

MÉTODOS ITERATIVOS Y BAYESIANOS PARA REGULARIZACIÓN DE PROBLEMAS INVERSOS POR VARIACIÓN TOTAL

Ana C. Larrán^a, Rubén D. Spies^{b,c} and Karina G. Temperini^{b,d}

^aDpto. de Matemática, Fac. de Cs. Exactas y Tecnología, Univ. Nac. de Tucumán, Tucumán, Argentina

^bInstituto de Matemática Aplicada del Litoral, IMAL, CONICET-UNL, Santa Fe, Argentina

^cDpto. de Matemática, Fac. de Ingeniería Química, Univ. Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina

^dDpto. de Matemática, Fac. de Humanidades y Cs., Univ. Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina

Palabras clave. Mal condicionamiento, regularización, variación total, método de Tikhonov.

Resumen. Los métodos de regularización de tipo variación acotada (BV) fueron introducidos originalmente por L. Rudin, S. Osher y E. Fatemi en 1992 (L. I. Rudin et al., *Proceedings of the 11th Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies, Physica D*, 60:259-268 (1992)) y estudiados luego por R. Acar y C. R. Vogel en 1994 (R. Acar and C. R. Vogel, *Inverse Problems*, 10:1217-1229 (1994)). Estos métodos pueden verse como métodos de Tikhonov-Phillips generalizados en los que se utiliza como penalizantes la norma o la seminorma de variación acotada o bien una perturbación diferenciable de la seminorma. En los últimos 15 años, los métodos BV han sido empleados exitosamente en una gran variedad de aplicaciones, especialmente en procesamiento y restauración de imágenes y en Medicina, en problemas en los cuales es deseable preservar bordes y discontinuidades. No obstante es bien conocido que los métodos de Tikhonov-Phillips regulares pueden formularse como problemas de optimización sin restricciones, para el caso particular de penalizantes de tipo BV surgen dos tipos de inconvenientes: el primero de carácter analítico está relacionado con la existencia y unicidad de minimizantes y el segundo de índole numérico-computacional puesto que tales funcionales no son derivables.

Este trabajo tiene dos objetivos fundamentales. En primer lugar presentar brevemente algunos resultados sobre existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV. En segundo lugar veremos como el penalizante asociado a la seminorma BV se puede escribir como un penalizante cuadrático asociado a un funcional no-lineal. Este enfoque permite escribir la correspondiente ecuación normal como una ecuación no-lineal, la que a su vez induce un método iterativo para aproximar la correspondiente solución. Esta solución, a su vez puede verse como el estado estacionario de una ecuación de difusión no lineal. Ciertas variantes de este enfoque dan lugar a los métodos de regularización de Perona-Malik (P. Perona and J. Malik, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:629-639, (1990)). Finalmente se mostrarán varios resultados de estos métodos iterativos en problemas de restauración de señales e imágenes.

1 INTRODUCCIÓN

Problemas inversos mal condicionados ("ill-posed") surgen en una gran variedad de aplicaciones en diversas áreas de la Ciencia y la Tecnología tales como Medicina, Geología, Geofísica, Astronomía, etc. Es principalmente por esa razón que el tratamiento matemático de los mismos y el diseño de algoritmos y métodos de regularización apropiados para cada caso, reviste gran interés.

En un contexto bastante general, un problema inverso puede formularse de la siguiente manera: determinar x en una ecuación de la forma

$$Tx = y, \quad (1)$$

donde T es un operador lineal y acotado entre los espacios de Hilbert \mathcal{X} e \mathcal{Y} de dimensión infinita (en general estos serán espacios de funciones), el rango de T , $\mathcal{R}(T)$, es no cerrado e $y \in \mathcal{Y}$ es el dato conocido exactamente o quizás inevitablemente con un cierto grado de error, el que puede originarse en errores de medición y/o en procesos de discretización y redondeo.

