

A HUMAN KNEE JOINT MODEL BASED ON SCREW THEORY AND ITS RELEVANCE FOR PREOPERATIVE PLANNING

Daniel Alejandro Ponce Saldias^{a,b}, Carlos Rodrigo de Mello Roesler^b and Daniel Martins^a

^aLaboratório de Robótica, Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Universitário, Trindade, CEP: 88040-900, Florianópolis/SC, Brasil, danielpo25@gmail.com, danielemc@gmail.com, <http://www.robotica.ufsc.br>

^bLaboratório de Engenharia Biomecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Hospital Universitário, Campus Universitário, Trindade, CEP: 88040-900 Florianópolis/SC, Brasil, rroesler@hu.ufsc.br, <http://www.lebm.ufsc.br>

Keywords: Biomechanics, computational modeling of the knee, preoperative planning, mechanisms, Davies method.

Abstract. The human knee joint is subjected to a high demand when performing its biomechanical function and injuries are frequent. Rupture of the anterior cruciate ligament (ACL) is the most common injury of human knee and causes great instability to it, decreased functional ability as well as degeneration of the menisci and adjacent articular cartilage. Cartilage problems and ligament injuries are treated surgically using grafts in replacement of the ligaments, in case of ligament reconstruction, or using prosthesis, in case of osteoarthritis.

The surgical treatment for injuries involves the knee joint surgery, physiotherapy and rehabilitation procedures to restore the patient's functional abilities of the knee. For the surgery, the orthopedic surgeon must plan the surgery in order to obtain better results postoperatively. The preoperative planning is a critical step in selecting the surgical technique and definition of parameters to be used in surgery for each patient and thus can directly affect the results of surgery.

For an appropriate preoperative planning, the orthopedic surgeon needs to know the exact problem to be solved, possible surgical solutions and the expected consequences for each solution.

This work propose a methodology for computational mechanical modeling of the knee based on the theory of mechanisms, screw theory and the Davies method, in order to assist the preoperative planning and provide to the orthopedic surgeon objective information simulated by model that assist in medical decision making.

1 INTRODUÇÃO

As lesões de joelho mais frequentes no âmbito esportivo correspondem à ruptura do ligamento cruzado anterior (LCA) (Woo et al., 2006b).

O tratamento para estes joelhos lesados envolvem intervenções cirúrgicas, fisioterapia e reeducação do paciente para recuperar as habilidades funcionais do joelho. Quando é indicada a intervenção cirúrgica, os médicos ortopedistas têm de planejar a maneira a proceder nesta. Daqui, o planejamento pré-operatório é um passo crítico no tratamento do joelho e pode afetar diretamente os resultados da cirurgia.

Para seguir um planejamento pré-operatório satisfatório do LCA, o médico ortopedista precisa do apoio de ferramentas para conhecer os seguintes requisitos: determinação do problema a resolver, determinação das possíveis soluções cirúrgicas e das consequências esperadas para cada solução.

Para determinar estes requisitos, é de grande importância conhecer a força *In Situ*. Por definição a força *In Situ* é a força que é levada pelo ligamento (ou enxerto) em resposta a uma carga aplicada no joelho. A força *In Situ* no joelho intacto caracteriza a função do ligamento em resistência frente a uma carga externa aplicada (Woo et al., 2006a,b).

Um dos propósitos principais deste trabalho é dar apoio ao médico ortopedista para que conheça estes requisitos, mediante as informações fornecidas por um modelo mecânico bidimensional do joelho, a ser desenvolvido com base na teoria de mecanismos, teoria de helicoides e no método de Davies. O presente modelo permite simular as posições, velocidades e forças *In Situ* de um LCA saudável no plano sagital. Para a análise da reconstrução ligamentar, o modelo permite também simular a força *In Situ* do enxerto de substituição do LCA, e a pré-tensão com que é fixado o enxerto no osso, em função do local de incisão no plano sagital.

1.1 Contextualização do trabalho

O alto número de operações e implantação de próteses de joelho realizadas cada ano (Sancisi and Parenti-Castelli, 2010), faz que o joelho seja uma das articulações do corpo humano mais estudada. Por isto, nos últimos trinta anos vários estudos têm sido desenvolvidos para definir modelos do joelho baseados em teoria de mecanismos.

Tem-se demonstrado que esses modelos mecânicos fornecem informações adicionais aos médicos ortopedistas em vários aspectos do planejamento pré-operatório, como é o diagnóstico (Sancisi and Parenti-Castelli, 2010; Olanlokun and Wills, 2002), a decisão da técnica cirúrgica específica a executar (Sancisi and Parenti-Castelli, 2010; Olanlokun and Wills, 2002), o conhecimento das consequências da aplicação da técnica cirúrgica (Olanlokun and Wills, 2002) e o protocolo de fisioterapia no pós-operatório (Sancisi and Parenti-Castelli, 2011b). A Figura 1 representa esquematicamente estes importantes aspectos do planejamento pré-operatório.

Especificamente, os modelos de joelho baseados em teoria de mecanismos podem ser aplicados no planejamento de reconstrução de ligamentos, superfícies articulares e osteotomia (Olanlokun and Wills, 2002). Além disso são indispensáveis para o projeto de próteses (Sancisi and Parenti-Castelli, 2010; Ottoboni et al., 2005; Sancisi et al., 2011), síntese de órteses (Sancisi and Parenti-Castelli, 2010), e para estimar indiretamente forças não mensuráveis (Sancisi et al., 2011) que são internas à articulação, como a força *In Situ*.

Na atualidade a literatura biomecânica apresenta vários modelos, desde os bidimensionais mais simples e mais antigos, até os mais elaborados e modernos modelos tridimensionais, cuja precisão tem crescido continuamente no tempo. Contudo, eles apresentam sérias limitações de aplicabilidade no planejamento pré-cirúrgico, essas limitações também serão explicadas neste

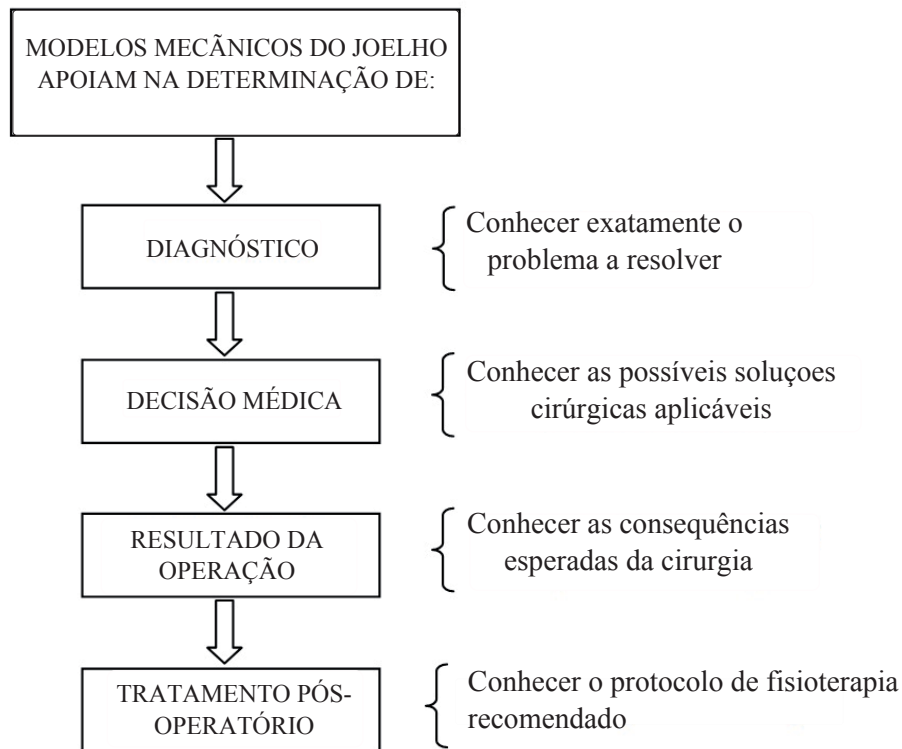


Figure 1: Principais aspectos de um planejamento pré-operatório satisfatório.

trabalho.

No âmbito relacionado à pesquisa de reconstrução de ligamentos e de projeto de dispositivos ortopédicos, alguns autores (Woo et al., 2006a,b) indicam que o futuro da biomecânica deve envolver estudos multidisciplinares integrados, baseados em condições de cargas e cinemáticas mais realistas. Se vislumbram assim inovadores práticas de pesquisa que envolvam paralelamente métodos experimentais e simulações com modelos computacionais de articulações. Na Figura 2, se representa esquematicamente o futuro da pesquisa biomecânica integrada, e é explicada na sequência.

Nos últimos tempos as medições *in vivo* da cinemática articular tem se desenvolvido rapidamente, permitindo realizar medições em atividades cotidianas com uma boa exatidão para posições e orientações, mediante métodos de fluoroscopia dual ortogonal (Li et al., 2009; Torry et al., 2011), cinemetria (Woo et al., 2006a,b; Wang and Zheng, 2010) e por sistemas de medição do tipo *Inertial Measurement Unit* conhecidos também como IMU (Madgwick, 2010; Madgwick et al., 2011).

Desde que os dados cinemáticos *in vivo* de articulações são coletados, eles podem ser reproduzidos posteriormente em espécimes cadavéricos por sistemas de medição de força semi-automatizados e robóticos (parte superior esquerda da Figura 2). Estes sistemas de medição permitem obter experimentalmente as forças as quais são submetidas estruturas anatómicas articulares específicas em função de uma cinemática (*in vivo*) aplicada (Woo et al., 1998; Howard et al., 2007). Neste âmbito Woo et al. (1998, 2004, 2006a,b) apresenta uma inovadora técnica de medição da força *In Situ* no LCA, mediante um sistema robótico que, combinado com um sensor de força universal UFS, consegue medir as forças internas dos ligamentos como resposta à força aplicada pelo mesmo robô.

