este hecho ya había sido comprobado experimentalmente el año anterior por Saurenman and Phillips (2006). Ambos trabajos coinciden en un diseño consensuado donde se evitan resonancias con la frecuencia propia de la vía, con las frecuencias flexionales de las losas y de la estructura de soporte, incluyendo frecuencias propias de los pads elásticos y del sistema de balasto, si correspondiese. Respecto de la frecuencias propias de las losas, varían dependiendo del sistema elástico utilizado, entre 5 Hz con aisladores resorte-amortiguador viscoso hasta 16-20 Hz para el caso de elastómeros, dependiendo además de que se utilice un sistema de losas discretas o continuas.

El presente trabajo considera un modelo lineal de vías y losas flotantes continuo. El sistema está compuesto por un modelo del tren que incluye masa suspendida y no suspendida, rieles, pads elásticos de rieles, losa flotante y sistema de aislamiento sobre suelo rígido. Las ecuaciones diferenciales planteadas pueden ser resueltas en el dominio de la onda y de la frecuencia en forma analítica, mientras que los resultados explícitos en el dominio del espacio y tiempo deben ser necesariamente obtenidos por medio de una discretización numérica. Se utiliza la técnica de subestructuración, obteniendo por una parte flexibilidades dinámicas del sistema riel-losa y por otra la flexibilidad de la rueda como parte del vehículo. Ambas subestructuras son acopladas en el contacto rueda-riel, especificando la fuerza de contacto como variable de estudio. En la primera parte de este trabajo se describe el modelo y la solución utilizada, luego se realiza un análisis de la forma de la solución teniendo en consideración de las relaciones de dispersión de la vía y componentes. Posteriormente se estudia el desplazamiento y la fuerza de interacción rueda-riel para distintas configuraciones y tipos de cargas.

## 2 MODELO DEL SISTEMA VEHÍCULO-VÍA

El modelo contempla masas rígidas unidas por medios elásticos, ya que la flexibilidad propia de los componentes individuales puede ser despreciada en este análisis. Tanto para el riel como para las losas flotantes utilizamos vigas del tipo Euler-Bernoulli, despreciando las deformaciones por corte porque se ha mostrado que son relativamente pequeñas (Knothe *et al.*, 1995). Se considera suelo rígido en virtud de la gran diferencia entre las frecuencias propias de las losas flotantes y la del suelo de fundación. Mientras que en algunos modelos se considera de manera muy simplificada la carga bajo la forma de una fuerza pseudo estática, en este caso se modela la interacción con el vehículo en forma sencilla. Ya que a efectos del modelo interesa sólo la rigidez dinámica de la rueda que se conecta con el riel, se utiliza un modelo de 'quarter car' del tren, considerando una masa suspendida (índice *c* de *car body*) y una masa no suspendida de la rueda y accesorios (índice *w* de *wheel*), ver Figura 1. Los datos de la vía consistente en riel (índice *r*) y losa flotante (índice *s* de *slab*) corresponden al trabajo ya citado de Hussein and Hunt, (2006), mientras que las propiedades de los pads de placa de riel, rigidez y amortiguamiento, se presentan ya en forma específica divididos por la distancia entre apoyos para ser utilizados en el modelo continuo. Los datos del modelo se dan en la Tabla 1.

$m_c$ [kg]	$k_c$ [N/m]	$c_c$ [Ns/m]	$m_w$ [kg]	$k_r$ [N/m <sup>2</sup> ]	$m_r$ [kg/m]	$EI_r$ [Nm <sup>2</sup> ]	$c_r$ [Ns/m <sup>2</sup> ]	$m_s$ [kg/m]	$EI_s$ [Nm <sup>2</sup> ]	$k_s$ [N/m <sup>2</sup> ]	$c_s$ [Ns/m <sup>2</sup> ]
19400	$6,11 \times 10^6$	158000	1000	$4 \times 10^7$	100	$10^7$	6000	3500	$1,43 \times 10^9$	$5 \times 10^7$	40000

Tabla 1: Datos del sistema compuesto por tren, rueda, riel y losa flotante de la Figura 1

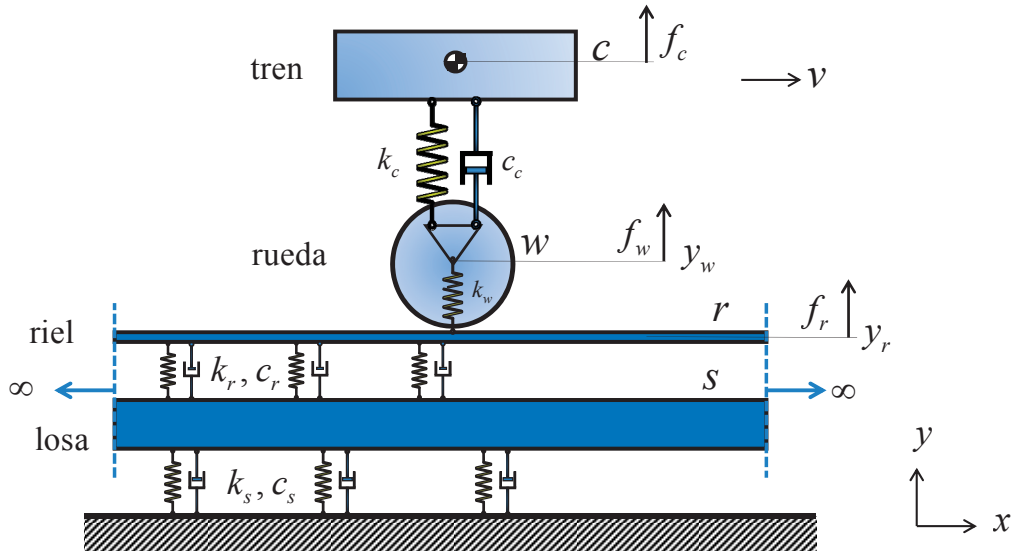


Figura 1: Sistema compuesto por tren, rueda, riel y losa flotante

## 2.1 Ecuaciones de movimiento

Se considera que el tren avanza con una velocidad  $v$  según el eje coordenado 'x' mientras que el movimiento vertical de las masas se describe en el eje 'y'. A continuación se detallan las ecuaciones de movimiento del sistema que abarca a las masas puntuales suspendida y no suspendida del tren por un lado, lo que constituye el sistema móvil. Por otro lado, se analizan las ecuaciones rectoras del sistema fijo que comprende el riel y la losa flotante apoyada sobre suelo rígido. Este sistema se caracteriza por su extensión continua en la dirección horizontal.

### 2.1.1 Ecuaciones del material rodante

Las ecuaciones del sistema formado por la masa del tren y rueda pueden ser escritas en el dominio de la frecuencia de la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_c(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_c(\omega) \\ \hat{y}_w(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_c + i\omega c_c - \omega^2 m_c & -k_c - i\omega c_c \\ -k_c - i\omega c_c & k_w - \omega^2 m_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_c \\ \hat{y}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_c \\ \hat{f}_w \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $k$ ,  $c$ ,  $m$  son respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la masa, mientras que 'y' es el desplazamiento vertical, además todas las variables corresponden a los elementos indicados con los subíndices agregados.  $[\hat{K}_c(\omega)]$  es la rigidez dinámica del tren en el dominio de la frecuencia. Para mejorar la claridad, las variables expresadas en este dominio son afectadas de un supraíndice ( $\hat{\phantom{x}}$ ). Las fuerzas  $f$  son cargas externas aplicadas sobre la masa suspendida del tren ( $f_c$ ) o de la rueda ( $f_w$ ) o eventualmente del riel ( $f_r$ ).

De la Ec. (1) es posible despejar el desplazamiento de la rueda como

$$\hat{y}_w(\omega) = \frac{(k_c + i\omega c_c - \omega^2 m_c) \hat{f}_w + (k_c + i\omega c_c) \hat{f}_c}{\det(\hat{K}_c)} \quad (2)$$

lo que puede ser escrito como

$$\hat{y}_w(\omega) = \hat{H}_{ww}\hat{f}_w + \hat{H}_{wc}\hat{f}_c \tag{3}$$

de donde es posible explicitar las flexibilidades dinámicas de la rueda como:

$$\hat{H}_{ww} = (k_c + i\omega c_c - \omega^2 m_c) / \det(\hat{K}_c) \quad \hat{H}_{wc} = (k_c + i\omega c_c) / \det(\hat{K}_c) \tag{4}$$

### 2.1.2 Ecuaciones del sistema de vías

Considerando vigas del tipo Euler-Bernoulli, las ecuaciones de la vía y de la losa flotante pueden ser planteadas en primera instancia en el dominio del espacio-tiempo

$$\begin{aligned} EI_r \frac{\partial^4 y_r}{\partial x^4} + k_r (y_r - y_s) + c_r \left( \frac{\partial y_r}{\partial t} - \frac{\partial y_s}{\partial t} \right) + m_r \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} &= f_r(x, t) \\ EI_s \frac{\partial^4 y_s}{\partial x^4} + k_s y_s + k_r (y_s - y_r) + c_s \frac{\partial y_s}{\partial t} + c_r \left( \frac{\partial y_s}{\partial t} - \frac{\partial y_r}{\partial t} \right) + m_s \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

donde  $EI$  es la rigidez flexional del riel o losa flotante según su subíndice y tanto las rigideces, los coeficientes de amortiguamiento y la masas son propiedades específicas por unidad de longitud. Se calcula la respuesta para una componente armónica genérica, de frecuencia excitatriz  $\omega_e$  y de amplitud  $\hat{f}_r(\omega_e)$ , de la carga total aplicada sobre la vía, la que viaja con una velocidad  $v$  en la dirección de la coordenada  $x$  positiva del sistema. Esta fuerza puede ser expresada en coordenadas fijas al sistema utilizando la función delta de Dirac,  $\delta$ , como

$$f_r(x, t) = \hat{f}_r(\omega_e) e^{i\omega_e t} \delta(x - vt) \tag{6}$$

Las ecuaciones anteriores son doblemente transformadas desde el dominio del espacio-tiempo  $(x, t)$  al dominio del número de onda-frecuencia  $(\xi, \omega)$  partiendo de las relaciones siguientes

$$\tilde{y}_i(\xi, \omega) = y_i(x, t) e^{-i\omega t} e^{-i\xi x} \quad (i = r, s) \tag{7}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} EI_r \xi^4 \tilde{y}_r + k_r (\tilde{y}_r - \tilde{y}_s) + i\omega c_r (\tilde{y}_r - \tilde{y}_s) - \omega^2 m_r \tilde{y}_r &= \tilde{f}_r(\xi, \omega) \\ EI_s \xi^4 \tilde{y}_s + k_s \tilde{y}_s + k_r (\tilde{y}_s - \tilde{y}_r) + i\omega c_s \tilde{y}_s + i\omega c_r (\tilde{y}_s - \tilde{y}_r) - \omega^2 m_s \tilde{y}_s &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

donde la doble transformada de Fourier de la carga aplicada sobre el riel se calcula como

$$\tilde{f}_r(\xi, \omega) = \hat{f}_r(\omega_e) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - vt) e^{i\omega_e t} e^{-i\omega t} e^{-i\xi x} dx dt = \hat{f}_r(\omega_e) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_e + \xi v)t} dt \tag{9}$$

de modo que: 
$$\tilde{f}_r(\xi, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_e + \xi v) \hat{f}_r(\omega_e) \tag{10}$$

Las Ecs. (8) pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\tilde{K}_{rs} \begin{bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \delta(\omega - \omega_e + \xi v) \hat{f}_r(\omega_e) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

donde

$$\tilde{K}_{rs} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_r \xi^4 + k_r + i\omega c_r - \omega^2 m_r & -k_r - i\omega c_r \\ -k_r - i\omega c_r & EI_s \xi^4 + k_r + k_s + i\omega(c_r + c_s) - \omega^2 m_s \end{bmatrix} \tag{12}$$

y los desplazamientos resultan

$$\tilde{y}_r(\xi, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_e + \xi v) \frac{k_{22}}{\det(K)} \hat{f}_r(\omega_e) \quad \tilde{y}_s(\xi, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_e + \xi v) \frac{-k_{12}}{\det(K)} \hat{f}_r(\omega_e) \quad (13)$$