Es bien conocido que bajo estas hipótesis el problema (1) es mal condicionado ("ill-posed") en el sentido de Hadamard (Hadamard (1923)). La causa de este mal condicionamiento es la no acotación del operador T^\dagger , la inversa generalizada de Moore-Penrose de T . Esta inversa generalizada se define como la única extensión lineal del operador $(T|_{\mathcal{N}(T)^\perp})^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow \mathcal{N}(T)^\perp$ al subespacio denso de \mathcal{Y} dado por $\mathcal{D}(T^\dagger) \doteq \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$, donde $\mathcal{N}(T)$ es el núcleo de T . La inversa generalizada de Moore-Penrose es de fundamental importancia en el tratamiento matemático de los problemas inversos mal condicionados. Esta importancia radica principalmente en la estrecha relación existente entre la inversa generalizada de Moore-Penrose y las soluciones de cuadrados mínimos. En efecto, es bien conocido que el problema (1) tiene soluciones de cuadrados mínimos si y solo si $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ y, en tal caso, existe una única solución de cuadrados mínimos de mínima norma, conocida como la mejor solución aproximada del problema (1), la cual está dada por $x^\dagger \doteq T^\dagger y$. Además, el conjunto de todas las soluciones de cuadrados mínimos del problema (1) está dado por $x^\dagger + \mathcal{N}(T)$ y toda solución de cuadrados mínimos del problema (1) satisface la llamada *ecuación normal*

$$T^*Tx = T^*y, \quad (2)$$

donde T^* es el operador adjunto de T .

La no acotación de T^\dagger genera problemas de estabilidad en la aproximación y tratamiento numérico del problema (1). Así, pequeñas perturbaciones en el dato y pueden resultar en errores muy grandes en la correspondiente solución aproximada. Resulta imprescindible antes de resolver un problema inverso mal condicionado proceder a restaurar la estabilidad del mismo. Las herramientas matemáticas apropiadas para tal propósito son los llamados "métodos de regularización". Estos métodos consisten esencialmente de una familia uniparamétrica de operadores continuos (no necesariamente lineales) que aproximan a T^\dagger . Un estudio comprensivo y exhaustivo sobre la amplia teoría matemática de los métodos de regularización puede encontrarse en el libro de Engl, Hanke y Neubauer (Engl et al. (1996)).

Entre los métodos de regularización más tradicionales mencionamos los métodos de Tikhonov-Phillips, descomposición en valores singulares truncada, el método de Showalter, el método de Landweber, etc. Estos métodos pueden derivarse en un contexto muy general a partir de la descomposición espectral (Dautray and Lions (1990)) de la inversa generalizada de Moore-Penrose. Sin embargo, el método más ampliamente conocido y utilizado es sin dudas el de Tikhonov-Phillips, propuesto originalmente por Phillips en 1962 (Phillips (1962)) y Tikhonov

en 1963 (Tikhonov (1963)). Este método es ampliamente utilizado en la práctica y en problemas concretos por diversas razones, siendo quizás la principal de ellas el hecho que también puede formularse de manera muy sencilla como un problema de optimización sin restricciones. En efecto, la solución regularizada del problema (1) obtenida aplicando el método de Tikhonov-Phillips es el minimizante global x_α del funcional

$$J_\alpha^{TP}(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad (3)$$

donde α es una constante positiva conocida como parámetro de regularización. El término penalizante $\alpha \|x\|^2$ en (3) cumple dos objetivos fundamentales: por un lado induce estabilidad en el cálculo de las correspondientes soluciones regularizadas y por otro lado este “selecciona” como límite (para $\alpha \rightarrow 0$) a la solución de cuadrados mínimos de mínima norma, esto es $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_\alpha = x^\dagger$.