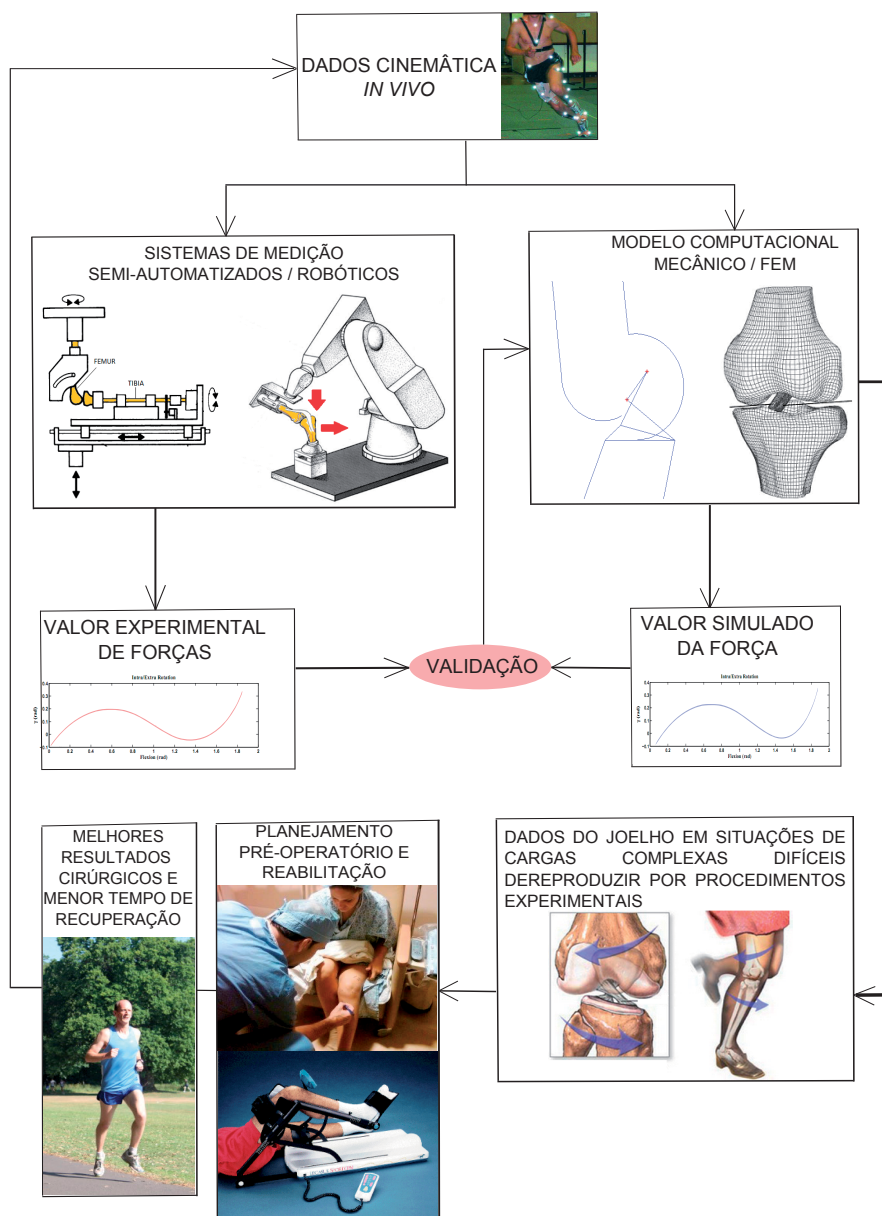


Figure 2: Esquema de estudo biomecânico integrado, como futuro da biomecânica, baseado em (Woo et al., 2006a,b).

Em outra abordagem, construí-se o modelo computacional da articulação de um paciente específico, seja modelado por elementos finitos ou por teoria de mecanismos (parte superior direita da Figura 2). Estes modelos podem ser submetidos aos mesmos dados cinemáticos *in vivo* já reproduzidos nos sistemas de medição de força semi-automatizados e robóticos. Desta forma o modelo computacional fornece o resultado das forças de elementos anatómicos específicos em questão. Aprimora-se e valida-se o modelo computacional, comparando os próprios resultados com os resultados experimentais de forças, de maneira a fazer coincidir ambos os resultados.

O modelo validado permitiria prever forças internas e deformações nos enxertos, ligamen-

tos e outras estruturas do joelho durante cargas mais complexas que seriam difíceis de obter por procedimentos experimentais de laboratório.

Finalmente pode ser possível desenvolver uma base de dados em relação ao funcionamento de enxertos, próteses e ligamentos de interesse no joelho; baseando-se em dados específicos do paciente (idade, gênero, geometria, etc.) para elucidar mecanismos de lesão das estruturas anatômicas, *customizar* um planejamento pré-operatório específico, e prescrever protocolos de reabilitação no pós-operatório (parte inferior da Figura 2).

Acredita-se que os estudos biomecânicos integrados, que envolvam a utilização de modelos mecânicos computacionais validados por dados experimentais, forneceriam a médicos ortopedistas uma valiosa informação para o planejamento pré-operatório e prescrição de uma reabilitação adequada no pós-operatório. Istos estudos biomecânicos integrados contribuiriam para melhorar os resultados da cirurgia e diminuir o tempo de recuperação do paciente.

1.2 Motivação

Na cirurgia de substituição do ligamento cruzado anterior (LCA) existe a necessidade por parte dos médicos ortopedistas de:

- Definir cientificamente o melhor ponto para realizar a inserção do novo enxerto que devolva a funcionalidade de um LCA intacto.
- Conhecer a pré-tensão com que é fixado o enxerto no osso.
- Conhecer qual é a força que é levada pelo ligamento (ou enxerto) em resposta a uma carga aplicada no joelho. Esta força é chamada de força *In Situ*.

A busca da posição do enxerto que permita obter forças *In Situ* similares às de um ligamento intacto, tendo em conta a especificidade de cada paciente e o apoio para decisão médica, é a motivação que deu início a este trabalho.

1.3 Descrição do Problema

A determinação da melhor posição para inserção de enxerto de ligamento, ainda é uma controvérsia, principalmente na reconstrução do LCA. A localização errada do enxerto pode produzir altas tensões ou frouxidão no enxerto e ligamentos adjacentes, e inclusive lesões nos meniscos, comprometendo seriamente a reconstrução do LCA.

Outro parâmetro que influencia fortemente o resultado da reconstrução ligamentar e que ainda é escopo de pesquisa (Previgliano, 2010; Piedade et al., 2006) é a magnitude da pré-tensão de fixação do enxerto, na hora de ser posicionado no fêmur e na tíbia. Altas tensões nos enxertos afetam a funcionalidade do mesmo enxerto e do joelho como sistema (Pena et al., 2006).

Assim, as pesquisas baseadas em simulações computacionais realizadas até hoje, para determinar estes parâmetros do projeto pré-operatório, são realizadas mediante modelagem por elementos finitos (Bacarim Pavan, 2010; Trilha Junior, 2006; Donahue et al., 2002; Halloran et al., 2005; Bendjaballah et al., 1997; Gardiner and Weiss, 2003; Godest et al., 2002; Guo et al., 2009; Bahraminasab et al., 2010; Hashmi, 2007; San Servolo, 2011; TODO et al., 2007; Willing, 2011; Bougherara et al., 2009; Shi, 2007), e por modelagens computacionais baseados em teoria de mecanismos (Wilson and O'Connor, 1997; Wilson et al., 1998; Huson et al., 1989; Gregorio and Parenti-Castelli, 2006; Parenti-Castelli et al., 2004; Sancisi and Parenti-Castelli, 2011a, 2010, 2011b; Sancisi et al., 2011).

A modelagem por elementos finitos tem a vantagem de representar fielmente a anatomia do joelho para análise cinemático, dinâmico e estático, mas precisa de um alto tempo de processamento. Em contraste, a modelagem por teoria de mecanismos apresenta um curto tempo de processamento devido á simplicidade da representação das diferentes estruturas anatômicas como elos rígidos. Porém, uma exagerada simplicidade poderia não representar fielmente a anatomia em análise.

Na atualidade a modelagem computacional do joelho baseada em teoria de mecanismos é focada unicamente na cinemática de posição do joelho, de maneira a sintetizar e otimizar um mecanismo capaz de reproduzir uma trajetória passiva muito próxima à de um joelho real. Devido a que o enfoque destas atuais modelagens está na cinemática de posição, não fornecem informações das forças do sistema, precisando de análises adicionais para este fim. Isto é de especial atenção pela complexidade do problema, pois a função dos ligamentos varia dependendo do ângulo de flexão do joelho. Embora existam alguns modelos que são baseados em teoria de mecanismos que incluem geometrias anatômicas complexas e a análise das forças envolvidas, estes recaem novamente no alto tempo de processamento.

Contudo, hoje são aplicados na cirurgia ortopédica métodos baseados puramente em experiências práticas publicadas anteriormente, que demonstraram bons resultados para joelhos representativos de uma população estatisticamente significativa. Mas os problemas persistem quando essas técnicas cirúrgicas são aplicadas em joelhos específicos ou que desviam da anatomia comum da população estudada. Em outras palavras, a falta de um modelo *customizado* que solucione os problemas de variação anatômica de cada sujeito é ainda um tema controverso e por resolver, pois o procedimento que teve sucesso em um paciente, não necessariamente terá sucesso em outro.

1.4 Justificativa

A vantagem do uso de modelagens baseados em teoria de mecanismos é que: uma estrutura anatômica pode ser discretizada como um elo mecânico que compõe o mecanismo de modelagem, permitindo fazer uma correspondência dos resultados de força e cinemática entre o elemento mecânico e o elemento anatômico de interesse com baixo custo computacional.

Em contraste com a metodologia de modelagem por teoria de mecanismos, está a modelagem por elementos finitos, onde vários elementos (centenas ou milhares) são computados para representar uma única estrutura anatômica em particular. Isto consome um alto tempo de processamento.

O método dos elementos finitos está baseado no cálculo de "pequenas" deformações para o cálculo de deslocamentos, sendo esta uma técnica analítica mais elaborada, enquanto que a teoria de mecanismos é uma técnica analítica, geométrica e projetiva mais simples para o cálculo de deslocamentos.

Além disso, fica em evidência a vantagem da modelagem por teoria de mecanismos, quando assume-se que cada ligamento do joelho se comporta isometricamente, ou seja, o comprimento do ligamento não varia ao serem aplicadas forças (Parenti-Castelli et al., 2004; Sancisi and Parenti-Castelli, 2010, 2011a; Sancisi et al., 2011; Kapandji et al., 2000) o que facilita a modelagem deles como elos mecânicos rígidos.

O método de Davies, por sua parte, fornece uma abordagem única e sistematizada para a análise cinemático e estático do modelo mecânico do joelho, sem ter que precisar de análises adicionais para o cálculo das forças envolvidas para cada posição, permitindo ao mesmo tempo a customização do modelo. Além disso, a análise em conjunto das velocidades e das forças para cada posição, são importantes para conhecer a relação velocidade-ângulo de pressão, no ponto

de contacto entre a tíbia e o fêmur, no âmbito de projeto de prótese e otimização.

Se justifica deste modo o desenvolvimento de um modelo customizado de joelho que solucione os problemas de variação anatômica de cada sujeito, utilizando a modelagem baseado em teoria de mecanismos, teoria de helicoides e método de Davies, permitindo assim uma representação completa das posições, velocidades e forças de cada estrutura anatômica, mantendo as vantagens de uma modelagem de processamento leve, mas sem deixar de ser representativo de cada estrutura anatômica do joelho.

1.5 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é propor e implementar uma metodologia para modelagem computacional do joelho no plano sagital, baseado em teoria de mecanismos, de helicoides e no Método de Davies.

Esta metodologia será utilizada para implementar modelos customizados do joelho, que forneçam informações para auxiliar a decisão médica no planejamento pré-operatório.

1.6 Estrutura do Trabalho

Por se tratar de um trabalho multidisciplinar, este estudo começa com os fundamentos teóricos biológicos, onde se aborda brevemente a biomecânica do joelho no plano sagital. Na seguinte sessão são apresentados os fundamentos teóricos em robótica para a análise e modelagem do joelho. A sessão quatro apresenta a metodologia proposta para solucionar a problemática. Consta da aplicação de método de Davies para obtenção da cinemática diferencial e a estática do mecanismo que modela o joelho. Na sessão 5 valida-se do modelo proposto, comparando os valores simulados de força *In Situ* do LCA com os valores experimentais obtidos por Woo et al. (1998). Finalmente apresenta-se a conclusão do trabalho.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS BIOLÓGICOS: FUNÇÃO MECÂNICA DOS LIGAMENTOS CRUZADOS

A função da articulação do joelho é resultado da interação entre as diferentes partes que o compõem. Estes componentes incluem a patela, fêmur, tíbia, ligamentos, cápsula, cartilagem, meniscos e os músculos. A interdependência de estas estruturas é tal que a lesão de qualquer uma delas leva a deterioração da articulação como conjunto (Woo et al., 1998). Os ligamentos são particularmente vulneráveis, pois eles são objeto de entorses em praticamente todas as lesões do joelho, e principalmente o LCA. Por esta razão o presente estudo da biomecânica do joelho tem como foco principal os ligamento cruzado anterior.