Antitransformando las ecuaciones anteriores al dominio del número de onda-tiempo se tiene

$$\bar{y}_r(\xi, t) = \left[ \frac{k_{22}}{\det(K)} \right]_{\omega=\omega_e-\xi v} e^{i(\omega_e-\xi v)t} \hat{f}_r(\omega_e) \quad \bar{y}_s(\xi, t) = \left[ \frac{-k_{12}}{\det(K)} \right]_{\omega=\omega_e-\xi v} e^{i(\omega_e-\xi v)t} \hat{f}_r(\omega_e) \quad (14)$$

Una nueva transformación del dominio del número de onda al espacio resulta en

$$y_r(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k_{22}/\det(K)]_{\omega=\omega_e-\xi v} e^{i(\omega_e-\xi v)t} e^{i\xi x} d\xi \hat{f}_r(\omega_e) \quad (15)$$

o bien,

$$y_r(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [k_{22}/\det(K)]_{\omega=\omega_e-\xi v} e^{i\xi(x-vt)} d\xi \right\} e^{i\omega_e t} \hat{f}_r(\omega_e) \quad (16)$$

$$y_s(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [-k_{12}/\det(K)]_{\omega=\omega_e-\xi v} e^{i\xi(x-vt)} d\xi \right\} e^{i\omega_e t} \hat{f}_r(\omega_e) \quad (17)$$

A partir de la Ec. (16) es posible calcular la flexibilidad dinámica del riel que es vista por la rueda (que corresponde a un sistema de referencia móvil, es decir  $x = vt$ ) como:

$$\hat{H}_r(\omega_e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k_{22}/\det(K)]_{\omega=\omega_e-\xi v} d\xi \quad (18)$$

por lo que 
$$\hat{y}_r(\omega_e) = \hat{H}_r(\omega_e) \hat{f}_r(\omega_e) \quad (19)$$

La Ec. (18) puede ser integrada en forma numérica para valores discretos y reales del número de onda y la flexibilidad dinámica en el sistema móvil será utilizada para ser acoplada con el resto del sistema. Las Ecs. (16) y (17) proveen la respuesta de riel y losa flotante en el sistema de referencia fijo, lo que será utilizado más adelante en el análisis de la respuesta.

### 2.1.3 Acoplamiento de ecuaciones subestructuradas

El sistema de la vía y del tren y la rueda son ahora acoplados por medio de una elasticidad proveniente del contacto rueda-riel, modelado como una rigidez  $k_w$  de valor relativamente alto, ver Figura 2.

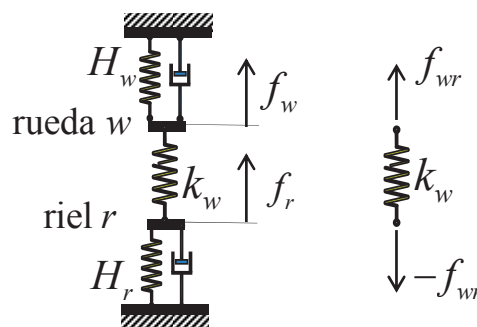


Figura 2: Acoplamiento de ecuaciones explicitando la fuerza de interacción rueda-riel

El sistema de ecuaciones para los nodos  $w$  y  $r$  puede ser escrito a partir de la matriz de rigidez del elemento resorte y adicionando las rigideces dinámicas calculadas a partir de las

Ecs. (4) y (18) y considerando  $\hat{f}_w$  y  $\hat{f}_r$  como cargas externas

$$\begin{bmatrix} k_w + \hat{H}_{ww}^{-1} & -k_w \\ -k_w & k_w + \hat{H}_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_w \\ \hat{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_w \\ \hat{f}_r \end{bmatrix} \quad (20)$$

Explicitando ahora que el resorte rueda-riel tiene una carga de interacción  $\hat{f}_{wr}$

$$\begin{bmatrix} k_w & -k_w \\ -k_w & k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_w \\ \hat{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{wr} \\ -\hat{f}_{wr} \end{bmatrix} \quad (21)$$

El desplazamiento de la rueda se calcula a partir de las ecuaciones (20) y (21) como:

$$\hat{y}_w = \hat{H}_{ww} (\hat{f}_w - \hat{f}_{wr}) \quad (22)$$

en donde se puede agregar la contribución al desplazamiento debido a una eventual carga sobre la masa del tren, ya calculada en la Ec. (3), quedando finalmente la expresión del desplazamiento de la rueda como

$$\hat{y}_w = \hat{H}_{ww} (\hat{f}_w - \hat{f}_{wr}) + \hat{H}_{wc} \hat{f}_c \quad (23)$$

El desplazamiento del riel se puede calcular en forma similar, obteniéndose

$$\hat{y}_r = \hat{H}_r (\hat{f}_{wr} + \hat{f}_r) \quad (24)$$

Finalmente, la fuerza de interacción rueda-riel se puede calcular como

$$\hat{f}_{wr} = k_w (\hat{y}_w - \hat{y}_r) = \frac{\hat{H}_{ww} \hat{f}_w + \hat{H}_{wc} \hat{f}_c - \hat{H}_r \hat{f}_r}{k_w^{-1} + \hat{H}_{ww} + \hat{H}_r} \quad (25)$$

El problema de interacción queda entonces resuelto a través del cálculo de la fuerza de interacción, Ec. (25), de los desplazamientos de la rueda, Ec. (23) y del riel, Ec.(24). Estas ecuaciones se resuelven en forma numérica utilizando parámetros de discretización adecuados con la frecuencia-tiempo y distancia-número de onda del problema en cuestión.

## 2.2 Respuesta del sistema frente a irregularidades de la rueda y la vía

Las irregularidades del riel y de la rueda pueden ser consideradas con una leve modificación de la Ec. (25), en donde se incorpora la excitación que genera una función impuesta del espacio  $s(x)$ , que representa la irregularidad. Esta función puede tanto modelar ondulaciones de la vía o desviaciones de la rueda respecto a la circunferencia perfecta (Johansson, 2006).

Considerando la velocidad del tren, puede ser cambiada de variable de la función de irregularidad y escribirla en función del tiempo, para posteriormente transformarla al dominio de la frecuencia, obteniendo  $\hat{s}(\omega)$ . La Ec. (25) queda entonces

$$f_{wr} = k_w (\hat{y}_r - \hat{y}_s - \hat{s}) = \frac{\hat{H}_{ww} \hat{f}_w + \hat{H}_{wc} \hat{f}_c - \hat{H}_r \hat{f}_r - \hat{s}}{k_w^{-1} + \hat{H}_{ww} + \hat{H}_r} \quad (26)$$

### Vibraciones causadas por el paso de durmientes

#### Fuerza de interacción dinámica rueda-riel, desplazamientos, efecto de la velocidad

La flexibilidad dinámica considerada para la vía tiene en cuenta una distribución homogénea de las propiedades de rigidez y amortiguamiento. Sin embargo el apoyo discreto de la vía generado por la separación espacial de los durmientes agrega una flexibilidad en

forma periódica que no fue considerada en el modelo, y que es máxima en el centro de la distancia entre durmientes  $l_s$ . La flexibilidad en el centro de cada tramo puede ser calculada en forma aproximada como viga biarticulada

$$f_s = \frac{l_s^3}{48 EI_r} \quad (27)$$

con variación armónica con la frecuencia de paso de durmientes, que resulta

$$\omega_s = \frac{2\pi v}{l_s} \quad (28)$$

por lo que la flexibilidad final del riel puede ser expresada como la suma de su flexibilidad debido a la distribución homogénea de propiedades más la variación periódica.

A continuación se desarrolla un método para considerar la variación paramétrica de la rigidez del riel en la respuesta del sistema. La ecuación de movimiento en el punto de contacto rueda-riel puede ser escrita en una forma general en el dominio del tiempo como

$$\{K(t)\} y(t) = F(t) \quad (29)$$

donde  $\{K(t)\}$  es un operador de la forma

$$\{K(t)\} = \left\{ k(\cdot) + c \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot) \right\} \quad (30)$$

y  $F(t)$  es la carga total aplicada al punto, que resulta ser mayoritariamente estática y proveniente del peso, es decir se puede aproximar

$$F(t) \approx p_0 \quad (31)$$

siendo  $p_0$  la carga estática por eje o por rueda, dependiendo del modelo. La variación de la flexibilidad debido al paso de durmientes puede ser explicitada en el operador rigidez dinámica de la Ec. (29), por lo que esta ecuación queda

$$\{K(t) + k_s(t)\} y(t) = F(t) \quad (32)$$

ver Figura 3, donde  $k_s(t)$  es otro operador similar a  $K(t)$ , pero limitado a reflejar las variaciones de rigidez dinámica por causa de la flexibilidad generada por el paso de durmientes, esto es

$$k_s(t) = \bar{k}_s \text{ abs} \left\{ \exp \left[ i \left( \omega_s / 2 \right) t \right] \right\} \quad (33)$$

donde la variación de rigidez negativa  $\bar{k}_s$  se calcula como se explica más adelante en la Ec. (40). Por su parte, la función armónica de la Ec. (33) refleja la forma de la variación temporal de la rigidez entre durmientes.

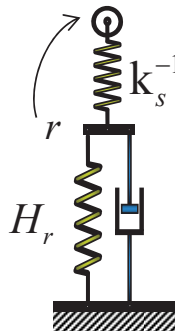


Figura 3: Modelo de vías donde se incorpora la flexibilidad de paso de durmientes



Para solucionar la Ec. (32) proponemos que la solución sea la suma iterativa de componentes,

$$y(t) = y_0 + y_1(t) + y_2(t) \dots \quad (34)$$

donde  $y_0$  es la componente casi estática de la respuesta, que cumple la siguiente relación

$$\{K(t)\} y_0 = p_0 \quad (35)$$

Reemplazando la Ec. (34) en la Ec. (32) y la Ec.(35) en la (31) y esta última en la (32) se tiene

$$\{K(t)\} y_1(t) = -k_s(t) y_0 - k_s(t) y_1(t) \quad (36)$$

Despreciando en una primera instancia el segundo término del lado derecho de la Ec. (36) por ser el producto de dos magnitudes relativamente pequeñas, se tiene

$$y_1(t) = -\{K(t)\}^{-1} k_s(t) y_0 \quad (37)$$

Si bien se conoce que el operador inverso  $\{K(t)\}^{-1}$  resulta igual a  $k^{-1}$  para el caso casi estático de la primera iteración -caso de frecuencia nula-, sin pérdida de generalidad se reconoce que en la expresión (37)  $y_0$  resulta de  $y_i|_{i=0}$  y en general, el desplazamiento resulta dependiente del tiempo para todo  $i \neq 0$ , por lo que la Ec. (37) presenta el producto de dos funciones dependientes del tiempo, esto es en forma general

$$y_i(t) = -\{K(t)\}^{-1} k_s(t) y_{(i-1)}(t) \quad (38)$$

En el segundo paso de iteración, se agrega la fuerza desequilibrada  $-k_s(t) y_1(t)$  de la Ec.(36) -nótese que originalmente fue despreciada para llegar a la Ec. (37)-, lo que genera una componente de desplazamiento  $y_2(t)$  con lo que es posible calcular la Ec. (34).

$$y_2(t) = -\{K(t)\}^{-1} k_s(t) y_1(t) \quad (39)$$

La implementación del método tiene lugar en el **dominio de la frecuencia**, por lo que el parámetro variación de rigidez  $\bar{k}_s$  toma la forma,

$$\bar{k}_s = \left( \hat{H}_r(0) + f_s \right)^{-1} \left( -\hat{H}_r^{-1}(0) \right) \quad (40)$$

De igual forma la Ec. (35) en el dominio de la frecuencia se escribe

$$\hat{y}_0(\omega) = \hat{K}^{-1}(0) p_0 \quad (41)$$

mientras que la Ec. (38) en forma general es

$$\hat{y}_i(\omega) = -K^{-1}(\omega) \left( \hat{k}_s(\omega) * y_{(i-1)}(\omega) \right) \quad (42)$$

Con lo que resulta que en el cálculo de  $\hat{y}_1(\omega)$  los vectores a convolucionar son  $\hat{k}_s(\omega)$  y  $y_0(\omega)$ , y este último presenta valores no nulos sólo para la frecuencia cero, por lo que el contenido de frecuencias resultante proviene sin modificación de la flexibilidad del riel. Por otro lado, para el cálculo de  $\hat{y}_2$  ambos vectores poseen contenidos no nulos para todas las frecuencias, por lo que de su convolución en la frecuencia se generan modulaciones que modifican las amplitudes. En el apartado de cálculo más adelante se demuestra sin embargo que esta última componente puede ser despreciada por su baja magnitud.