Una restricción que presentan todos los métodos de regularización tradicionales radica en el hecho que ninguno de ellos permite soluciones discontinuas o no regulares en general. Esta puede ser una restricción no deseable en algunas aplicaciones en procesamiento de señales, restauración de imágenes e identificación de parámetros (Dobson and Santosa (1994), Gutman (1990)), en las que se sabe (o se supone) que la solución exacta posee discontinuidades, vértices o gradientes pronunciados. Las soluciones regularizadas obtenidas con tales métodos resultarán en aproximaciones muy pobres o de baja calidad cerca de puntos o regiones donde la solución presenta pérdidas de regularidad. Si se desea preservar tales discontinuidades o bordes, entonces los métodos clásicos de regularización no son la mejor opción. En estos casos es de particular relevancia el estudio y diseño de estrategias que introduzcan estabilidad sin “regularizar”, quizás mediante la utilización de diferentes penalizantes en el funcional de Tikhonov-Phillips (3). Esta línea de razonamiento ha originado en los últimos 15 años una gran variedad de métodos con penalizantes generales que pueden ser considerados como “variantes” del tradicional método de Tikhonov-Phillips y que se conocen como métodos de Tikhonov-Phillips generalizados. Tal es el caso de los penalizantes asociados a seminormas del tipo $\|Lx\|$, inducidas por un operador diferencial L . El uso de $\|x\|_{BV}$ (donde $\|\cdot\|_{BV}$ denota la norma de variación acotada) en lugar de $\|x\|^2$ en (3) ha dado lugar a los llamados métodos de regularización por variación acotada (BV), conocidos también como regularización por variación total, introducidos originalmente por L. Rudin, S. Osher y E. Fatemi en 1992 (Rudin et al. (1992)) y ampliamente estudiados luego por R. Acar y C. R. Vogel en 1994 (Acar and Vogel (1994)). Para el caso de penalizantes arbitrarios $W(x)$, la existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes de los correspondientes funcionales fueron estudiadas recientemente por G. Mazziari, R. Spies y K. Temperini (Mazziari et al. (2012)).

La organización de este trabajo es la siguiente. En las secciones 2 y 3 presentaremos brevemente algunos resultados sobre existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes “de tipo BV”: la norma o seminorma de variación acotada, y perturbaciones diferenciables de la seminorma. En la sección 4 presentaremos brevemente el enfoque bayesiano para el tratamiento de problemas inversos y, en particular mostraremos como este enfoque, mediante el uso de modelos autoregresivos de Markov puede utilizarse para construir métodos estadísticos de regularización, particularmente apropiados para el caso de soluciones exactas que presenten saltos, discontinuidades, vértices o regiones de gradiente pronunciado. En la sección 5 mostraremos como la seminorma BV se puede escribir como un penalizante cuadrático asociado a un funcional no lineal. Este enfoque permite escribir la correspondiente ecuación normal como una ecuación no lineal, la que

a su vez induce un método iterativo para aproximar la correspondiente solución. Mostraremos también cómo estos métodos iterativos resultan ser casos particulares de los métodos resultantes del enfoque bayesiano para cierto tipo de distribuciones a-priori y ciertos valores de los parámetros e hiperparámetros. Ciertas variantes de este enfoque dan lugar a los métodos de regularización de Perona-Malik (Perona and Malik (1990)). Finalmente en la sección 6 se presentarán varios resultados numéricos de estos métodos iterativos en problemas de restauración de señales e imágenes.

2 EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD DE MINIMIZANTES GLOBALES DE FUNCIONALES SOBRE EL ESPACIO DE FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

En esta sección recordaremos brevemente algunos resultados de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales generales sobre el espacio de funciones de variación acotada. La mayoría de estos resultados pueden encontrarse en las referencias Acar and Vogel (1994) y Larrán (2011). Previamente necesitaremos introducir algunas definiciones y resultados fundamentales sobre existencia y unicidad para funcionales generales.

Definición 2.1. Sean \mathcal{X} un espacio normado y J un funcional definido sobre un conjunto no vacío $D \subset \mathcal{X}$. Diremos que:

- (i) El funcional J es (**débilmente**) **semicontinuo inferiormente** en $x \in D$ si para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \xrightarrow{(w)} x$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$.
- (ii) El funcional J es (**débilmente**) **semicontinuo inferiormente** en D si J es (**débilmente**) **semicontinuo inferiormente** en cada punto $x \in D$.