Para a análise bi-dimensional do joelho, é considerado que os ligamentos cruzados comportam-se como cordas inextensíveis, ou elos isométricos unidos ao osso (fêmur e tíbia) mediante articulações rotativas. Esta consideração (Kapandji et al., 2000; Wilson and O'Connor, 1997; Wilson et al., 1998; Huson et al., 1989; Gregorio and Parenti-Castelli, 2006; Parenti-Castelli et al., 2004; Sancisi and Parenti-Castelli, 2011a, 2010, 2011b; Sancisi et al., 2011), tem a vantagem de esclarecer a ação mecânica geral de um ligamento, porém não permite conhecer o comportamento em forma detalhada, pois não tem em conta os efeitos visco elásticos, nem das demais estruturas anatômicas adjacentes.

A geometria dos ligamentos cruzados determina o perfil côndilo-troclear no plano sagital e também nos outros dois planos do espaço (O'Connor et al., 1989). Globalmente, os ligamentos cruzados asseguram a estabilidade ântero-posterior do joelho ao mesmo tempo que permitem os movimentos de flexão mantendo as superfícies articulares em contato. A sua função pode

ser ilustrada com um modelo mecânico (Figura 3) fácil de visualizar: duas pranchas A e B unidas entre si por elos (ab e cd) de juntas rotativas nos extremos, que permitem o movimento relativo entre as pranchas, equivalente ao movimento que realiza um mecanismo de quatro barras cruzadas. Desta forma, os ligamentos cruzados estão representados em forma de elos, como mostrado na Figura 3. Ali, o elo *cd* representa o ligamento cruzado anterior (LCA), e o elo *ab* representa o ligamento cruzado posterior (LCP).

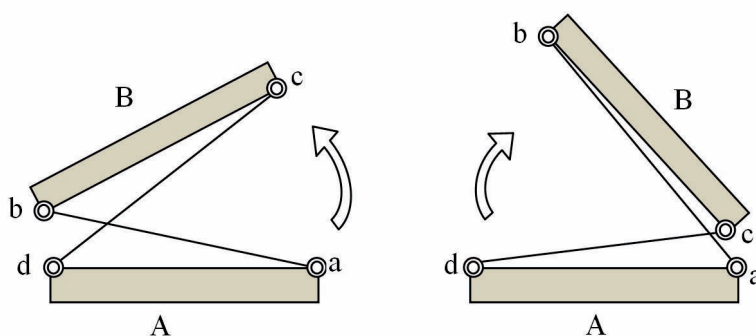


Figure 3: Modelo mecânico dos ligamentos cruzados, baseado em (Kapandji et al., 2000).

Mantendo a nomenclatura da Figura 3, a Figura 4 representa o LCA e o LCP como os elos *cd* e *ab*, respectivamente. Por sua vez, o elo *ad* representa o Elo Tibial (fixo à tibia), e *bc* representa o Elo Femoral (fixo ao fêmur). Partindo da posição de extensão (Figura 4a), o ligamento cruzado anterior LCA (*cd*) está tenso e é um dos freios da hiperextensão. Na sequência, a flexão faz bascular o Elo Femoral *bc* (Figura 4b), enquanto o LCP (*ab*) se endireita e o LCA (*cd*) se horizontaliza. A partir do momento em que a flexão está entre os 70° (Figura 4b), e 140° (Figura 4c), o LCP se endireita quase verticalmente e se tensiona, mas o LCA se horizontaliza e se distende (Kapandji et al., 2000).

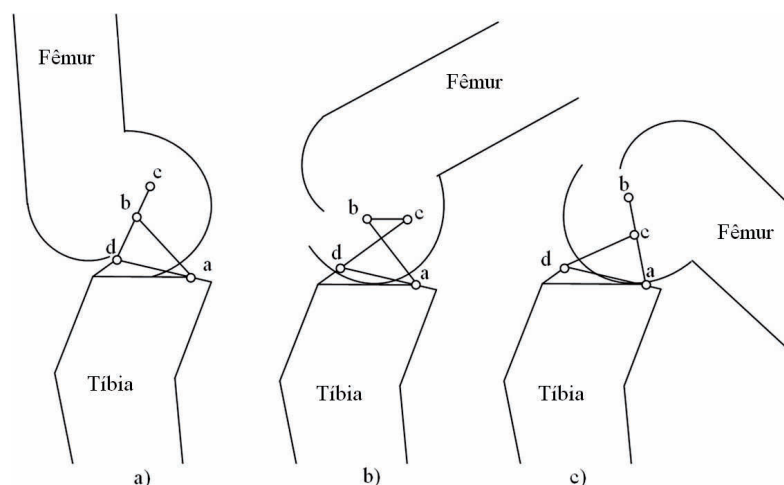


Figure 4: Modelo mecânico dos ligamentos cruzados, com o joelho em flexão a: a) 0° ou totalmente estendido, b) 70°, e c) 140°. Baseado em (O'Connor et al., 1989).

Como mostrado na Figura 4, o côndilo femoral se encontra no extremo distal do fêmur, e articula com a superfície da tibia, ou platô tibial. O movimento dos côndilos femorais so-

bre a superfície tibial combina *rolamento* e *deslizamento* (Kapandji et al., 2000). Durante os primeiros 30° de flexão o fêmur *rola* sobre a superfície tibial (Bacarim Pavan, 2010), fenômeno conhecido como *rollback* (Figura 5), e em ângulos de flexão superiores a 30°, os côndilos femorais tendem a manter um ponto fixo de rotação sobre a superfície tibial. O movimento de *rolamento* pode ser facilmente entendido em termos da operação dos ligamentos cruzados, mas o deslizamento envolve uma maior complexidade. Os ligamentos cruzados solicitam aos côndilos femorais de forma que se deslizem sobre a superfície tibial em sentido inverso ao do seu *rolamento* (Kapandji et al., 2000). Durante a flexão, o LCA age dirigindo fêmur para frente. Então, o LCA é responsável pelo deslizamento do côndilo femoral para diante, associado ao seu *rolamento* para trás. Visto desta forma, pode-se dizer que o LCA é o principal limitador do deslocamento anterior do da tibia em relação ao fêmur, ou seja, evita que a tibia avance para diante em relação ao fêmur. Outra importante função do LCA é limitar a rotação axial do fêmur em relação à tibia.

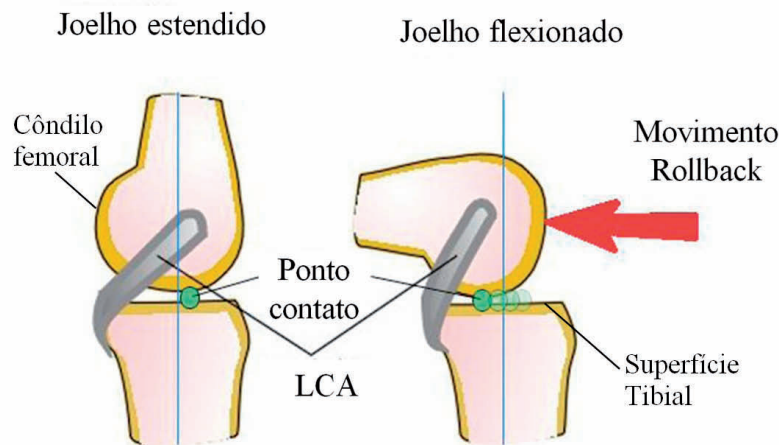


Figure 5: Movimento de *rollback* do joelho. Baseado em (Bacarim Pavan, 2010).

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS EM ROBÓTICA

Para realizar uma modelagem do joelho baseado em teoria de mecanismos, cada estrutura anatômica do joelho deve possuir uma representação completa das posições, velocidades e forças que acontecem na biomecânica real da articulação.

Em nível diferencial, podemos utilizar as leis de circulação de Kirchhoff adaptadas e aplicadas a mecanismos por Davies (Davies, 1981). Estas leis permitem a análise da cinemática diferencial (direta e inversa) e a análise da estática do mecanismo representativo da articulação. Para obter a cinemática de posição dos ligamentos, utiliza-se a Equação de Freudenstein (Freudenstein, 2010) e Transformações Rígidas (Selig, 1992), conseqüentemente são ingresados os dados de posição e orientação no método de Davies de forma contínua. Permite-se assim, que a cinemática diferencial, cinemática de posição e forças do mecanismo sejam conhecido mediante uma metodologia unificada.

O uso do método de Davies é possível pelo conhecimento prévio da teoria de helicoides, que também será revista nesta sessão.

3.1 Método de Davies

O método de Davies (Davies, 1981) adapta a lei de Kirchhoff para resolver a cinemática diferencial e a estática dos mecanismos. A lei das tensões de Kirchhoff estabelece que a soma algébrica da diferença de potencial elétrico em um circuito fechado é nula. Assim para a cinemática diferencial, a lei de circulação de Davies ou **Lei dos Circuitos** estabelece que a soma algébrica das velocidades relativas de pares cinemáticos de uma cadeia cinemática fechada é zero.

Entretanto, a **Lei das Correntes** de Kirchhoff diz que a soma algébrica das correntes que entram e saem de um nó é zero. De forma análoga para estática dos mecanismos, Davies estabelece que a soma algébrica das heliforças que pertencem a um mesmo corte (realizado num subconjunto de acoplamentos) é zero, sendo esta chamada a **Lei dos Cortes**.

Assim, o método demonstrado nesta sessão, utiliza as leis de Kirchhoff para construir a relação de dependência das incógnitas. As características físicas tais como forças e velocidades, entre outros, são incluídas na representação por helicoides.

3.2 Teoria geral de helicoides

Um helicóide é um elemento geométrico que é definido por uma reta direcionada (eixo) e um passo h associado, que pode servir para representar grandezas mecânicas (Campos et al., 2005, 2009; Campos, 2004). É dito *helicóide normalizado* $\$$ quando a reta direcionada é representada por um vetor normalizado. O helicóide pode ser expressado convenientemente a través das seis coordenadas homogêneas de Plücker, como mostrado na equação 1, onde \vec{S} é o vetor direção ao longo do eixo helicoidal, \vec{S}_0 é o vetor posição de qualquer ponto do eixo helicoidal em relação à origem do sistema e L, M, N, P^*, Q^* e R^* são as coordenadas homogêneas de Plücker (Campos et al., 2005, 2009).

$$\$ = \left(\vec{S}; \vec{S}_0 \times \vec{S} + h\vec{S} \right)^T = (L, M, N; P^*, Q^*, R^*)^T \quad (1)$$

3.3 Helicoides na cinemática

O estado instantâneo de movimentos de um corpo rígido relativo a um sistema inercial pode ser descrito por um helicóide chamado de heligiros, constituído por duas componentes principais: uma velocidade angular diferencial ω em torno do eixo helicoidal, e uma velocidade translacional diferencial τ coincidente ao mesmo eixo. O passo do heligiros h é descrito como o quociente τ/ω . Na interpretação cinemática do helicóide, as coordenadas homogêneas de Plücker mostradas na equação 1 podem ser reescritas como segue na equação 2:

$$\$ = (L, M, N; P^*, Q^*, R^*)^T = \left(\vec{S}; \vec{S}_0 \times \vec{S} + h\vec{S} \right)^T = \left(\vec{\omega}; \vec{V}_P \right)^T \quad (2)$$

O vetor \vec{V}_P está constituído por duas componentes principais: a velocidade paralela ao eixo helicoidal $\tau = h\omega$, e a velocidade normal ao eixo helicoidal $\vec{S}_0 \times \omega$. O super índice M no símbolo de helicóide $\M significa que o helicóide está associado aos movimentos (cinemática).