La implementación en el modelo de subestructuración utilizado en este trabajo, puede materializarse aumentando la fuerza sobre el riel  $\hat{f}_r$  por medio de la fuerza  $\hat{f}_{rs}$

$$\hat{f}_{rs} = \sum_i \left( \hat{k}_s(\omega) * \hat{y}_i(\omega) \right) \quad i = 0, 1, \dots \quad (43)$$

La Ec. (25), que permite calcular la fuerza de interacción rueda-riel, puede ser resuelta para poder evaluar la Ec. (24) y posteriormente la Ec. (43) en forma iterativa, para el cálculo de la respuesta del riel y rueda en coordenadas móviles.

### 3 ANÁLISIS DEL SISTEMA

#### 3.1 Sistema del tren

Por no presentar apoyos, la flexibilidad dinámica del sistema del tren se caracteriza por una rama infinita en la frecuencia nula, una amplificación debida a la frecuencia propia de la masa no suspendida en la zona de muy baja frecuencia y un comportamiento másico para frecuencias altas, ver Figura 4.

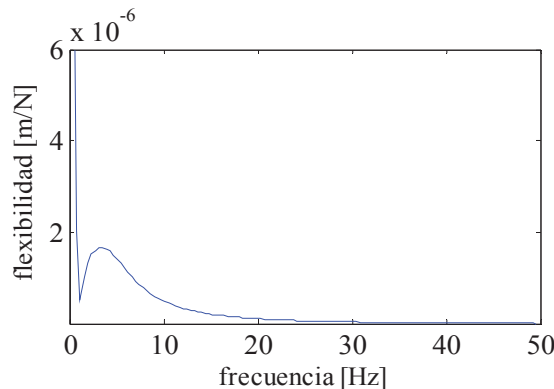


Figura 4: Flexibilidad dinámica de la rueda

#### 3.2 Sistema de vías-losa flotante. Ecuación de dispersión

Los corchetes del integrando de las ecs. (16) y (17) definen el carácter de las soluciones del movimiento del riel y la losa. En especial, los ceros del  $[\det(K)_{\omega=\omega_c-\xi v}](\xi, \omega, v)$  están asociados a la forma libre del movimiento, por expresar la solución no trivial de la homogénea de la Ec. (11)

$$[\tilde{K}_{rs}]_{\omega=\omega_c-\xi v} \begin{Bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{y}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

donde el vector  $\tilde{y}$  es el vector propio  $\phi$ , que representa a los modos de la solución. Definida una velocidad del tren, el determinante representa una ecuación expresada en la variable  $\xi^8$  y  $\omega^4$  de la que es posible despejar la *relación funcional de dispersión* del tipo  $\omega^2 = f(\xi^4)$  y finalmente la ecuación de dispersión, que relaciona la frecuencia excitatriz con el número de onda de la solución de vibración libre. Como la ecuación de dispersión queda planteada en matemática compleja, es posible expresar su solución: *i*) partiendo de números de onda reales y obteniendo frecuencias complejas o *ii*) fijando frecuencias reales para calcular números de onda complejos. A continuación siguen algunos análisis derivados de esos dos puntos de vista:

##### 3.2.1 Solución real de la ecuación de dispersión

Se define como *relación de dispersión* a la parte real de la frecuencia expresada en función del número de onda (real), siendo esta una función par (simétrica) de la frecuencia. En el caso de velocidad nula, se tiene además simetría respecto del número de onda, lo que indica físicamente que las ondas propagadas son también simétricas respecto a  $x = 0$ . En este último caso su gráfica puede ser representada sólo para un cuadrante sin pérdida de información.

En la Figura 5 se muestran en color azul las curvas de dispersión correspondientes al ejemplo de aplicación citado, las que nacen para  $\xi = 0$  en las frecuencias propias de las vigas consideradas flexionalmente rígidas. De acuerdo con los datos asumidos, estas frecuencias son 19 Hz para la losa y 100 Hz para el riel. Por nacer en el origen, la recta dibujada en línea de trazos en color rojo representa una *recta de carga*. De las infinitas rectas de cargas posibles, se ha mostrado en este caso, la que es tangente a la primera curva de dispersión. Esta recta define la

velocidad crítica, ya que su función tangente con el eje vertical (cotangente) resulta igual a la velocidad de fase de onda, esta última definida como:

$$v = \frac{\omega}{\xi} \quad (45)$$

Por otro lado, nótese que la ecuación de la onda no presenta solución sino hasta la primera frecuencia de corte (en este caso 19 Hz) a partir de la cual comienza la propagación de ondas.

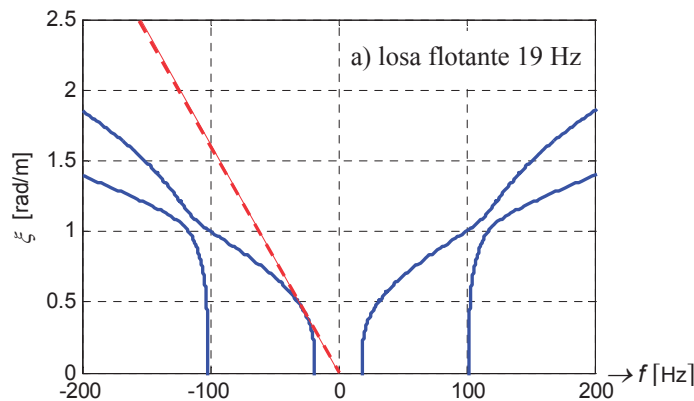


Figura 5: Ecuación de dispersión y recta de carga para velocidad crítica, losa flotante de 19 Hz

### 3.2.2 Solución compleja de la ecuación de dispersión

Partiendo de la Ec. (44) la respuesta del riel y de la losa pueden escribirse como una combinación lineal de la respuesta de los modos

$$\begin{Bmatrix} \tilde{y}_r \\ \tilde{y}_s \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 A_i \phi_i e^{i\xi_i x} e^{i\omega t} \quad (46)$$

Evaluando la matriz de rigidez dinámica de la Ec. (44) en cada una de las soluciones de la ecuación de dispersión, se logra una matriz con un autovector nulo, cuyo autovector asociado es el modo. En la Figura 6 se muestra la variación de los autovalores  $\xi_i(\omega)$  y asociados a los vectores propios  $\phi_i$ . Los gráficos muestran la parte imaginaria versus la parte real para la frecuencia genérica de 8 Hz, que está debajo de la primera frecuencia propia, Figura 6a y para la frecuencia 20 Hz (por encima de la primera propia), Figura 6b. En cada gráfico se muestran el conjunto de 8 autovalores para el caso de amortiguamientos de la losa y del riel nulos, y para amortiguamientos del 5 % en ambos casos.

En resumen, el comportamiento de la solución, en relación con los números de onda, resulta de la siguiente forma:

- Hasta la primera frecuencia propia los autovalores son complejos, Figura 6a. En virtud de los exponenciales de la Ec. (46), la parte real de  $\xi$  genera una onda (una parte real positiva indica que se propaga con el tiempo en la dirección negativa de  $x$  y viceversa) y la parte imaginaria (positiva) hace que sea decadente en el espacio.
- A partir de la primera frecuencia propia, Figura 6b, los números de onda resultan cuatro reales y cuatro imaginarios puros, supuesta la ausencia de amortiguamiento. Los reales generan ondas que se propagan (sin atenuación con la distancia) y los imaginarios puros (positivos) son desplazamientos decayentes con el espacio.

Por lo anteriormente expuesto, sólo cuatro autovalores tienen significado físico y son considerados en el cálculo, mientras que el resto son descartados. Para posiciones por delante de la carga  $x > vt$  corresponden los autovalores del semiplano superior positivo de  $\text{Im}(\xi)$ ,

esto es 1er. y 2do. cuadrantes, y exceptuando autovalores reales puros positivos. La primera condición asegura ondas decayentes y la segunda ondas que se propagan hacia  $x$  positivos. Por lo contrario, para posiciones por detrás de la carga  $x < vt$  corresponden los autovalores del 3er. y 4to. cuadrantes exceptuando autovalores reales puros negativos (en el semieje negativo de  $Re(\xi)$ ).

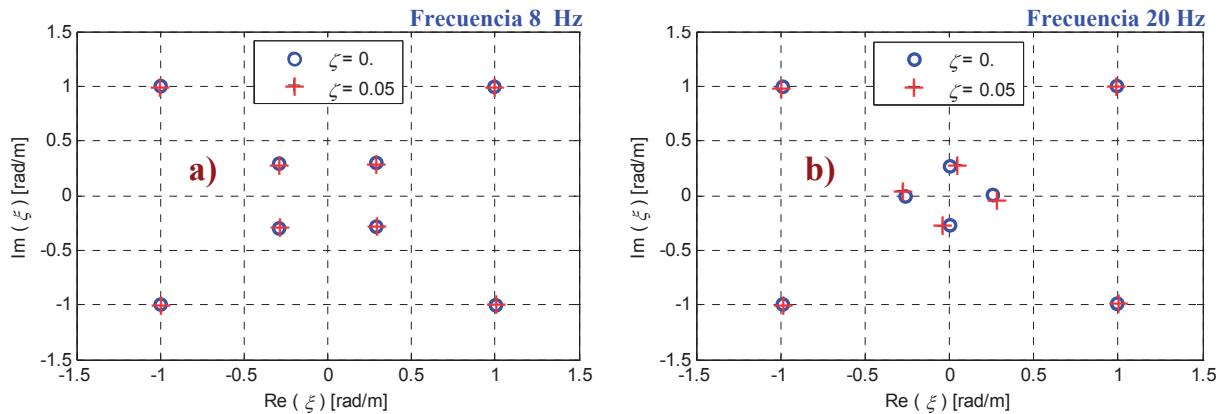


Figura 6: Autovalores del sistema riel-losa flotante para frecuencias 8 Hz (a) y 20 Hz (b).

### 3.2.3 Relación de la dispersión de vía con la dispersión de componentes

Superpuestas en el gráfico de la Figura 7 se encuentran las relaciones de dispersión de la vía según lo hasta ahora expuesto, con las relaciones de dispersión de los elementos constitutivos de la vía considerados en forma independiente, esto es, la losa flotante y el riel apoyados por sobre el medio elástico correspondiente al suelo rígido. La relación de dispersión de los componentes considerados en forma independiente resulta (Stuardi *et al*, 2009),

$$\omega^2 + \omega_i^2 = \frac{EI_i}{\rho A} \xi^4 \quad (i = r, s) \tag{47}$$

donde  $\omega_r^2, \omega_s^2$  son las frecuencias propias del riel y losa flotante sobre el sistema elástico y considerados como cuerpo rígido. Se observa la ajustada concordancia de las curvas de dispersión de la vía con las respectivas relaciones de dispersión de sus miembros estructurales, lo que se explica por el desacoplamiento entre el movimiento de ambos miembros estructurales. Obsérvese además el cruzamiento de ramas de las curvas de dispersión de vía con las de sus componentes, en la zona de la frecuencia propia del riel.