En el resto de esta sección supondremos $d = 1, 2$ ó 3 , $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, convexo y acotado con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua, $1 \leq p \leq \frac{d}{d-1}$ (con $\frac{d}{d-1} \doteq +\infty$ si $d = 1$), $\mathcal{X} \doteq L^p(\Omega)$, $D \doteq BV(\Omega)$, donde $BV(\Omega)$ es el espacio de las funciones de variación acotada sobre Ω , i.e. $BV(\Omega) \doteq \{x \in L^1(\Omega) / J_0(x) < \infty\}$, donde $J_0(x) \doteq \sup_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \int_{\Omega} (-x \operatorname{div} \vec{v}) ds$ es la seminorma BV de x y $\mathcal{V} \doteq \{\vec{v} = (v_1, \dots, v_d) \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d) : |\vec{v}(s)| \leq 1 \ \forall s \in \Omega\}$. Si $x \in BV(\Omega)$, la norma BV de x se define como $\|x\|_{BV(\Omega)} \doteq \|x\|_{L^1(\Omega)} + J_0(x)$ y si x es suficientemente suave (e.g., $x \in C^1(\Omega)$) se tiene que

$$J_0(x) = \int_{\Omega} |\nabla x| ds. \quad (4)$$

Definición 2.2. (**BV-ACOTADO**) Diremos que $M \subset BV(\Omega)$ es un conjunto **BV-acotado** si existe una constante $k > 0$ tal que $\|x\|_{BV(\Omega)} \leq k$ para todo $x \in M$.

Definición 2.3. (**BV-COERCITIVIDAD**) Diremos que $J : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional **BV-coercitivo** si para toda sucesión $\{x_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{BV(\Omega)} = +\infty$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = +\infty$.

En el siguiente teorema se establecen condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad de los minimizantes globales de un funcional general definido sobre $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.4. (EXISTENCIA Y UNICIDAD) *Sea $J : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional BV -coercitivo. Entonces cualquiera de las dos condiciones siguientes es suficiente para la existencia de un minimizante global de J sobre $BV(\Omega)$.*

(C1) *Si $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$ y J es semicontinuo inferiormente.*

(C2) *Si $p = \frac{d}{d-1}$, $d \geq 2$ y J es débilmente semicontinuo inferiormente.*

En ambos casos, el minimizante es único si J es estrictamente convexo.

Como se mencionó previamente, el objetivo fundamental del término de penalización en los funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados es el de inducir estabilidad en el cálculo de las correspondientes soluciones aproximadas. Por lo tanto es necesario verificar que los penalizantes que se utilicen sean tales que se satisfaga tal condición. Por esta razón, es de particular interés el análisis de estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados bajo diferentes tipos de perturbaciones. Para proceder con algunos resultados en esta dirección necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 2.5. (BV -COERCITIVIDAD) *Sea $\{J_n\}$ una sucesión de funcionales definidos sobre $L^p(\Omega)$. Diremos que la sucesión $\{J_n\}$ es **BV -coercitiva** si para toda sucesión $\{x_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{BV(\Omega)} = +\infty$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x_n) = +\infty$.*

Definición 2.6. (BV -CONSISTENCIA) *Sean J, J_1, J_2, \dots funcionales definidos sobre $L^p(\Omega)$. Diremos que $\{J_n\}$ es **BV -consistente** para J si $J_n(x) \rightarrow J(x)$ uniformemente sobre todo conjunto BV -acotado, es decir, si dados $c > 0$ y $\epsilon > 0$, existe $N = N(c, \epsilon)$ tal que para todo $n \geq N$ y para todo $x \in BV(\Omega)$ con $\|x\|_{BV(\Omega)} \leq c$ se tiene que $|J_n(x) - J(x)| < \epsilon$.*