Normalizando o heligiros $\M , é possível separá-lo em um elemento $\hat{\M sem nenhuma grandeza mecânica, e em uma magnitude φ com unidades de velocidade angular, desta forma $\$^M = \hat{\$}^M \varphi$.

O helicóide pode assumir duas condições de acordo com o valor do passo. Quando o passo é nulo $h=0$, então $\tau=0$ e $\vec{V}_P = \vec{S}_0 \times \vec{\omega}$, obtendo-se o um heligiros que representa o movimento de rotação pura. Quando o helicóide tem o passo $h = \dots$, a velocidade angular é nula $\omega=0$, obtendo-

se um heligiro que representa um movimento de translação pura (Guenther et al., 2008; Simas et al., 2007; Campos et al., 2005, 2009; Campos, 2004).

Em um acoplamento, cada movimento unitário é representado por um heligiro independente. Todos os heligiros de um mecanismo podem ser dispostos na chamada *matriz dos Movimentos*, denotada por $[M_D]_{\lambda \times F}$. Onde λ é a ordem do espaço e F são os movimentos unitários de cada junta. Normalizando os heligiros, obtém-se a *matriz dos Movimentos Unitários* $[\hat{M}_D]_{\lambda \times F}$. Por sua vez, as magnitudes dispostas como matriz, compõem o vetor das magnitudes dos movimentos $\left\{ \vec{\Phi} \right\}_{F \times 1}$.

Colocando em prática a **Lei dos circuitos** de Davies, na qual a soma algébrica dos heligiros ao longo de qualquer circuito é zero, um circuito de corpos em movimento no espaço pode ser representado pela equação 3:

$$\sum \$^M = [M_D]_{\lambda \times F} = [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} \left\{ \vec{\Phi} \right\}_{F \times 1} = \left\{ \vec{0} \right\}_{\lambda \times 1} \quad (3)$$

Autores como Campos et al. (2005, 2009) apresentam de forma clara, como plantear o sistema 3 tendo em conta os grafos dos circuitos que determinam a relação topológica do mecanismo. A solução do sistema 3 depende da seleção apropriada das F_N variáveis primárias pertencentes ao vetor $\left\{ \vec{\Phi} \right\}_{F \times 1}$ que geralmente estão relacionadas aos atuadores. Este sistema de equações pode ser particionado entre F_N variáveis primárias e m variáveis secundárias. As variáveis secundárias levam o sub-índice S e as variáveis primárias levam o sub-índice P . O último passo é isolar o vetor das incógnitas Φ_S $m \times 1$, o que resulta na solução cinemática:

$$\left\{ \vec{\Phi}_S \right\}_{m \times 1} = -[\hat{M}_{NS}]_{m \times m}^{-1} [\hat{M}_{NP}]_{m \times F_N} \left\{ \vec{\Phi}_P \right\}_{F_N \times 1} \quad (4)$$

Onde $[\hat{M}_{NS}]$ é a *submatriz de Rede Secundária*, e $[\hat{M}_{NP}]$ é a *submatriz de Rede Primária*. Atribuindo valores às variáveis primárias $[\vec{\Phi}_P]$, é possível obter a solução cinemática, correspondente ao sistema 4.

3.4 Helicoides na estática

O estado de ações de um corpo rígido relativo a um sistema inercial, pode ser descrito por um helicóide chamado de heliforça ou helicóide de ação $\A , constituído por duas componentes principais: um binário \vec{T} paralelo ao eixo ao eixo helicoidal, e um vetor força resultante \vec{R} , cuja linha de ação define o eixo helicoidal (Ball, 1900; Weihmann et al., 2011a,b; Laus, 2012). O binário \vec{T} tem unidades de [força]x[comprimento] equivalente ao produto da força resultante \vec{R} com o passo h .

Em forma similar à cinemática, as coordenadas homogêneas de Plücker (equação 1) podem ser reescritas como seis coordenadas de ação, como mostrado na equação 5. Neste caso é adotada a formação radial, onde as coordenadas L , M e N se posicionam na parte direita da matriz, (na cinemática foi usada a formação axial). O super-índice A em $\A denota que o helicóide é de ação (estática).

$$\$^A = (P^*, Q^*, R^*; L, M, N)^T = \left(\vec{S}_0 \times \vec{R} + h\vec{R}; \vec{R} \right)^T = \left(\vec{T}_P; \vec{R} \right)^T \quad (5)$$

As três primeiros componentes deste vetor, correspondem ao binário \vec{T}_P , e representa um vetor livre que age sobre o corpo rígido em um ponto P instantaneamente coincidente com a

origem O . A força resultante \vec{R} é um vetor linha que atua sobre o eixo helicoidal (Weihmann et al., 2011a,b; Laus, 2012), e corresponde às três últimas componentes do vetor da equação 5.

Normalizando a heliforça $\A , é possível separá-lo em um elemento geométrico $\hat{\A , sem nenhuma grandeza mecânica associada, e em uma magnitude Ψ com unidades de força, desta forma $\$^A = \hat{\$}^A \Psi$.

O helicóide pode assumir duas condições de acordo com o valor do passo. Quando o passo é nulo $h=0$, o heliforça representa o estado de ações puramente de força. Quando o helicóide tem o passo $h =$, significa que a força resultante \vec{R} é nula e o heliforça representa o estado de ações puramente binário. Assim, em um acoplamento cada restrição é representado por um heliforça (Weihmann et al., 2011a,b; Laus, 2012). Também, todos os heliforças de um mecanismo podem ser dispostos na chamada *matriz das Ações*, que é denotada por $[A_D]_{\lambda \times C}$, mostrada na equação, onde C é o grau de restrição bruto da rede de acoplamentos, equivalente à soma de todas as restrições unitárias c_p de cada acoplamento do circuito do mecanismo. Normalizando os heliforças obtém-se a *matriz das Ações Unitárias* $[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$. Por sua vez as magnitudes dispostas como matriz, compõem o vetor das magnitudes das ações $\{\vec{\Psi}\}_{C \times 1}$.

A **Lei dos Cortes** de Davies, estabelece que a soma algébrica dos heliforças que pertencem a um mesmo corte (realizado num subconjunto de acoplamentos) é zero. Assim um corte no espaço λ pode ser representado pela notação matricial de helicóides como mostrado na equação 6:

$$\sum \$^A = [A_D]_{\lambda \times C} = [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} \{\vec{\Psi}\}_{C \times 1} = \{\vec{0}\}_{\lambda \times 1} \quad (6)$$

Da mesma maneira, para um número de k cortes, o sistema 6 fica da seguinte maneira:

$$[\hat{A}_N]_{\lambda, k \times C} \{\vec{\Psi}\}_{C \times 1} = \{\vec{0}\}_{\lambda, k \times 1} \quad (7)$$

Onde $[\hat{A}_N]_{\lambda, k \times C}$ é chamada de *matriz de Ações Unitárias em Rede*.

Autores como Weihmann et al. (2011a,b); Laus (2012) apresentam de forma clara como plantear o sistema 6, tendo em conta os grafos que determinam a relação topológica do mecanismo. A solução do sistema 6 depende da seleção apropriada das C_N variáveis primárias pertencentes ao vetor $\{\vec{\Psi}\}_{C \times 1}$, que geralmente estão relacionadas aos atuadores, a través de forças externas que foram internalizadas. Este sistema de equações pode ser particionado entre C_N variáveis primárias e a variáveis secundárias, onde as variáveis secundárias levam o sub-índice S e as variáveis primárias levam o sub-índice P . O último passo é isolar o vetor das incógnitas Ψ_S $a \times 1$, o que resulta na solução estática:

$$\{\vec{\Psi}_S\}_{a \times 1} = -[\hat{A}_{NS}]_{a \times a}^{-1} [\hat{A}_{NP}]_{a \times C_N} \{\vec{\Psi}_P\}_{C_N \times 1} \quad (8)$$

Onde $[\hat{A}_{NS}]$ é a *submatriz de Rede Secundária*, e $[\hat{A}_{NP}]$ é a *submatriz de Rede Primária*. Atribuindo valores às variáveis primárias $[\vec{\Psi}_P]$ é possível obter a solução estática, correspondente ao sistema 8.

4 MÉTODO PROPOSTO

O método proposto para a modelagem do joelho no plano sagital, começa com a representação do modelo físico da articulação. Do modelo físico, obtém-se as sucessivas posições dos ligamentos no movimento de flexão-extensão do joelho. Na sequência é aplicado o método de

Davies na cinemática diferencial e na estática, para as sucessivas posições dos ligamentos. A análise da cinemática diferencial permite obter as velocidades dos ligamentos em função de uma velocidade de flexão do joelho aplicada. A análise estática permite a obtenção da força *In Situ* (do LCA ou do enxerto) e da magnitude de pré-tensão de fixação do enxerto do LCA, em função de uma carga externa aplicada.

4.1 Representação esquemática: modelo físico do joelho no plano sagital

O modelo físico proposto, está baseado na aproximação experimental apresentada por O'Connor et al. (1989), onde um mecanismo de quatro barras cruzado $abcd$ é superposto aos ligamentos cruzados, como indica a Figura 6. Ali, a , b , c e d são juntas rotativas do mecanismo, o elo ab representa o LCP, o elo cd representa o LCA, o elo ad representa o Elo Tibial (fixo à tibia), e bc representa o Elo Femoral (fixo ao fêmur). O ângulo α indica a orientação do elo cd em relação ao elo tibial, e β é o ângulo de orientação do elo ab em relação ao eixo tibial. I é a intersecção dos ligamentos cruzados e representa o centro de rotação da articulação.

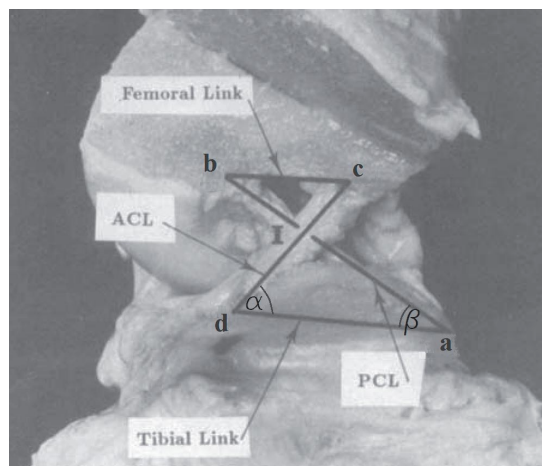


Figure 6: Joelho humano em flexão, com o côndilo femoral lateral removido para expôr os ligamentos cruzados, onde é sobreposto o mecanismo de 4 barras cruzado. Baseado em O'Connor et al. (1989).

O comprimento dos elos do modelo proposto, depende da escolha dos seguintes parâmetros: comprimento do LCA, comprimento do LCP e localização da inserção dos ligamentos no fêmur e na tibia. A determinação destes parâmetros pode ser feita por inspeção de exames de ressonância magnética como mostrado na Figura 7a.

Williams et al. (1991) fez uma exaustiva revisão bibliográfica, que evidenciou a grande faixa de variação dos comprimentos dos ligamentos cruzados no plano sagital, indicando que o comprimento do LCA e do LCP varia entre os 23 e 40 mm. Autores como Bradley et al. (1988); Clement et al. (1989); Crowninshield et al. (1976) e Wang et al. (1973) apresentam estudos com valores de comprimento de ligamentos cruzados. Os valores de comprimento escolhidos para a simulação do modelo proposto foram baseados na literatura, sendo que: $LCA(cd)=25.6mm$, $LCP(ab)=27.6mm$, Elo Femoral(bc)=11mm, Elo Tibial(ad)=25mm.