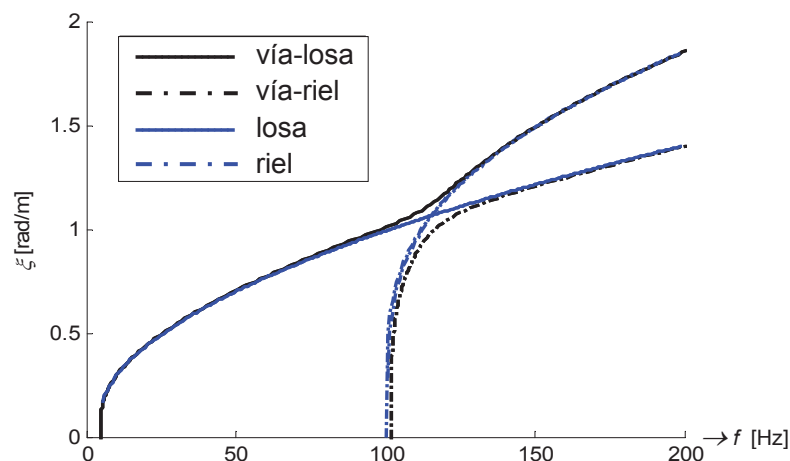


Figura 7: Relaciones de dispersión de vía y de sus componentes por separado

## 4 RESPUESTA DEL SISTEMA

### 4.1 Respecto del análisis del sistema de vías

La *velocidad crítica* queda definida como la menor velocidad asociada a una línea de carga tangente a la curva de dispersión. En estas condiciones las velocidades de fase y grupo coinciden, y lo hacen además con la velocidad de las ondas de flexión de la losa flotante, con lo que se logra una condición de resonancia espacial y un máximo en la respuesta del sistema. Esta amplificación resulta producto de un corrimiento de la primera frecuencia propia hacia frecuencias menores por efecto de la velocidad. Esto puede ser observado en la [Figura 8](#) que muestra la flexibilidad del riel como parte de su subestructura, para una carga armónica en función de la velocidad y para las losas de frecuencia propia de 19 Hz (a) y 5 Hz (b), esta última obtenida desde los datos provistos por el cambio apropiado de la rigidez  $k_s$ .

En la [Figura 8a](#) se aprecia el corrimiento del pico de respuesta del primer modo de la losa intesectando al eje de frecuencia nula para la velocidad crítica, aproximadamente 380 m/s. Como esta velocidad es elevada aún para trenes de alta velocidad, no una condición observable en la práctica. Sin embargo, en el caso de losas flotantes de frecuencia natural más baja, interesa analizar cómo se incrementa la respuesta al acercarse a la velocidad crítica, que por otro lado resulta menor.

En la [Figura 9](#) se muestra una réplica de la [Figura 5](#), para una losa flotante de frecuencia propia igual a 5 Hz. Se observa que la tangente con la vertical de la curva de carga ha disminuido y la velocidad crítica es ahora 196 m/s por efecto de la losa de baja frecuencia. Además en la [Figura 8b](#) es notable la respuesta ya elevada del riel en la zona de bajas frecuencias y velocidades pequeñas.

Para mejor interpretación de la [Figura 8](#), en la [Figura 10](#) se muestran secciones de planos ( $y_r$  vs.  $v$ ) para frecuencias 0, 5 y 10 Hz de igual forma que en los gráficos anteriores, para las losas de 19 Hz ([Figura 10a](#)) y 5 Hz ([Figura 10b](#)). El pico de la curva de trazo continuo (0 Hz) se reduce desde la velocidad 380 m/s en la figura (a) hasta 185 m/s en la (b), además nótese la presencia de picos de respuesta elevados en frecuencias apenas superiores a la nula.

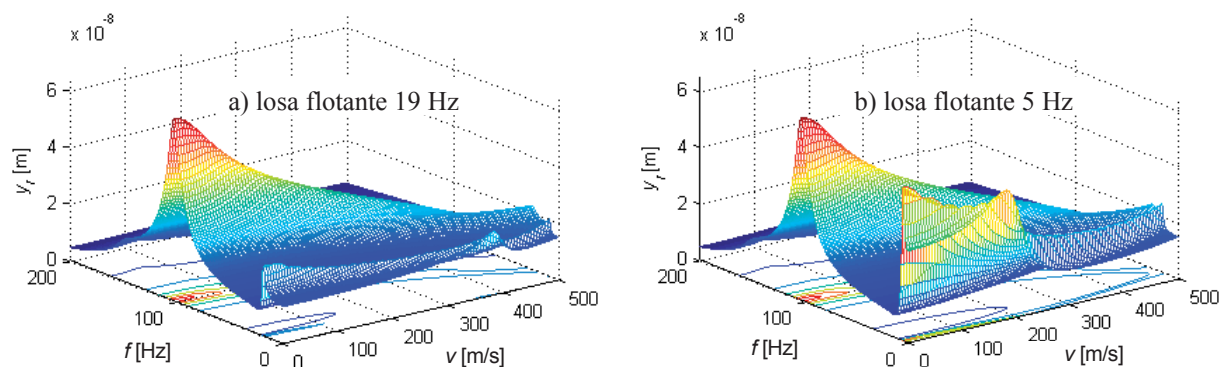


Figura 8: Desplazamientos del riel para carga armónica unitaria

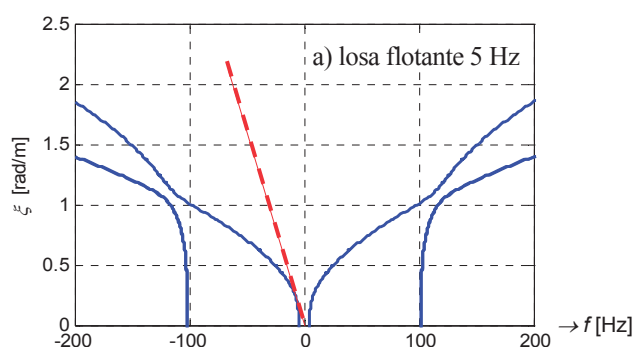


Figura 9: Ecuación de dispersión y recta de carga para velocidad crítica, losa flotante 5 Hz

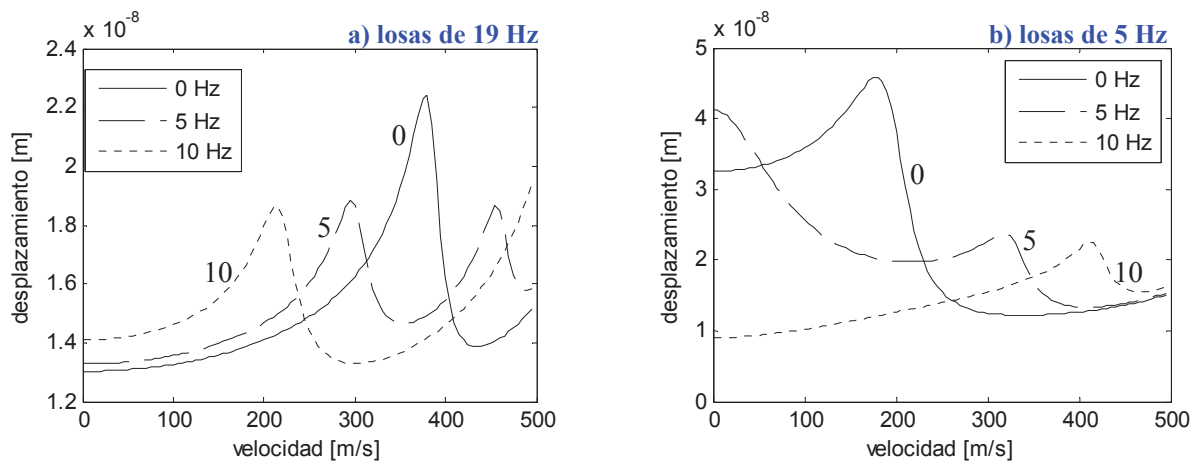


Figura 10: Respuesta del riel para carga unitaria.

#### 4.2 Análisis de efectividad de losas flotantes

En la Figura 11 se muestra el logaritmo del desplazamiento del riel en función del número de onda y frecuencia. Se superponen en el gráfico en forma de líneas de trazos las relaciones de dispersión del sistema de vías. El gráfico a) corresponde a una losa flotante de 5 Hz y el b) a una losa de 19 Hz y velocidad 100 m/s. Se observa que la respuesta del riel queda totalmente determinada por las propiedades de la losa en la zona de bajas frecuencias.

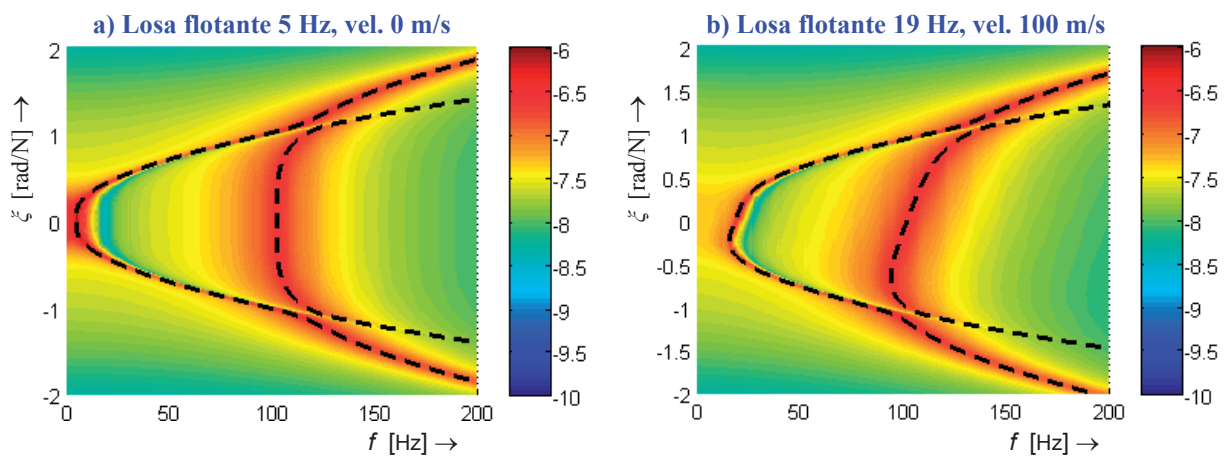


Figura 11:  $\text{Log}_{10}$  de la flexibilidad dinámica [m/N] del riel en el punto por debajo de la rueda

En la Figura 11b se observa asimetría respecto del eje  $\xi = 0$  y el achicamiento de la frecuencia de corte. Los números de onda son menores en el semiespacio positivo y mayores para el semiespacio inferior negativo, indicando un alargamiento de las longitudes de onda detrás de la carga y un acortamiento frente de la misma (efecto Doppler).

#### 4.3 Ejemplos de validación

Se muestran a continuación algunos ejemplos de validación que sirven para mejorar el entendimiento de la respuesta del sistema de vías. La Figura 12 muestra el perfil de desplazamientos rueda-riel en función del espacio considerando fuerza estática unitaria con velocidad nula (a) y uniforme de 150 m/s (b). La integración de las fuerzas de apoyo en riel y losa flotante han sido utilizadas como variable de control y verificación. Nótese que el perfil de desplazamientos no varía sustancialmente para las dos velocidades consideradas.

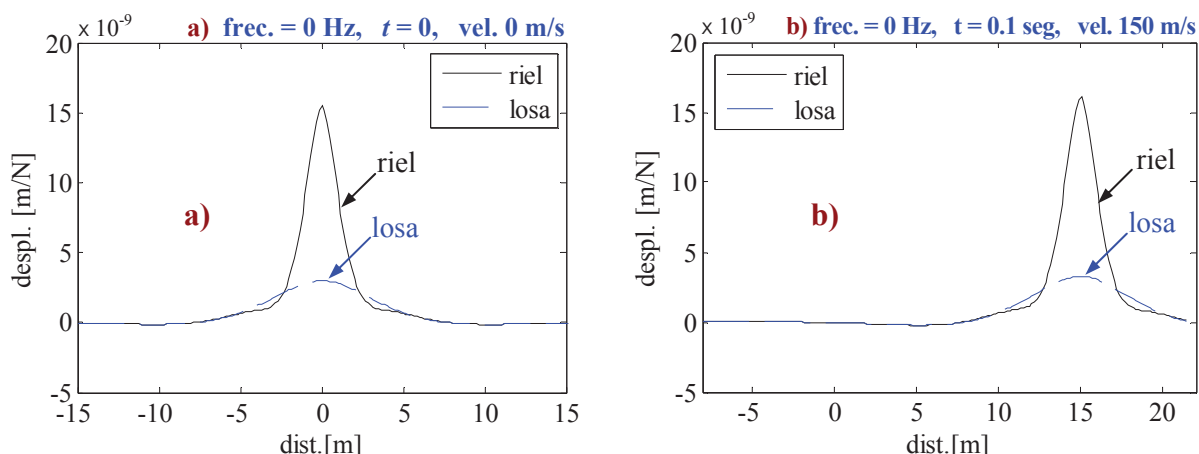


Figura 12: Desplazamientos del riel y la losa flotante para carga estática

De la misma forma se muestra en la Figura 13 el perfil de desplazamientos generado por una excitación armónica de 5 Hz. sobre la vía para dos velocidades distintas (Figura 13a y Figura 13b), mientras que en la Figura 14 la frecuencia de excitación es de 25 Hz. El primer caso no genera propagación de ondas, mientras que en el segundo se hace visible la compresión de la longitud de onda por delante y la expansión por detrás de la carga. Nótese además que las amplitudes no varían significativamente.

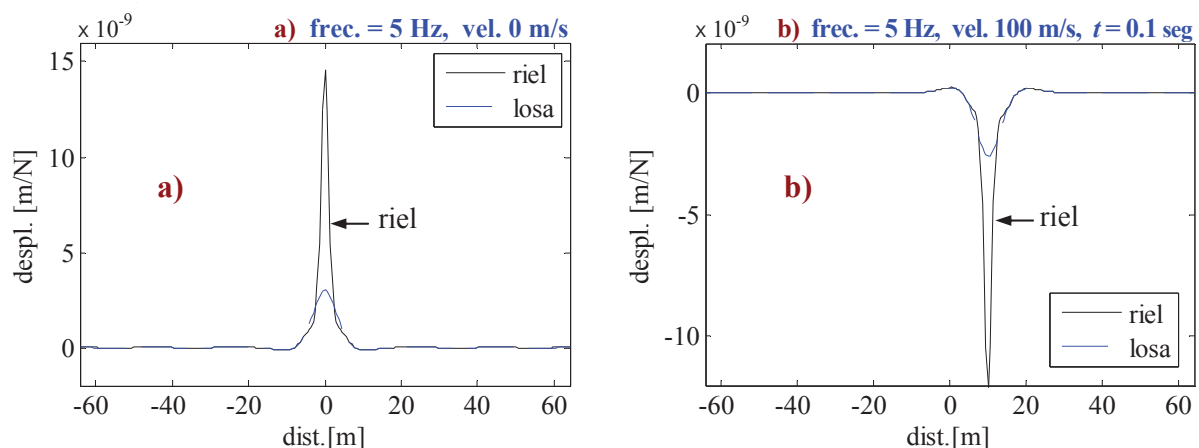


Figura 13: Desplazamientos del riel y la losa flotante para carga armónica de 5 Hz

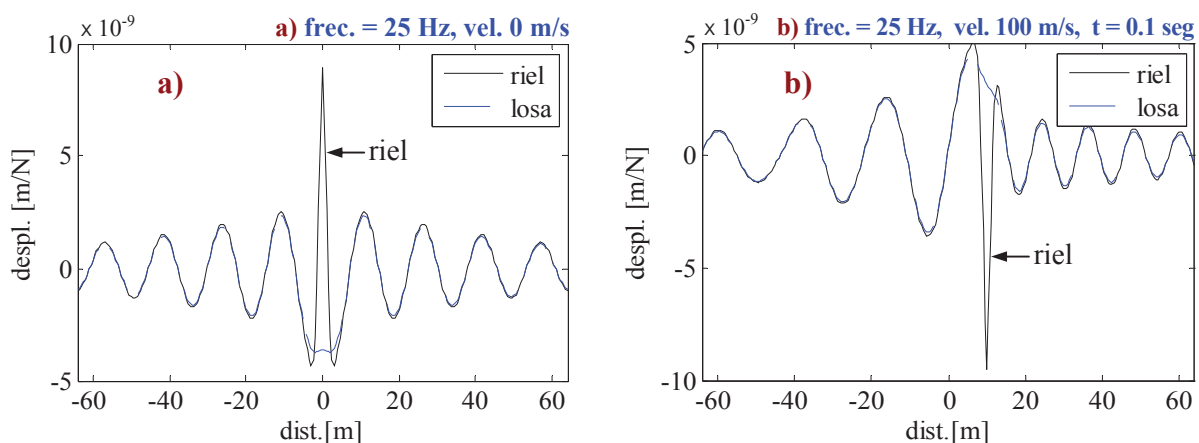


Figura 14: Desplazamientos del riel y la losa flotante para carga armónica de 25 Hz

En la **Figura 15** se compara la respuesta en desplazamientos del riel y la losa en magnitud y fase con carga aplicada sobre la subestructura del riel (a) y las mismas variables pero calculadas basándose en una carga armónica aplicada sobre la rueda del sistema completo y considerando interacción (b). Se considera el caso de velocidad nula, tomándose como punto de control el de contacto de la rueda.

Por efecto de la interacción con el vehículo, el pico de frecuencia que se relaciona con la frecuencia propia del riel desaparece, para dar lugar a una amplificación que es referida como una *resonancia acoplada del sistema tren-vía*, algo por debajo de los 50 Hz, en este caso. Eso es debido a la masa agregada por la rueda y otras masas no suspendidas en forma concentrada al riel y al movimiento en fase de ambos. El pico asociado a la frecuencia propia de la losa se mantiene no afectado, por hallarse suficientemente desacoplado del problema referido.

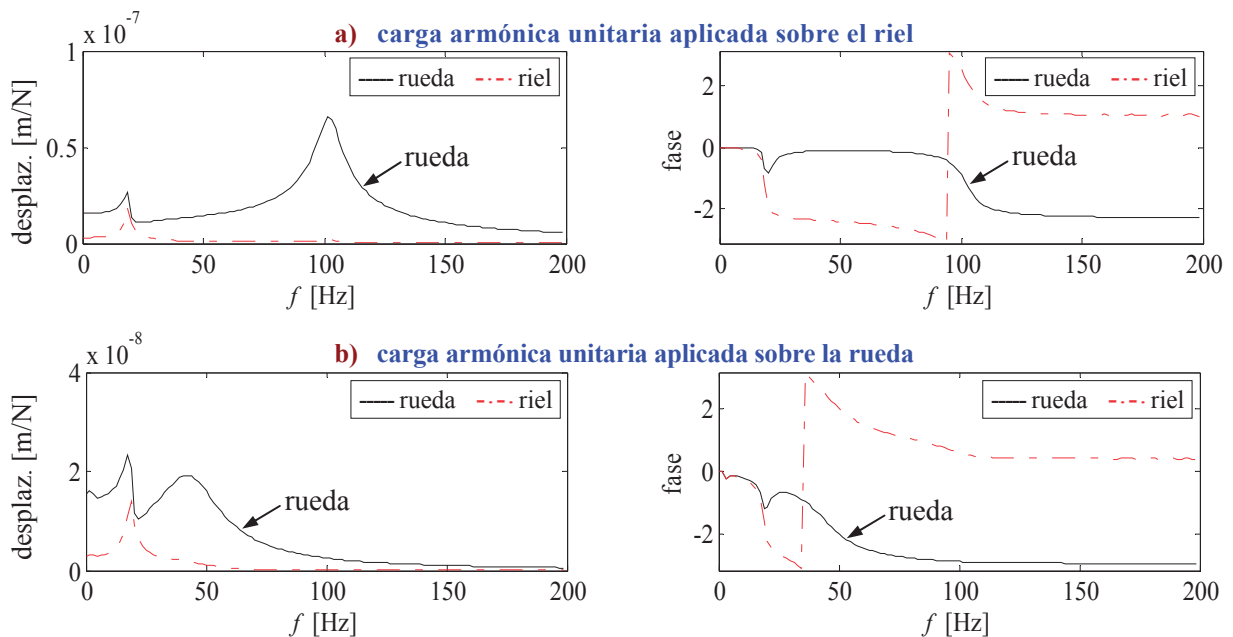


Figura 15: Respuesta del riel y la losa para carga armónica unitaria, losa 19 Hz, velocidad = 0

La fuerza dinámica de interacción rueda-riel adimensionalizada en la carga estática para velocidad nula se presenta en la **Figura 16**. El pico en la fuerza está asociado a la frecuencia acoplada rueda-riel, mientras que en el gráfico muestra que la fuerza es mínima a partir de 100 Hz.

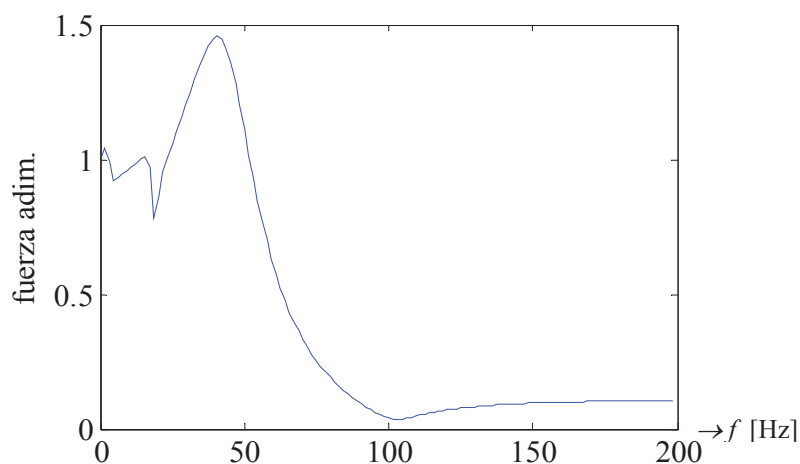


Figura 16: Fuerza de interacción rueda riel para carga armónica en la rueda, velocidad nula



Los gráficos de la **Figura 15** se repiten en la **Figura 17** para velocidad del tren 100 m/s. No se notan cambios significativos entre la respuesta del riel con carga aplicada en la rueda para velocidad nula y para velocidad de 100 m/s. Esta velocidad si bien resulta relativamente baja comparada con la velocidad crítica, es por otro lado una velocidad de un tren rápido actual.

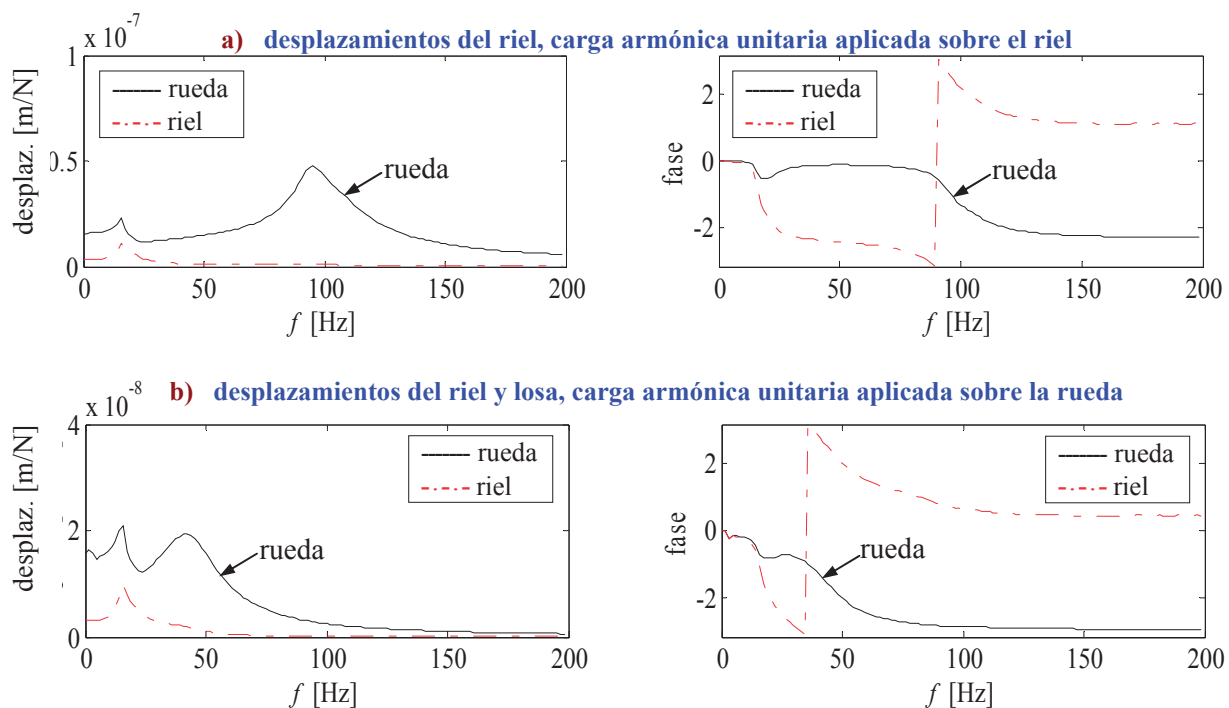


Figura 17: Respuesta del riel y losa para carga armónica unitaria, losa 19 Hz, velocidad 100 m/s

#### 4.4 Análisis de transmisibilidad de fuerzas

A continuación se muestran gráficos finales de respuesta del riel (**Figura 18**) y de la losa (**Figura 19**) para carga armónica aplicada en la rueda y en función de la velocidad. La figura a) corresponde a losa de 19 Hz y la figura b) a la losa de 5 Hz.