4.2 Cinemática de posição para os ligamentos cruzados

Nesta sessão calculam-se as posições dos ligamentos cruzados, desde a extensão máxima até a flexão máxima do joelho, como indicado na Figura 4 (0° - 140°). Para este cálculo, são

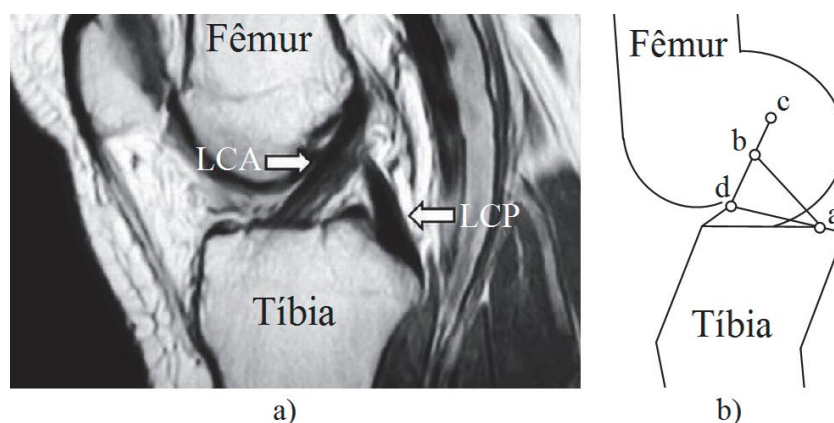


Figure 7: a) Ressonância magnética de um joelho humano em extensão máxima, que demonstra os ligamentos cruzados, baseado em Lykissas et al. (2010). b) Modelo físico do joelho em extensão, equivalente à imagem de ressonância magnética. Baseado em O'connor et al. (1989).

utilizadas a Equação de Freudenstein (Freudenstein, 2010) e Transformações Rígidas (Selig, 1992). A equação de Freudenstein (Freudenstein, 2010) é amplamente usada para a síntese de mecanismos de 4 barras, e no modelo proposto, permite encontrar o ângulo β em função de α (Figura 6).

Considerando que a origem do sistema coordenado é o ponto a , e que os pontos a e d são fixos, podem ser descritas as sucessivas posições dos elos ab e cd . A posição do vetor ab descreve-se como a rotação do ponto b ao redor do ponto a , como mostrado na equação 9, sendo que \vec{S}_{ob_f} é a posição final do ponto b , \vec{S}_{ob} é a posição inicial do ponto b , e $[A_\beta]$ é a matriz homogênea que descreve a rotação do ângulo β em torno do ponto a .

$$\vec{S}_{ob_f} = [A_\beta] \vec{S}_{ob} \quad (9)$$

Da mesma maneira, a posição do vetor cd descreve-se como a rotação do ponto c ao redor do ponto d , como mostrado na equação 10, sendo que \vec{S}_{oc_f} é a posição final do ponto c , \vec{S}_{oc} é a posição inicial do ponto c , e $[A_\alpha]$ é a matriz homogênea que descreve a rotação do ângulo α em torno do ponto d .

$$\vec{S}_{oc_f} = [A_\alpha] \vec{S}_{oc} \quad (10)$$

Ingressando os sucessivos valores de α (desde a extensão máxima até a flexão máxima) nas equações 9 e 10, obtêm-se todas as posições dos ligamentos cruzados, apresentadas na Figura 8. Nesta Figura, \vec{S}_{ob} e \vec{S}_{oc} correspondem as posições iniciais dos pontos b e c na extensão máxima, e \vec{S}_{ob_f} e \vec{S}_{oc_f} correspondem às posições finais dos pontos b e c na flexão máxima do joelho. Os vetores \vec{S}_{oa} e \vec{S}_{od} correspondem às posições dos pontos a e d .

4.3 Cinemática diferencial dos ligamentos cruzados

Nesta sessão calculam-se as velocidades dos ligamentos cruzados para as posições obtidas no item anterior. Para este cálculo será utilizada a Lei de circulação de Davies ou **Lei dos Circuitos** (Davies, 1981). Sendo que o mecanismo de quatro barras é planar, todos os acoplamentos possuem um único movimento unitário, ou velocidade angular $\vec{\omega}$ com orientação perpendicular ao plano. O sistema como conjunto possui 1 DOF, assim impondo uma única velocidade $\vec{\omega}_a$ no ponto a (Figura 6), podem ser obtidas as demais velocidades $\vec{\omega}_b$, $\vec{\omega}_c$, e $\vec{\omega}_d$, correspondentes às

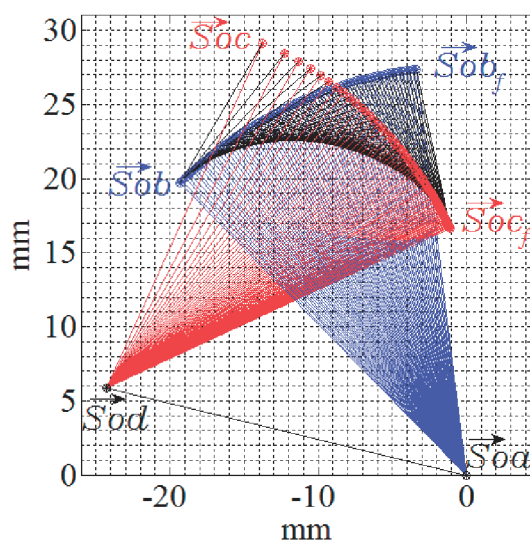


Figure 8: Sucessivas posições dos ligamentos cruzados: LCA em vermelho, LCP em azul, Elo Tibial e Femoral em preto.

velocidades dos pontos de inserção dos ligamentos b , c , e d . Na figura 9a são esquematizadas estas velocidades sobre o modelo proposto.

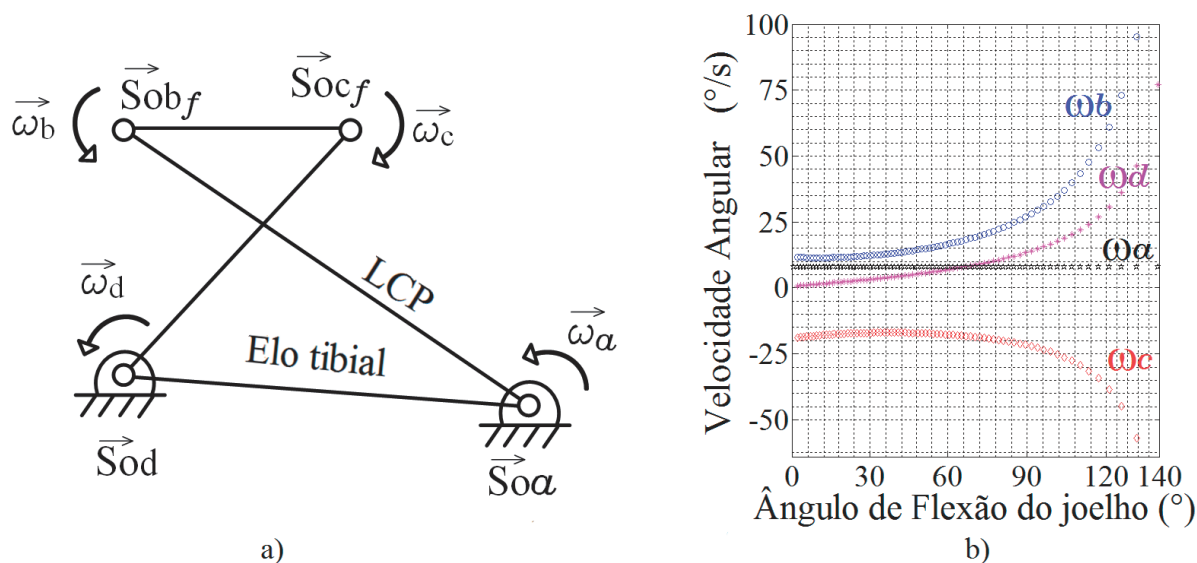


Figure 9: Modelo cinemático diferencial dos ligamentos cruzados: a) Diagrama esquematizado das velocidades $\vec{\omega}$ e dos vetores posição \vec{S}_o no modelo, b) Resultados da simulação cinemático diferencial.

Em relação aos helicoides de cada junta, todas elas possuem passo h nulo, por tanto obtém-se heligiros que representam rotação pura, como indicado na equação 11:

$$\mathcal{H} = \left(\vec{S}; \vec{S}_0 \times \vec{S} \right)^T = \left(\vec{\omega}; \vec{S}_0 \times \vec{\omega} \right)^T \quad (11)$$

Considerando a configuração do sistema e a equação 11, obtém-se os seguintes heligiros para

cada junta (equação 20):

$$\$_a = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_a \\ \vec{0} \end{pmatrix}; \$_b = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_b \\ \vec{S}_{0b_f} \times \vec{\omega}_b \end{pmatrix}; \$_c = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_c \\ \vec{S}_{0c_f} \times \vec{\omega}_c \end{pmatrix}; \$_d = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_d \\ \vec{S}_{0d_f} \times \vec{\omega}_d \end{pmatrix} \quad (12)$$

Como o mecanismo de quatro barras possui um único circuito, composto por 4 velocidades angulares ω_a , ω_b , ω_c , e ω_d , aplica-se a **Lei dos circuitos** de Davies (Davies, 1981):

$$\begin{bmatrix} \hat{\$_a} & \hat{\$_b} & -\hat{\$_c} & \hat{\$_d} \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \\ \omega_d \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \vec{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Conforme à equação 4 pode-se reescrever o sistema 13, de modo que a submatriz de rede primária seja $[\hat{M}_{NP}] = [\hat{\$_a}]$, e a submatriz de rede secundária seja $[\hat{M}_{NS}] = \begin{bmatrix} \hat{\$_b} & -\hat{\$_c} & \hat{\$_d} \end{bmatrix}$. Como $[\hat{M}_{NS}]$ é inversível, as magnitudes das velocidades dos pares secundários $[\vec{\Phi}_S]$ são calculados por:

$$\begin{bmatrix} \omega_b \\ \omega_c \\ \omega_d \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\$_b} & -\hat{\$_c} & \hat{\$_d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\$_a} \end{bmatrix} \vec{\omega}_a \quad (14)$$

Atribuindo um valor à variável primária $\vec{\omega}_a$, é possível obter a solução cinemática, correspondente ao sistema 14.

No modelo proposto, o movimento de flexão do joelho desde 0° até 140° , envolve uma rotação de 40° do LCP em relação ao elo tibial (figura 9a). Se este movimento de flexão é realizado em um tempo de $5(s)$, tem-se que a velocidade do LCP corresponderia a $40/5(^\circ/s) = 8(^\circ/s) = \vec{\omega}_a$. Para a simulação da cinemática diferencial do modelo, é ingressado $\vec{\omega}_a = 8(^\circ/s)$ como dado de entrada, e os resultados são apresentados na figura 9b.

Embora esta simulação não tenha validação por dados experimentais, pode-se verificar que o sentido das velocidades apresentadas na Figura 9b coincide com o modelo das sucessivas posições do mecanismo da Figura 8. Assim, ω_a , ω_b e ω_d produzem um giro positivo, e ω_c produz um giro negativo no mecanismo, seguindo a regra da mão direita.