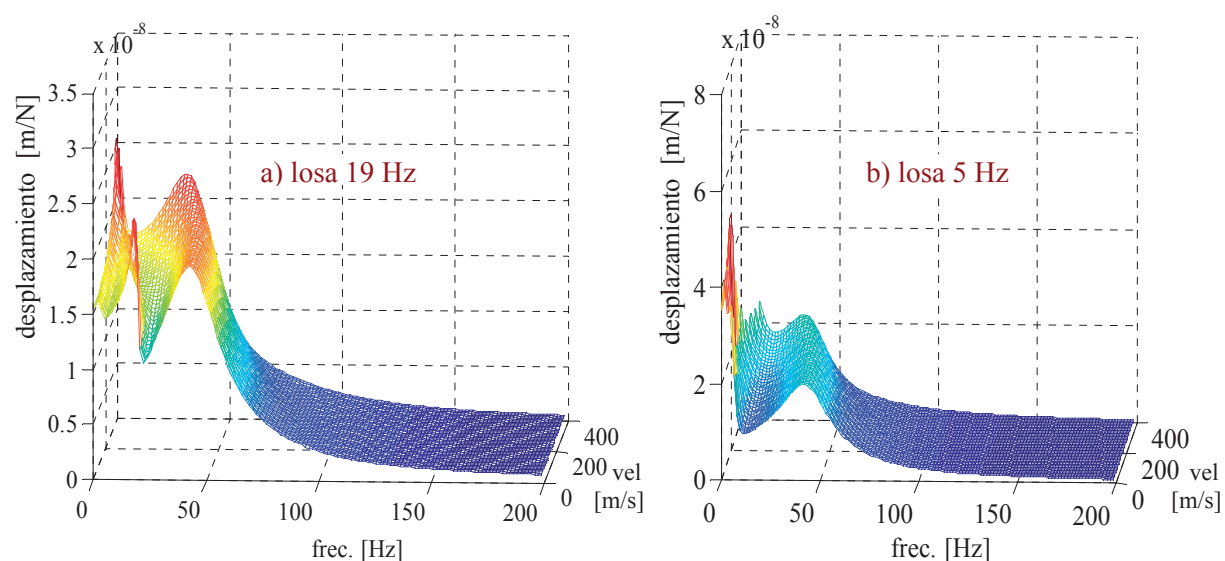


Figura 18: Desplazamientos del riel para carga armónica unitaria

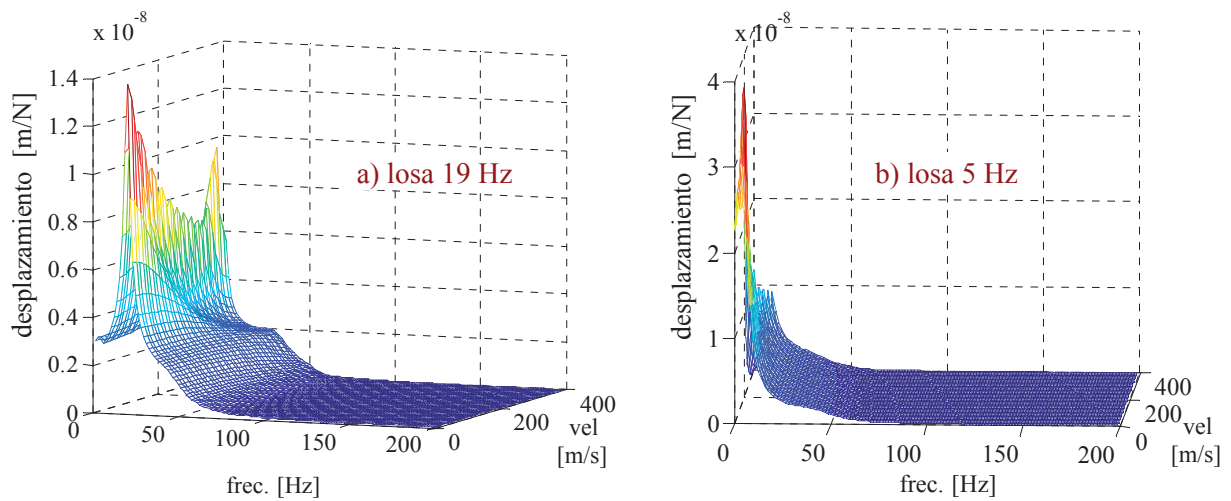


Figura 19: Desplazamientos de la losa –carga armónica unitaria

Excepto para la zona de muy bajas frecuencias (por debajo de 5 Hz) la respuesta del riel para la losa de 5 Hz resulta de igual magnitud que para la losa de 19 Hz, por lo que los desplazamientos se mantienen acotados. Los desplazamientos de las losas no son por si mismos relevantes sino en relación a las fuerzas que generan y son transmitidas al suelo. La Figura 20 muestra la transmisibilidad de fuerzas desde la rueda al suelo rígido y en función de la velocidad. La fuerza de apoyo en la base se calcula en la coordenada de apoyo de la rueda como

$$\hat{F}_{tr} = (k_s + i\omega c_s) \hat{y}_s \tag{48}$$

y la transmisibilidad correspondiente como

$$\hat{T}_r = \left. \frac{\hat{F}_{tr}}{\hat{F}_r} \right|_{\substack{\omega=0 \\ v=0}} \tag{49}$$

La Figura 20a muestra el caso de losa de 19 Hz y la Figura 20b se refiere a una losa de 5 Hz a efectos comparativos. Finalmente en la Figura 21 se muestran vistas en donde el eje de velocidades es perpendicular al dibujo y todos los valores correspondientes a distintas velocidades se muestran en forma superpuesta.

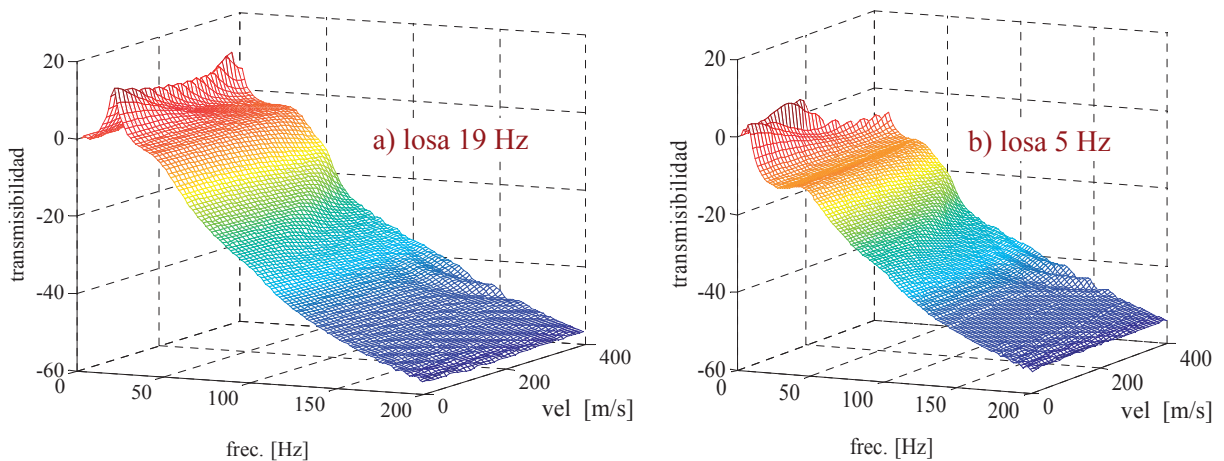


Figura 20: Transmisibilidad [dB] de fuerza desde la rueda al suelo, a) losa 19 Hz, b) losa 5 Hz

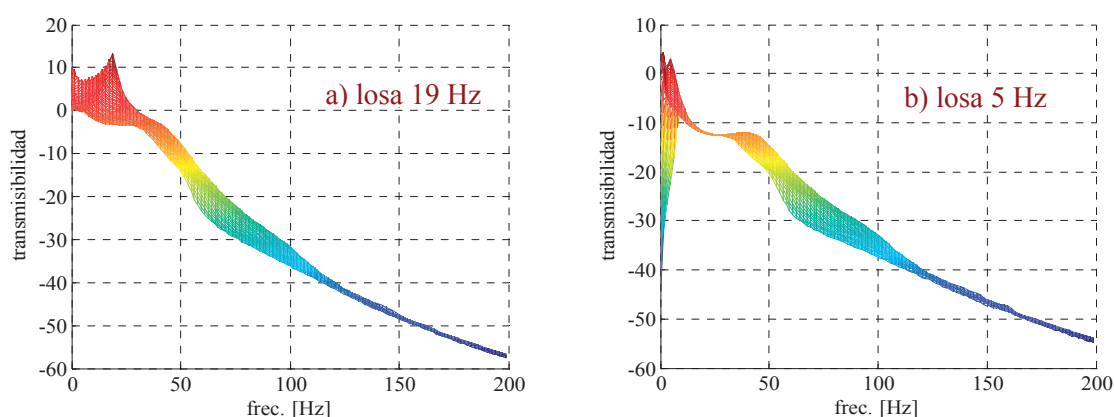


Figura 21: Transmisibilidad [dB] de fuerza desde la rueda al suelo

Analizando los gráficos resulta notoria la mejora de la atenuación con la reducción de la frecuencia de la losa, especialmente en la zona de más bajas frecuencias, ya que las reducciones en frecuencias acústicas son ya de por sí satisfactorias en todos los casos. En el rango de frecuencias 10-40 Hz se logran reducciones del orden de más de 10 dB a costo de algunos dB de incremento relativo en el rango menor a 10 Hz.

#### 4.5 Análisis de la respuesta del sistema rueda-riel para irregularidades de la rueda y la vía

Las irregularidades comprenden desde ondulaciones largas de la vía hasta excitaciones generadas por el fenómeno de “ruedas planas”, provocadas por bloqueo en el frenado y desgaste anormal por fricción. En el primer caso se trata de longitudes de onda que provocan excitaciones en frecuencias bajas y medias mientras que en el segundo el problema es de altas frecuencias. Además, dependiendo de la longitud de la ondulación, si esta es relativamente grande, el contacto rueda-riel se establece en forma continua y progresiva en las generatrices de la rueda. En cambio, la cinemática de contacto de un plano secante en la circunferencia de la rueda con el riel ha sido estudiada por Wu and Thompson (2002) y genera en el eje una función desplazamiento en forma de campana de Hanning  $[1 - \cos(\zeta x)]$ , la que casualmente es una buena forma de modelar ondulaciones, por lo que se utilizará esta forma con distintas propiedades geométricas para los diferentes casos de estudio.

En la Figura 22 se muestra a modo de ejemplo la respuesta causada por una ondulación de la vía con la forma ya citada, de longitud de onda 500 mm y amplitud máxima de 1 mm. La velocidad del tren se supone en este caso de 5 m/s, suficientemente baja de forma de lograr una respuesta casi estática como caso de control. A efectos comparativos se ha utilizado también un tren menos masivo y con menor amortiguamiento que denominamos ‘tren 2’ (ver Tabla 2) cuyas propiedades difieren del caso tratado anteriormente, definido en la Tabla 1, que denominamos ‘tren 1’.

	$m_c$ [kg]	$k_c$ [N/m]	$c_c$ [Ns/m]	$m_w$ [kg]
<b>Tren 1</b>	19400	6110000	158000	1000
<b>Tren 2</b>	10400	500000	20000	500

Tabla 2: Propiedades de los dos trenes considerados

En los gráficos (a) y (c) de la Figura 22 se muestran los desplazamientos de rueda, riel y la ondulación, mientras que en el (b) y (d) se grafica la fuerza de interacción rueda-riel en función del tiempo. Por efecto de la baja velocidad, la rueda copia la forma de la irregularidad con un leve retraso, mientras que el riel deflecta cerca de una décima de mm en la fase ascendente de la ondulación y vuelve a unificar su desplazamiento apenas terminada la excitación. La fuerza coincide en forma y fase con los desplazamientos del riel. La Figura 23 reporta el mismo caso anterior pero para una velocidad de 50 m/s, aquí los efectos dinámicos se hacen notar en la respuesta del riel, con un desplazamiento 7 veces mayor y un aumento de fuerza del mismo

orden de magnitud. Por otro lado la fase de compresión debido a una irregularidad saliente se extiende tanto para los desplazamientos del suelo como para la fuerza de interacción durante un lapso más grande, que abarca la casi totalidad de la duración de la irregularidad.

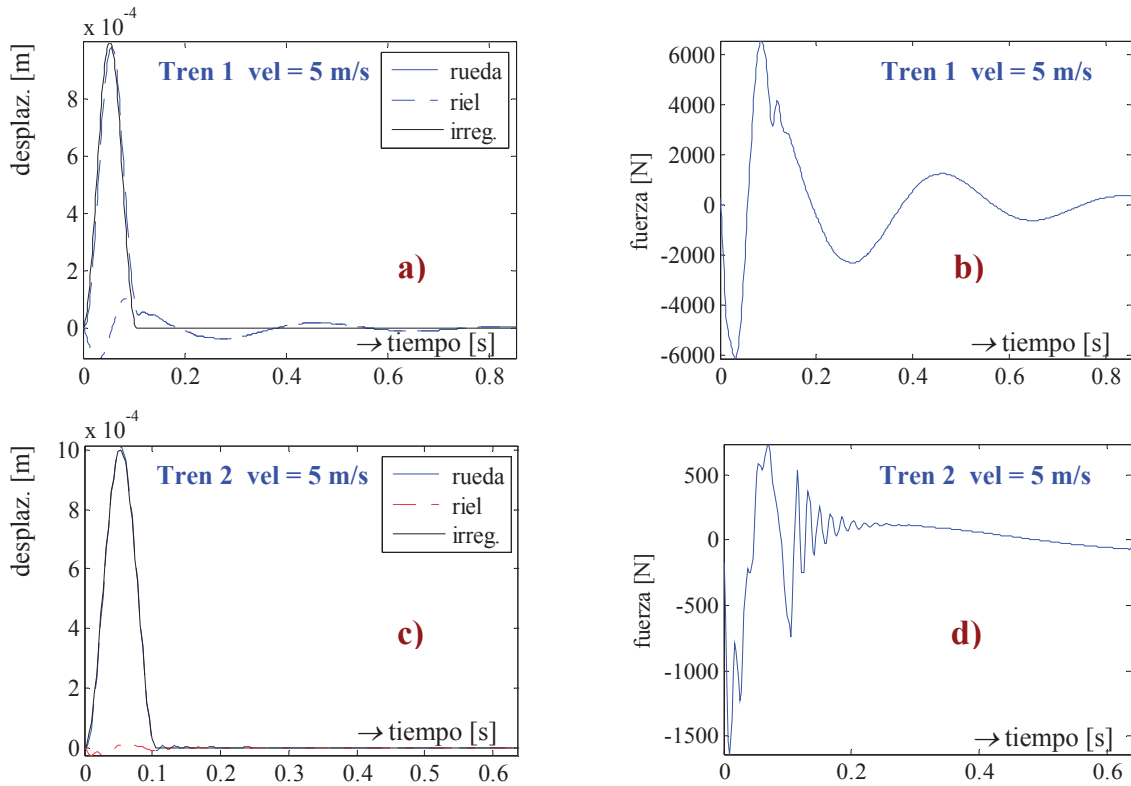


Figura 22: Respuesta a una ondulación de vía para dos modelos de tren, velocidad 5 m/s

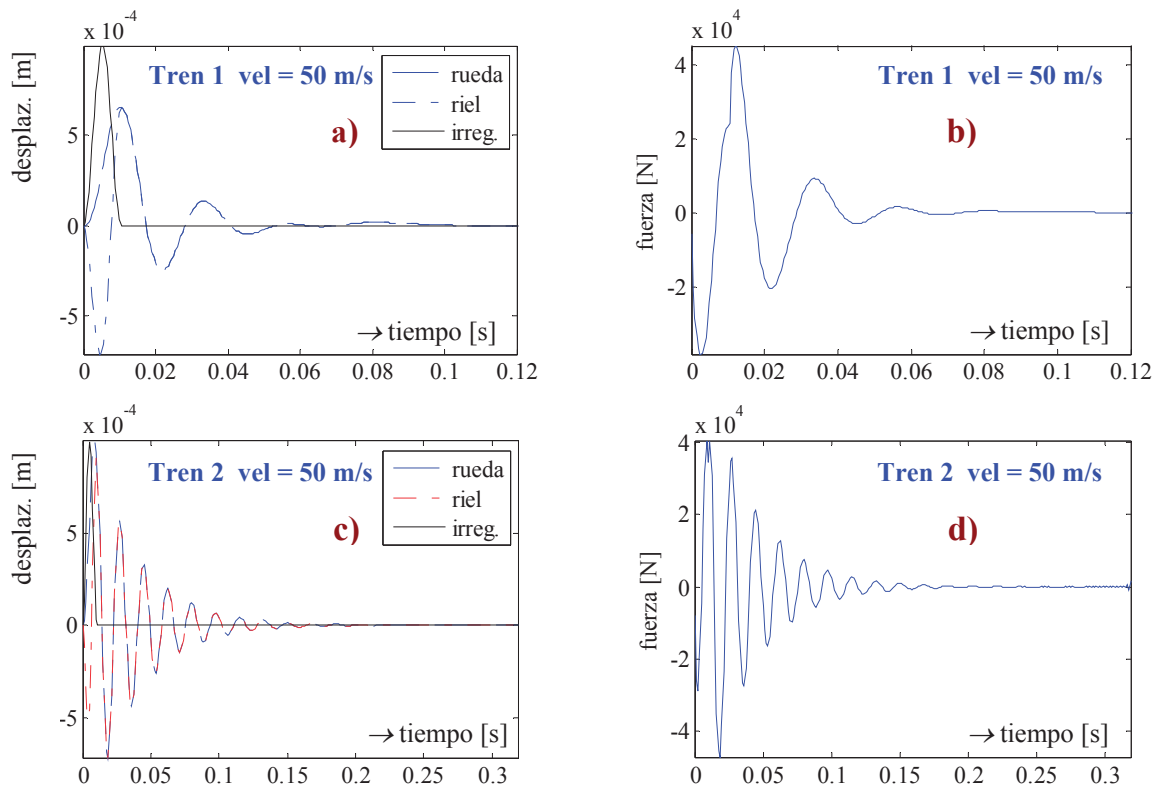


Figura 23: Respuesta a una ondulación de vía para dos modelos de tren, velocidad 50 m/s

Otras imperfecciones que pueden ser estudiadas son el fenómeno de rueda plana, en este caso se utiliza una longitud de 53 mm y una altura de 1mm, con una velocidad de 50 m/s y los resultados son mostrados en la [Figura 24](#).

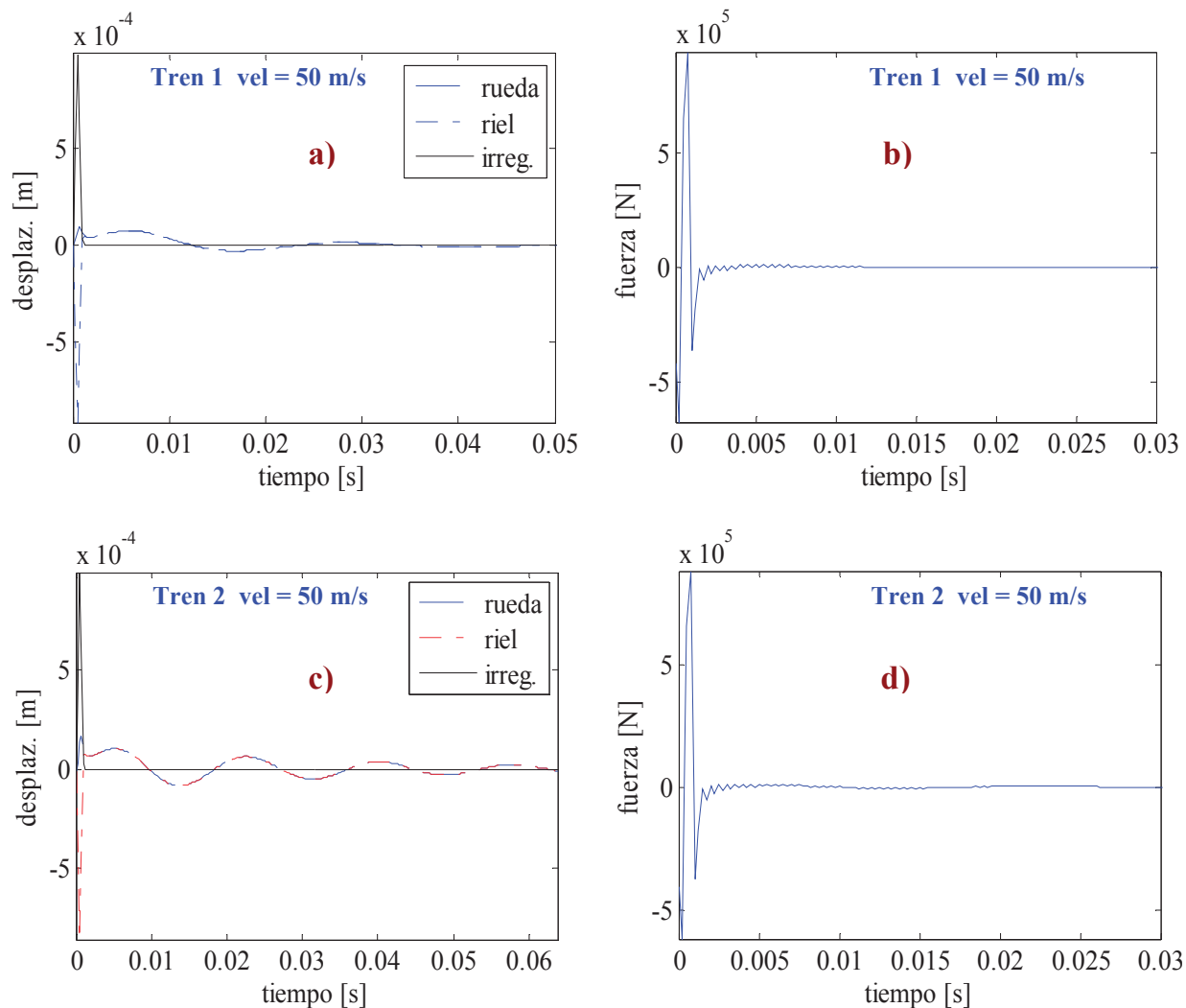


Figura 24: Respuesta a rueda plana para dos modelos de tren, velocidad 50 m/s

#### 4.6 Análisis de la respuesta del sistema rueda-riel para vibraciones causadas por el paso de durmientes

Se presentan en este apartado dos casos de respuestas calculadas con la formulación desarrollada. El primer caso corresponde al sistema de tren y vías considerado, con una distancia entre durmientes de 60 cm y una flexibilidad correspondiente a riel UIC60. Se consideran dos iteraciones y una velocidad de 5 m/s en el primer caso y 50 m/s en el segundo. El primer gráfico de cada serie muestra los desplazamientos del riel y el segundo la fuerza rueda-riel. Para la velocidad más baja, [Figura 25](#) los desplazamientos siguen aproximadamente la ley de variación de rigidez y se obtienen desplazamientos algo menores a los estáticos, que resultan  $45\mu\text{m}$ . Los esfuerzos de compresión crecen desde el punto de flecha máxima mientras transita por la segunda mitad del vano hasta la posición del durmiente, donde se descarga la fuerza rueda-riel y surgen oscilaciones a la frecuencia del sistema de vías.