Para obter as velocidades tangenciais dos ligamentos, basta com extrair a componente inferior $\vec{S}_0 \times \vec{\omega}$ do heligiro $\$_$ correspondente a cada junta (equação 20).

4.4 Estática dos ligamentos cruzados

Nesta sessão se calculam as forças nos ligamentos cruzados por análise estática. Para isto, se modela e simula o procedimento experimental proposto por Woo et al. (1998) para conhecer a força *In Situ*. Para esta modelagem, será utilizada a **Lei dos cortes** estabelecida por Davies (Davies, 1981).

Para entender a modelagem proposta, é necessário conhecer primeiro o procedimento experimental realizado por Woo et al. (1998) (Figura 10a), que se descreve na sequência. Woo et al. (1998) analisou a força *In Situ* do LCA, utilizando oito joelhos de suínos, pela similaridade anatômica com o joelho humano. Estes joelhos foram preparados deixando unicamente a cápsula articular e os ligamentos. A tíbia e o fêmur foram cortados a $200mm$ do eixo articular e segurados os extremos com abraçadeiras cilíndricas de alumínio. A abraçadeira que segura

o fêmur foi fixada rigidamente a uma estrutura com a base solidária ao chão. A abraçadeira que segura a tíbia, foi fixada ao sensor universal de força *UFS*, que por sua vez foi fixado no efetuador do robô (figura 10a). O robô utilizado corresponde a um manipulador serial PUMA de 6 DOF, modelo 762, com capacidade de força de 450N com o braço totalmente estendido. O controle de posição do manipulador possui uma repetibilidade para posição e orientação de 0.02mm e 0.02°, respectivamente. O controle de força do manipulador é adicionado mediante o sensor de força e torque *UFS JR3* modelo 4015, com uma repetibilidade da força e do torque de 0.2N e 0.01Nmm, respectivamente.

Para obtenção da força *In Situ* do LCA, o robô aplica na tíbia uma determinada carga em direção anterior, como mostra a seta vermelha da Figura 10a. A carga é aplicada durante todo o movimento de flexão do joelho (0° – 90°), como indica a Figura 10b.

O motivo pelo qual a direção da carga seja escolhida na direção anterior à tíbia, é porque o LCA é o principal limitador do deslocamento anterior da tíbia em relação ao fêmur. Por tanto a carga aplicada pelo robô afeta diretamente ao LCA. Por sua vez o sensor *UFS* permite salvar os dados de força e torque que acontecem na tíbia, e mediante operações com o *Jacobiano*, são conhecidas as magnitudes que acontecem no LCA, como a força *In Situ* (Woo et al., 1998, 2006b, 2004, 2006a).

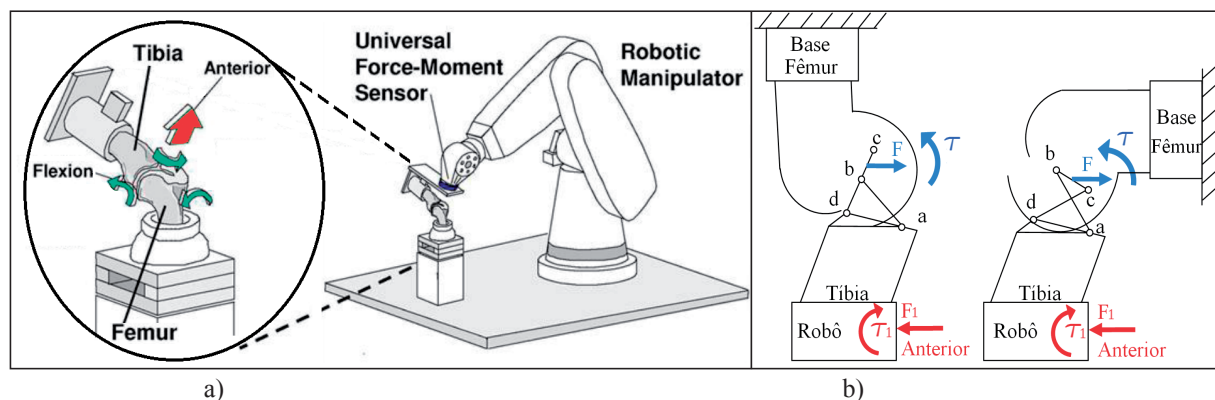


Figure 10: a) Procedimento experimental proposto por Woo et al. (1998) para conhecer a força *In Situ*. b) Modelagem estática do procedimento experimental.

A modelagem do procedimento experimental de Woo et al. (1998) se apresenta na Figura 10b. Nesta modelagem é adotado o sistema de referência inercial coincidente com o ponto *a*, pertencente à tíbia. Esta convenção adotada faz dar a impressão de que o fêmur se está movimentando e de que a tíbia está fixa.

A força anterior tibial F_1 exercida pelo robô, vem acompanhada de um torque τ_1 para provocar uma translação para diante da tíbia em relação ao fêmur. As cargas aplicadas pelo robô estão indicadas em vermelho na Figura 10b.

Por sua vez, os ligamentos transmitem as cargas aplicadas pelo robô, desde a tíbia até o fêmur, em forma de uma força de reação F e um torque de reação τ , indicados em azul na Figura 10b. A força de reação F mantém constante sua direção no percurso da flexão do joelho, e considera-se localizado no ponto médio do Elo Femoral bc . Este ponto de aplicação da força F é denominado \vec{S}_{0F} .

Para análise estática pelo método de Davies (Davies, 1981), o mecanismo modelado, deve estar *super-restringido* para impedir qualquer movimento. As forças e torque externos (mostrados em vermelho na Figura 10b), devem ser internalizados e substituídos por ações equivalentes

entre os corpos pertencentes ao mecanismo analisado, resultando assim em uma cadeia *super-restringida*, apresentada na Figura 11a. Nessa etapa, são atribuídos números a cada elo e são explicitadas as ações internas R_x e R_y em cada junta, como também a força F e o torque τ , (Figura 11a).

Uma vez que as ações são internalizadas, é formado o grafo das ações G_A (Figura 11b), onde as 8 arestas R_x e R_y representam as ações passivas entre cada elo 0, 1, 2 e 3, e as arestas F e τ representam as ações ativas entre os elos 0 e 2.

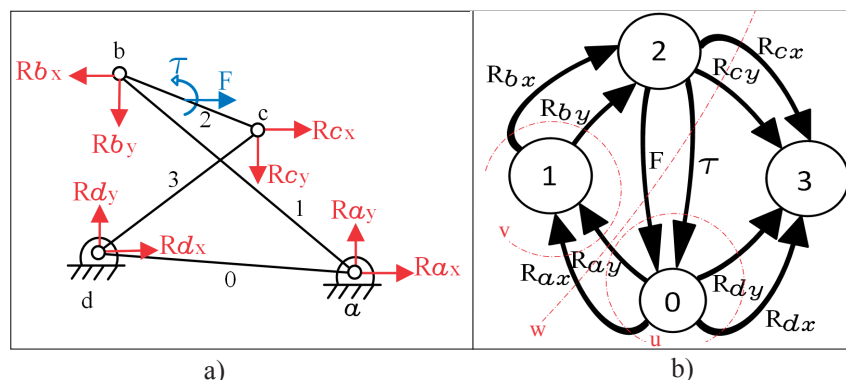


Figure 11: a) Ações nos acoplamentos do mecanismo modelado. b) Grafo G_A do mecanismo modelado, e cortes k tracejadas em linhas vermelhas.

Para o grafo G_A determinam-se k cortes fundamentais. O número de cortes k está dado pela relação 15, (Tsai, 2001):

$$k = n - 1 = 4 - 1 = 3 \quad (15)$$

Onde n é o número de vértices do grafo G_A . Baseando-se na árvore geradora (Weihmann et al., 2011a,b; Laus, 2012) determina-se onde serão aplicados os $k = 3$ cortes no grafo. Os 3 cortes são denominados de u , v e w , e são apresentados em linhas tracejadas vermelhas na Figura 11b.

Para a cadeia de ações internalizadas no espaço de trabalho $\lambda = 3$, podem ser descritas $\lambda \cdot k$ equações que devem ser satisfeitas por C incógnitas. As C incógnitas correspondem à soma do número das ações passivas R_x e R_y , e das ativas F e τ :

$$C = R_x + R_y + F + \tau = 4 + 4 + 1 + 1 = 10 \quad (16)$$

Estas C incógnitas podem ser escritas em função de C_N variáveis primárias (Weihmann et al., 2011a,b; Laus, 2012).

$$C_N = C - \lambda \cdot k = 10 - (3 \cdot 3) = 1 \quad (17)$$

Assim, é possível determinar as ações internas C da cadeia, pela imposição de $C_N = 1$ variável, correspondente à força F .

Em relação aos heliforças das juntas rotativas (R_x e R_y), e da força F , o passo h é nulo, portanto obtém-se heliforças que representam restrições de força pura, como indicado na equação 18.

$$\S = \left(\vec{S}_0 \times \vec{S}; \vec{S} \right)^T = \left(\vec{S}_0 \times \vec{R}; \vec{R} \right)^T \quad (18)$$

Já o passo do heliforça correspondente ao torque τ é infinito, por tanto obtém-se heliforças que representam torque puro, como indicado na equação 19.

$$\$ = (\vec{S}; \vec{0})^T = (\tau; \vec{0})^T \tag{19}$$

Considerando as equações 18 e 19, e que os vetores posição \vec{S}_0 dos heliforças são idênticos aos dos heligiros, obtém-se os seguintes heliforças para o modelo proposto:

$$\begin{aligned} \$_{a_x} &= \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{R}_{a_x} \end{pmatrix}; \$_{a_y} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{R}_{a_y} \end{pmatrix}; \$_{b_x} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0b_f} \times \vec{R}_{b_x} \\ \vec{R}_{b_x} \end{pmatrix}; \$_{b_y} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0b_f} \times \vec{R}_{b_y} \\ \vec{R}_{b_y} \end{pmatrix}; \\ \$_{c_x} &= \begin{pmatrix} \vec{S}_{0c_f} \times \vec{R}_{c_x} \\ \vec{R}_{c_x} \end{pmatrix}; \$_{c_y} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0c_f} \times \vec{R}_{c_y} \\ \vec{R}_{c_y} \end{pmatrix}; \$_{d_x} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0d_f} \times \vec{R}_{d_x} \\ \vec{R}_{d_x} \end{pmatrix}; \\ \$_{d_y} &= \begin{pmatrix} \vec{S}_{0d_f} \times \vec{R}_{d_y} \\ \vec{R}_{d_y} \end{pmatrix}; \$_F = \begin{pmatrix} \vec{S}_{0F} \times \vec{F} \\ \vec{F} \end{pmatrix}; \$_\tau = \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{0} \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{20}$$

A **Lei dos cortes** de Davies (Davies, 1981) estabelece que a soma das heliforças pertencentes a um corte é zero (equação 7). Para aplicar a **Lei dos cortes** precisa-se construir a *matriz de Ações Unitárias em Rede* $[\hat{A}_N]_{\lambda,k \times C}$. Nesta matriz, são colocados em forma ordenada os heliforças normalizadas pertencentes a cada corte u, v e w do grafo G_A , (Figura 11b). A *matriz de Ações Unitárias em Rede* para o modelo proposto é apresentada na equação 21:

$$\begin{matrix} \text{corte } u \\ \text{corte } v \\ \text{corte } w \end{matrix} \begin{bmatrix} \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{d_x} & \hat{\$}_{d_y} & \hat{\$}_\tau & \hat{\$}_F \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \hat{\$}_{b_x} & \hat{\$}_{b_y} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{c_x} & \hat{\$}_{c_y} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_\tau & \hat{\$}_F \end{bmatrix} = [\hat{A}_N]_{\lambda,k \times C} \tag{21}$$