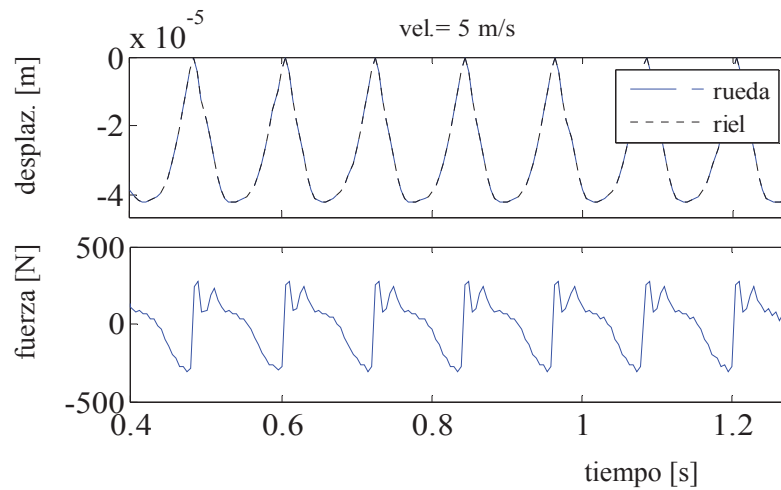


Figura 25: Desplazamientos del riel y fuerza de interacción rueda-riel, velocidad 5 m/s

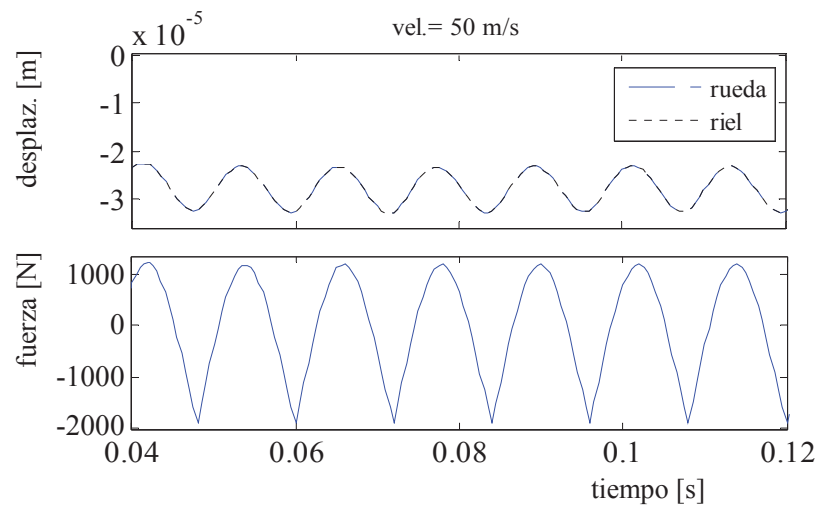


Figura 26: Desplazamientos del riel y fuerza de interacción rueda-riel, velocidad 50 m/s

mentar la velocidad, ver Figura 26, se corre la línea media de desplazamientos por un efecto de aplastamiento de los pads de los rieles, mientras que la curva de respuesta tiende a parecerse a una armónica pura. Por otro lado las fuerzas crecen 5 veces para un aumento de velocidad de factor 10, y presentan una forma de semiseno.

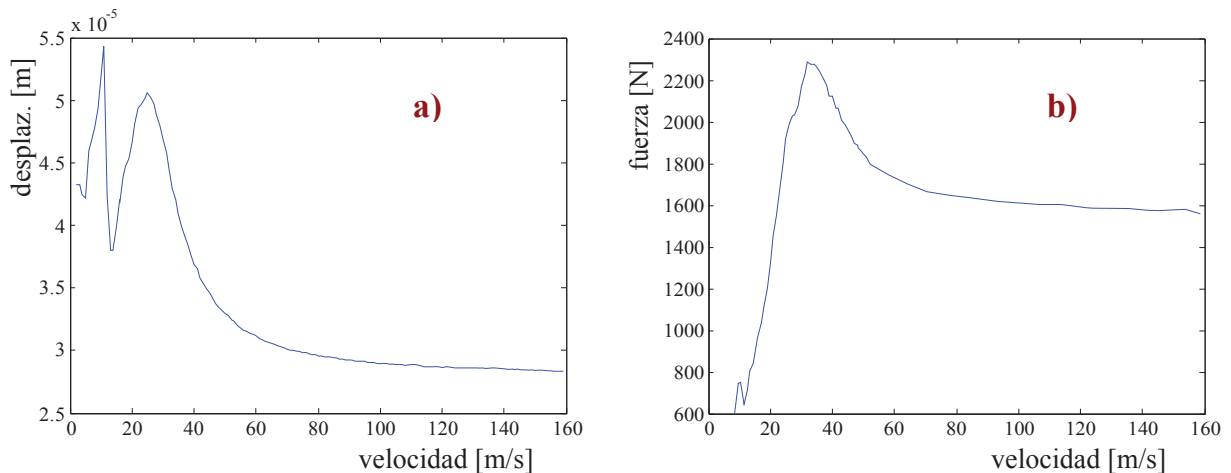


Figura 27: Desplazamientos máximos del riel en función de la velocidad

Finalmente en la [Figura 27a](#) se presenta una curva de tendencia de desplazamientos vs. velocidad del tren y en la [Figura 27b](#) se muestra la variación de la fuerza rueda-riel en las mismas condiciones de estudio. Tanto el desplazamiento como la fuerza están acotadas con la velocidad del tren, lo que representa una propiedad favorable en el diseño de sistemas de vías rápidas.

## 5 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo sencillo pero completo del sistema tren-vía, con el objeto de analizar la respuesta del sistema provisto de losas flotantes de diferentes frecuencias propias y a efectos comparativos. Se utilizó un modelo subestructurado del sistema de tren y vías, donde se explicitó la fuerza de interacción rueda-riel. El modelo del sistema de vías del tipo continuo permitió obtener una solución cerrada de bajo costo computacional. De esta manera se llevó a cabo un análisis del comportamiento del sistema completo. Además de la capacidad de análisis que posibilita la formulación utilizada, se calcularon los desplazamientos del riel en variadas configuraciones, que tienen especial importancia en la dinámica y estabilidad del tren, mientras que por medio de los desplazamientos de la losa también se calcularon la fuerza transmitida al suelo de fundación y la transmisibilidad.

Se comprobó que el perfil de desplazamientos generado en el terreno no sufre cambios considerables por efecto de la velocidad para la carga estática, y tampoco para cargas armónicas de frecuencia por debajo de la frecuencia de corte (frecuencia propia de la losa) hasta velocidades de tren rápido actuales. Para frecuencias mayores que la primera frecuencia de corte las ondas sufren el efecto Doppler y sus magnitudes sufren variaciones que dependen de la frecuencia propia de la losa, pero manteniéndose por debajo del pico de respuesta correspondiente a velocidad nula y frecuencia propia del sistema tren-vía.

Los análisis efectuados muestran que el efecto de la velocidad se ve reflejado en la respuesta como un adelantamiento (disminución de la frecuencia de ocurrencia) de las frecuencias propias del sistema de vía. Si bien el análisis de la flexibilidad de la subestructura del sistema de vías por separado muestra que este efecto resulta negativo para la utilización de losas de muy baja frecuencia, el análisis del sistema acoplado tren-vía demuestra lo contrario y posiciona al uso de losas de baja frecuencia como favorable. En efecto, su utilización no genera un aumento apreciable de los desplazamientos del riel en relación a losas flotantes de apoyo más rígido, y se obtienen desplazamientos de losa del mismo orden de magnitud, exceptuando en su frecuencia propia. Por otro lado y para el ejemplo utilizado, se observan mejoras en las atenuaciones de la fuerza transmitida al suelo de aproximadamente más de 10 dB en el rango de frecuencias 10-40 Hz con una leve incremento en las muy bajas frecuencias, debido a la inevitable resonancia.

El modelo propuesto es adecuado para el cálculo de la respuesta del sistema rueda-riel para irregularidades de rueda y vía, incluyendo el efecto de rueda plana, aunque es obvio que el modelo lineal utilizado es útil en el cálculo de frecuencias bajas y medias pero encuentra limitaciones en altas frecuencias, por no modelar gaps rueda-riel y no utilizar un modelo de contacto específico. En el caso de vibraciones paramétricas de vía, se demuestra que tanto los desplazamientos como la fuerza rueda-riel presentan un máximo en un rango de velocidad cercano a la velocidad asociada con la frecuencia propia del sistema tren-vía y decrecen con la velocidad por lo que se establece un límite natural conveniente para trenes de alta velocidad.

Los resultados obtenidos muestran la consistencia de la formulación y del modelo, mientras que la solución numérica resulta de muy bajo costo computacional.

**REFERENCIAS**

- Chen, Y.H. and Shiu, Z.M., Resonant curves of an elevated railway to harmonic moving loads. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 4 (2):237–257, 2004.
- Crockett, A.R. and Pyke, J. R., Viaduct design for minimization of direct and structure-radiated train noise. *Journal of Sound and Vibration*, 231:883–897, 2000.
- Cui, F. and Chew C.H., The effectiveness of floating slab track System – Part I , receptance method. *Applied Acoustics* 61: 441–453, 2000.
- Duffy, D.G., The response of an infinite rail road track to a moving, vibrating mass. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 57: 66–73, 1990.
- Fryba, L., History of Winkler Foundation. *Vehicle System Dynamics Supplement*, 24, 7–12, 1995.
- Hui, C.K. and Ng, C.F., The effects of floating slabs bending resonance on the vibration isolation of rail viaduct. *Applied Acoustics*, 70: 830–844, 2009.
- Hussein, M.F.M. and Hunt, H.E.M., An insertion loss model for evaluating the performance of floating-slab track for underground railway tunnels. *10<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration*, Stockholm, Sweden, 2003.
- Hussein, M.F.M. and Hunt, H.E.M., Modelling of floating-slab tracks with continuous slabs under oscillating moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 297:1–2, 37-54, 2006.
- Johansson, A., Out-of-round railway wheels—assessment of wheel tread irregularities in train traffic. *Journal of Sound and Vibration*, 293: 795–806, 2006.
- Knothe, K., Grassie, S.L. and Elkins, J.A., *Interaction of Railway Vehicles with the Track and its Substructure*, Swets & Zeitlinger B. V., 1995.
- Kuo, C.M., Huang, C.H. and Chen, Y.Y., Vibration characteristics of floating slab track. *Journal of Sound and Vibration*, 317: 3–5, 11, 1017–1030, 2008.
- Lombaert, G., Degrande, G., Vanhauwere, B., Vandeborgh, B and Francois, S., The control of ground-borne vibrations from railway traffic by means of continuous floating slabs. *Journal of Sound and Vibration*, 297:3–5, 946–961, 2006.
- Mathews, P.M., Vibrations of a beam on elastic foundation. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 38: 105–115, 1958.
- Mathews, P.M., Vibrations of a beam on elastic foundation II. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 39: 13–19, 1959.
- Saurenman, H. and Phillips, J., In-service tests of the effectiveness of vibration control measures on the BART rail transit system. *Journal of Sound and Vibration*, 293: 3–5, 888–900, 2006.
- Stuardi, J.E., Ceballos, M.A. y Massa, J.C., Transmisibilidad de losas aisladas de vibraciones y sometidas a trenes de ondas armónicas. *Mecánica Computacional*, 28: 815–840, 2009.
- Wu, T.X. and Thompson, D.J., A hybrid model for the noise generation due to railway wheel flats. *Journal of Sound and Vibration* , 251 (1): 115–139, 2002.