Dessa maneira, a equação 7 aplicada para o modelo proposto fica:

$$\begin{bmatrix} \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{d_x} & \hat{\$}_{d_y} & \hat{\$}_\tau & \hat{\$}_F \\ \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \hat{\$}_{b_x} & \hat{\$}_{b_y} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{c_x} & \hat{\$}_{c_y} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_\tau & \hat{\$}_F \end{bmatrix}_{9 \times 10} = \begin{bmatrix} R_{a_x} \\ R_{a_y} \\ R_{b_x} \\ R_{b_y} \\ R_{c_x} \\ R_{c_y} \\ R_{d_x} \\ R_{d_y} \\ \tau \\ F \end{bmatrix}_{10 \times 1} = [\vec{0}]_{10 \times 1} \tag{22}$$

Conforme à equação 8, pode-se reescrever o sistema 22, de modo que a *submatriz de Rede Primária* $[\hat{A}_{NP}]$ seja igual à última coluna da matriz $[\hat{A}_N]_{\lambda,k \times C}$, e a *matriz de Rede Secundária*

$[\hat{A}_{NS}]$ seja igual às nove primeiras colunas da matriz $[\hat{A}_N]_{\lambda,k \times C}$. Como $[\hat{A}_{NS}]$ é inversível, as magnitudes das ações secundárias $[\vec{\Psi}_S]$ são calculados por:

$$\begin{bmatrix} R_{a_x} \\ R_{a_y} \\ R_{b_x} \\ R_{b_y} \\ R_{c_x} \\ R_{c_y} \\ R_{d_x} \\ R_{d_y} \\ \tau \end{bmatrix}_{9 \times 1} = - \begin{bmatrix} \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{d_x} & \hat{\$}_{d_y} & \hat{\$}_{\tau} \\ \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \hat{\$}_{b_x} & \hat{\$}_{b_y} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \hat{\$}_{a_x} & \hat{\$}_{a_y} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{c_x} & \hat{\$}_{c_y} & \vec{0} & \vec{0} & \hat{\$}_{\tau} \end{bmatrix}_{9 \times 9}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\$}_F \\ \vec{0} \\ \hat{\$}_F \end{bmatrix}_{9 \times 1} \cdot \vec{F} \quad (23)$$

Atribuindo um valor à variável primária \vec{F} , é possível obter a solução estática, correspondente ao sistema 23.

Na simulação estática do modelo proposto, o movimento de flexão do joelho vai desde 0° até 140°. A força anterior tibial que aplica o robô, é ingressada com uma magnitude de $\vec{F} = 110N$.

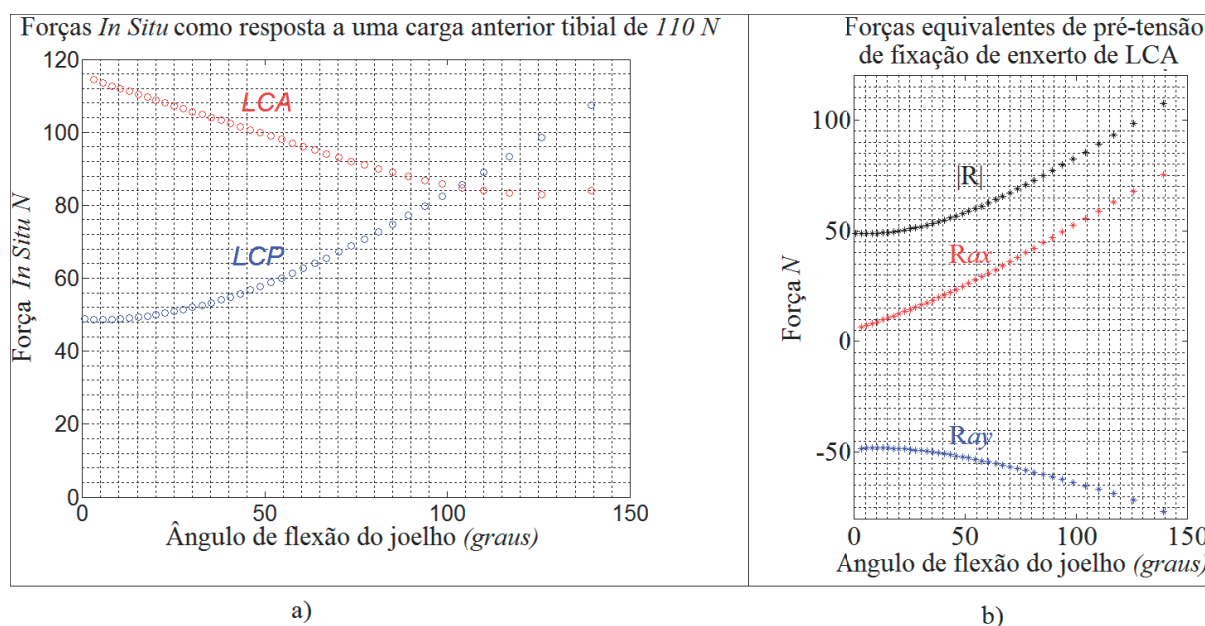


Figure 12: a) Força *In Situ* do LCA e do LCP, como resposta a uma carga anterior tibial de $\vec{F} = 110N$. b) Forças equivalentes à pré-tensão de um enxerto de LCA, como resposta a uma carga anterior tibial de $\vec{F} = 110N$.

A força *In Situ* do LCA se denomina de $F_{LCAinsitu}$, e é calculada como a força que passa pelo elo *ab* do modelo proposto, ou seja: $F_{LCAinsitu} = R_{ax} / (\cos(\beta))$. A força *In Situ* do LCP se denomina de $F_{LCPinsitu}$, e é calculada como a força que passa pelo elo *cd* do modelo proposto, ou seja: $F_{LCPinsitu} = R_{dx} / (\cos(\alpha))$. Os resultados da simulação das forças *In Situ* são apresentados na Figura 12a, onde a curva da força *In Situ* do LCA está em cor vermelha, e a curva da força *In Situ* do LCP está em cor azul. Analisando a gráfica de forças *In Situ*, verifica-se a correta modelagem da função do LCA, pois segundo Kapandji et al. (2000) o LCA é um dos

freios da hiperextensão, desse modo fica mais tensionado na extensão máxima do joelho (0°), e se distende a medida que aumenta o ângulo de flexão. Verifica-se também a correta modelagem da função do *LCP*, pois segundo [Kapandji et al. \(2000\)](#) o *LCP* é um dos *freios* da hiperflexão do joelho, desse modo fica mais tensionado na flexão máxima do joelho (140°), e se distende a medida que diminui o ângulo de flexão.

Para a análise da pré-tensão do enxerto de ligamento de LCA, como resposta a uma força anterior tibial de $\vec{F} = 110N$, considera-se $R = \sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2}$ como as força equivalente à esta pré-tensão. O Resultado da simulação para R_{ax} , R_{ay} e da magnitude resultante R está apresentada na Figura 12b.

5 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta sessão validam-se os resultados do modelo estático proposto, para análise de forças dos ligamentos cruzados. Para isto, comparam-se os resultados simulados do modelo proposto com os experimentais obtidos por [Woo et al. \(1998\)](#). A Figura 13b apresenta o resultado experimental das forças *In Situ* do LCA em relação à variação do ângulo de flexão do joelho, para várias magnitudes de carga anterior tibial aplicadas pelo robô. A Figura 13a apresenta o resultado da simulação das forças *In Situ* do LCA do modelo proposto, com as mesmas condições de carga aplicadas e para a mesma faixa angular de flexão.

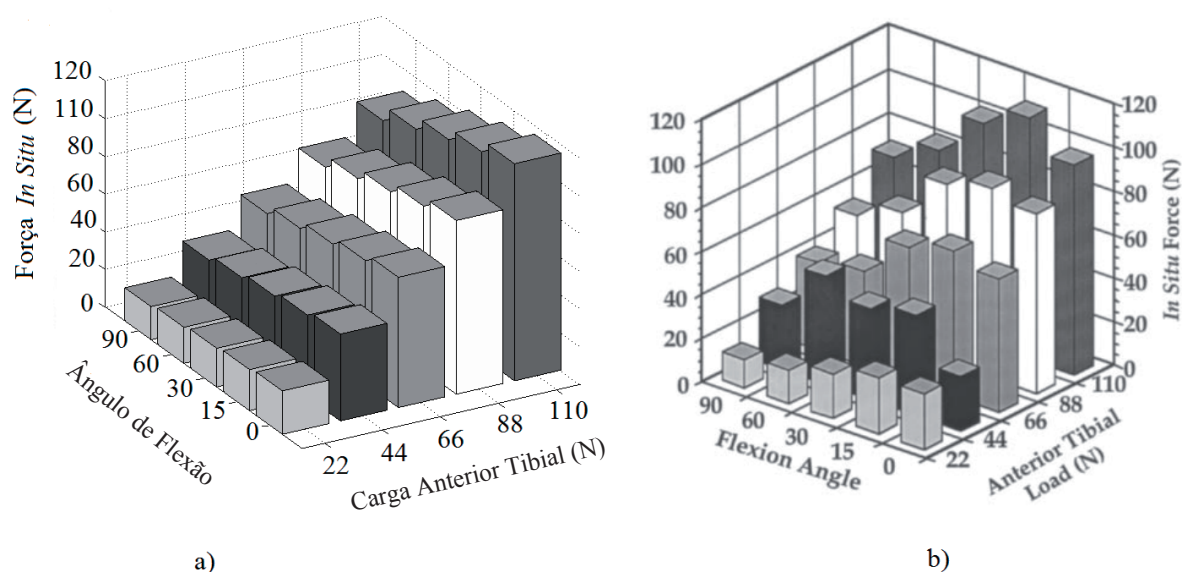


Figure 13: Variação da força *In Situ* do LCA em relação ao ângulo de flexão do joelho e à carga anterior tibial :a) Resultados da simulação do modelo proposto. b) Resultados experimentais obtidos por [Woo et al. \(1998\)](#).

Pode-se verificar que os resultados da simulação são muito próximos aos resultados experimentais, mas ainda não são totalmente similares. Analisando a Figura 13b, observa-se que os resultados experimentais das forças *In Situ* tendem a aumentar em magnitude na medida que diminui o ângulo de flexão (desde os 90° até os 15°), e diminuem levemente próximos à extensão máxima (0°). Em contraste, nos valores simulados (Figura 13a), a tendência é a aumentar continuamente de magnitude na medida que diminui o ângulo de flexão (desde os 90° até os 0°).

6 CONCLUSÕES

A modelagem proposta do joelho permite obter resultados de forças nos ligamentos muito próximos aos experimentais. Isto permitiria apoiar aos médicos ortopedistas com valiosas informações para auxiliar a decisão médica no planejamento pré-operatório. O modelo apresentado pode ajudar na análise da força *In Situ* e da pré-tensão de fixação do enxerto no osso. Isto facilitaria a busca da posição do enxerto que permita obter forças *In Situ* similares às de um ligamento intacto, tendo em conta a especificidade de cada paciente.

A metodologia proposta, baseada em teoria de helicoides e no método de Davies, demonstrou fornecer uma representação completa das posições, velocidades e forças das estruturas anatômicas. A metodologia facilitou também uma modelagem leve, pois cada estrutura anatômica é representada por um elo rígido. Estes elos rígidos são possíveis de modificar e de customizar, o que permite solucionar os problemas de variação anatômica de cada sujeito.

Embora os resultados obtidos neste trabalho sejam alentadores, ainda não refletem fidedignamente os resultados experimentais. Isto devido a que não foram contemplados os efeitos viscoelásticos dos ligamentos, nem foram considerados elementos anatômicos importantes como meniscos, tendão patelar e ligamentos colaterais.

Em trabalhos futuros, a metodologia proposta permitiria aprimorar a presente modelagem, incluindo todos os efeitos não considerados. Ainda mais, permitiria especificar um modelo tridimensional que permitiria resultados mais próximos aos reais.

REFERENCES

- Bacarim Pavan R. Análise dinâmica de corpos rígidos aplicada ao projeto de uma prótese para artroplastia total de joelho. 2010.
- Bahraminasab M., Sahari B., Hassan M., and Arumugam M. Finite element analysis of the effect of shape memory alloy on the stress distribution and contact pressure in total knee replacement. *Trends in Biomaterials & Artificial Organs*, (0), 2010.
- Ball S. *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge Univ Pr, 1900.
- Bendjaballah M., Shirazi-Adl A., and Zukor D. Finite element analysis of human knee joint in varus-valgus. *Clinical Biomechanics*, 12(3):139–148, 1997.
- Bougherara H., Mahboob Z., Miric M., and Youssef M. Finite element investigation of hybrid and conventional knee implants. *International Journal of Engineering (IJE)*, 3(3):257, 2009.
- Bradley J., Fitzpatrick D., Daniel D., Shercliff T., and O'Connor J. Orientation of the cruciate ligament in the sagittal plane. a method of predicting its length-change with flexion. *Journal of Bone and Joint Surgery-British Volume*, 70(1):94, 1988.
- Campos A. *Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais*. Ph.D. thesis, Ph. D. Thesis, 2004.
- Campos A., Guenther R., and Martins D. Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 27:345, 2005.
- Campos A., Guenther R., and Martins D. Differential kinematics of parallel manipulators using virtual chains. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(7):1697, 2009.
- Clement B., Drouin G., Shorrock G., and Gely P. Statistical analysis of knee ligament lengths. *Journal of biomechanics*, 22(8-9):767–774, 1989.
- Crowninshield R., Pope M., and Johnson R. An analytical model of the knee. *Journal of Biomechanics*, 9(6):397–405, 1976.

- Davies T. Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and machine theory*, 16(3):171–183, 1981.
- Donahue T., Hull M., et al. A finite element model of the human knee joint for the study of tibio-femoral contact. *Journal of biomechanical engineering*, 124:273, 2002.
- Freudenstein F. Approximate synthesis of four-bar linkages. *Resonance*, 15:740–767, 2010. ISSN 0971-8044. 10.1007/s12045-010-0084-7.
- Gardiner J. and Weiss J. Subject-specific finite element analysis of the human medial collateral ligament during valgus knee loading. *Journal of orthopaedic research*, 21(6):1098–1106, 2003.
- Godest A., Beaugonin M., Haug E., Taylor M., and Gregson P. Simulation of a knee joint replacement during a gait cycle using explicit finite element analysis. *Journal of biomechanics*, 35(2):267–275, 2002.
- Gregorio R. and Parenti-Castelli V. Parallel mechanisms for knee orthoses with selective recovery action. *Advances in Robot Kinematics*, pages 167–176, 2006.
- Guenther R., Simas H., CRUZ D., and Martins D. A new integration method for differential inverse kinematics of closed-chain robots. In *ACBM Symposium Series In Mechatronics*, volume 3, pages 225–235. 2008.
- Guo Y., Zhang X., and Chen W. Three-dimensional finite element simulation of total knee joint in gait cycle. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 22(4):347–351, 2009.
- Halloran J., Petrella A., and Rullkoetter P. Explicit finite element modeling of total knee replacement mechanics. *Journal of biomechanics*, 38(2):323–331, 2005.
- Hashmi A. Statistical comparison of customized and traditional knee implants using finite element analyses. 2007.
- Howard R., Rosvold J., Darcy S., Corr D., Shrive N., Tapper J., Ronsky J., Beveridge J., Marchuk L., Frank C., et al. Reproduction of in vivo motion using a parallel robot. *Journal of biomechanical engineering*, 129:743, 2007.
- Huson A., Spoor C., and Verbout A. A model of the human knee, derived from kinematic principles and its relevance for endoprosthesis design. *Acta Morphologica Neerlandica-Scandinavica*, 27:45–62, 1989.
- Kapandji A. et al. *Fisiologia articular*. Editorial Médica Panamericana, 2000.
- Laus L. Efficiency of gear trains determined using graph and screw theories. *Mechanism and Machine Theory*, 1, 2012. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2012.01.011.
- Li G., Kozanek M., Hosseini A., Liu F., Velde S., and Rubash H. New fluoroscopic imaging technique for investigation of 6dof knee kinematics during treadmill gait. *Journal of orthopaedic surgery and research*, 4(1):1–5, 2009.
- Lykissas M., Mataliotakis G., Paschos N., Panovrakos C., Beris A., and Papageorgiou C. Simultaneous bicompartamental bucket-handle meniscal tears with intact anterior cruciate ligament: a case report. *Journal of medical case reports*, 4(1):1–4, 2010.
- Madgwick S. An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays. *Report x-io and University of Bristol (UK)*, 2010.
- Madgwick S., Harrison A., and Vaidyanathan R. Estimation of imu and marg orientation using a gradient descent algorithm. In *Rehabilitation Robotics (ICORR), 2011 IEEE International Conference on*, pages 1–7. IEEE, 2011.
- O'connor J., Shercliff T., Biden E., and Goodfellow J. The geometry of the knee in the sagittal plane. *ARCHIVE: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine 1989-1996 (vols 203-210)*, 203(48):223–233, 1989.
- Olanlokun K. and Wills D. A spatial model of the knee for the preoperative planning of knee

- surgery. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 216(1):63, 2002.
- Ottoboni A., Parenti-Castelli V., and Leardini A. On the limits of the articular surface approximation of the human knee passive motion models. In *Proceedings of the 17th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Firenze, Italy*. 2005.
- Parenti-Castelli V., Leardini A., Di Gregorio R., and O'Connor J. On the modeling of passive motion of the human knee joint by means of equivalent planar and spatial parallel mechanisms. *Autonomous Robots*, 16(2):219–232, 2004.
- Pena E., Calvo B., Martinez M., Palanca D., and Doblaré M. Influence of the tunnel angle in acl reconstructions on the biomechanics of the knee joint. *Clinical Biomechanics*, 21(5):508–516, 2006.
- Piedade S., Munhoz R., Cavenaghi G., Miranda J., and Mischan M. Reconstrucao do lcp do joelho: técnica de fixacao no leito tibial. *Acta ortop. bras*, 14(2):92–96, 2006.
- Previgliano J. Evaluacion de los angulos de los tuneles tibial y femoral por resonancia magnetica nuclear en la reconstruccion con banda simple del ligamento cruzado anterior; assessment of the femoral and tibial tunnels angles by mri in a single bundle acl reconstruction. *Artrosc.(B. Aires)*, 17(2):157–162, 2010.
- San Servolo V. Improve 2011. 2011.
- Sancisi N. and Parenti-Castelli V. A 1 dof parallel spherical wrist for the modelling of the knee passive motion. *Mechanism and Machine Theory*, 45(3):658–665, 2010.
- Sancisi N. and Parenti-Castelli V. A novel 3d parallel mechanism for the passive motion simulation of the patella-femur-tibia complex. *Meccanica*, pages 1–14, 2011a.
- Sancisi N. and Parenti-Castelli V. A sequentially-defined stiffness model of the knee. *Mechanism and Machine Theory*, 2011b.
- Sancisi N., Zannoli D., Parenti-Castelli V., Belvedere C., and Leardini A. A one-degree-of-freedom spherical mechanism for human knee joint modelling. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 225(8):725–735, 2011.
- Selig J. *Introductory robotics*. Prentice Hall, 1992.
- Shi J. *Finite element analysis of total knee replacement considering gait cycle load and malalignment*. Ph.D. thesis, 2007.
- Simas H., da Cruz D., Guenther R., and Martins D. A collision avoidance method using assured virtual chains. In *ABCm symposium series in mechatronics, of ABCm symposium series*, volume 3, pages 316–325. 2007.
- TODO M., NAGAMINE R., and YAMAGUCHI S. Stress analysis of ps type knee prostheses under deep flexion. *Journal of Biomechanical Science and Engineering*, 2(4):237–245, 2007.
- Torry M., Shelburne K., Peterson D., GIPHART J., Krong J., Myers C., Steadman J., and Woo S. Knee kinematic profiles during drop landings: a biplane fluoroscopy study. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 43(3):533, 2011.
- Trilha Junior M. *Construção e validação qualitativa de um modelo de elementos finitos para a simulação mecânica do joelho humano*. Master's Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- Tsai L. *Mechanism design: enumeration of kinematic structures according to function*, volume 16. CRC, 2001.
- Wang C., Walker P., and Wolf B. The effects of flexion and rotation on the length patterns of the ligaments of the knee. *Journal of biomechanics*, 6(6):587–592, 1973.
- Wang H. and Zheng N. Knee joint secondary motion accuracy improved by quaternion-

- based optimizer with bony landmark constraints. *Journal of biomechanical engineering*, 132:124502, 2010.
- Weihmann L., Martins D., Bernert D.L.A., and Coelho L.d.S. Optimization of planar parallel manipulators force capabilities using improved harmony search approach. In *21st International Congress of Mechanical Engineering - COBEM, 2011, Natal. Proceedings of the 21st International Congress of Mechanical Engineering*. 2011a.
- Weihmann L., Martins D., and dos Santos Coelho L. Modified differential evolution approach for optimization of planar parallel manipulators force capabilities. *Expert Systems with Applications*, 2011b.
- Williams P., Peura G., and Hoffman A. A model of knee motion in the sagittal plane. In *Bioengineering Conference, 1991., Proceedings of the 1991 IEEE Seventeenth Annual Northeast*, pages 273–274. IEEE, 1991.
- Willing R. *Multiobjective design optimization of total knee replacements considering UHMWPE wear and kinematics*. Ph.D. thesis, Queen's University, 2011.
- Wilson D., Feikes J., and O'Connor J. Ligaments and articular contact guide passive knee flexion. *Journal of biomechanics*, 31(12):1127–1136, 1998.
- Wilson D. and O'Connor J. A three-dimensional geometric model of the knee for the study of joint forces in gait. *Gait & Posture*, 5(2):108–115, 1997.
- Woo S., Abramowitch S., Kilger R., and Liang R. Biomechanics of knee ligaments: injury, healing, and repair. *Journal of biomechanics*, 39(1):1–20, 2006a.
- Woo S., Fox R., Sakane M., Livesay G., Rudy T., and Fu F. Biomechanics of the acl: Measurements of in situ force in the acl and knee kinematics. *The Knee*, 5(4):267–288, 1998.
- Woo S., Thomas M., and Saw S. Contribution of biomechanics, orthopaedics and rehabilitation: The past, present and future. *The Surgeon*, 2(3):125–136, 2004.
- Woo S., Wu C., Dede O., Vercillo F., and Noorani S. Biomechanics and anterior cruciate ligament reconstruction. *Journal of Orthopaedic Surgery and Research*, 1(1):1–9, 2006b.