El siguiente teorema es un resultado de estabilidad para los minimizantes globales de funcionales generales definidos sobre $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.7. (ESTABILIDAD) *Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$ y J, J_1, J_2, \dots funcionales definidos sobre $L^p(\Omega)$. Supongamos que J y cada uno de los funcionales J_n son BV -coercitivos, semicontinuos inferiormente y tienen únicos minimizantes globales sobre $BV(\Omega)$, \bar{x} y x_n , respectivamente. Supongamos además que la sucesión $\{J_n\}$ es BV -coercitiva y BV -consistente para J . Entonces $x_n \rightarrow \bar{x}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.*

Si $d \geq 2$ y $p = \frac{d}{d-1}$, reemplazando la hipótesis de semicontinuidad inferior por la de semicontinuidad inferior débil de J y los J_n , se tiene que $x_n \xrightarrow{w} \bar{x}$ en $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

3 FUNCIONALES DE TIKHONOV-PHILLIPS CON PENALIZANTES DE TIPO BV

En esta sección presentaremos resultados de existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes de tipo BV . Más detalles sobre estos resultados como así también las correspondientes demostraciones pueden encontrarse en las referencias [Larrán \(2011\)](#) y [Acar and Vogel \(1994\)](#).

Proposición 3.1. *Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal, acotado e inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$ y $J_\alpha^{BV} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$J_\alpha^{BV}(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha \|x\|_{BV(\Omega)}. \quad (5)$$

Entonces J_α^{BV} tiene un único minimizante global sobre $BV(\Omega)$.

Obs. 3.2. Notar que si bien la norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ no es estrictamente convexa, es la inyectividad de T la que hace que J_α^{BV} sea estrictamente convexo y por lo tanto, que su minimizante global sea único.

A continuación presentamos tres resultados de estabilidad para los minimizantes globales del funcional J_α^{BV} bajo diferentes tipos de perturbaciones. El primer resultado de estabilidad que analizaremos es bajo perturbaciones en el dato y . Este es sin duda el más importante puesto que el problema (1) es mal condicionado, y por lo tanto x no depende de manera continua de y .

Proposición 3.3. (PERTURBACIONES EN EL DATO y) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $y_n \doteq y + \xi_n \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\xi_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, J_α^{BV} como en (5) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J_α^{BV} definida por $J_n(x) \doteq \|Tx - y_n\|^2 + \alpha \|x\|_{BV(\Omega)}$. Sean \bar{x}, x_n los únicos minimizantes globales de J_α^{BV} y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $x_n \rightarrow \bar{x}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$).

Proposición 3.4. (PERTURBACIONES EN EL PARÁMETRO DE REGULARIZACIÓN α) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ inyectivo, $y \in \mathcal{Y}$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$, $\alpha_n \geq \alpha_{\min} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$ para $n \rightarrow \infty$, J_α^{BV} como en (5) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J_α^{BV} definida por $J_n(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha_n \|x\|_{BV(\Omega)}$. Si \bar{x}, x_n son los únicos minimizantes globales de J_α^{BV} y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$, entonces $x_n \rightarrow \bar{x}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$ (débilmente si $p = \frac{d}{d-1}$).

Proposición 3.5. (PERTURBACIONES EN EL OPERADOR T) Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ inyectivo, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \rightarrow T$ uniformemente (i.e. $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$), T_n inyectivo $\forall n \in \mathbb{N}$, J_α^{BV} como en (5) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de J_α^{BV} definida por $J_n(x) \doteq \|T_n x - y\|^2 + \alpha \|x\|_{BV(\Omega)}$. Si \bar{x}, x_n son los únicos minimizantes globales de J_α^{BV} y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$, entonces $x_n \rightarrow \bar{x}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

3.1 Penalización con la seminorma BV y perturbaciones diferenciables

Es razonable cuestionarnos sobre la posibilidad de inducir estabilidad utilizando como penalizante sólo la seminorma BV , es decir el funcional J_0 . Esto nos lleva a considerar el siguiente funcional definido sobre $L^p(\Omega)$

$$J_\alpha^{J_0}(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha J_0(x). \quad (6)$$

Surgen inmediatamente todas las cuestiones relacionadas con los problemas de existencia, unicidad y, obviamente, estabilidad de los minimizantes globales del funcional $J_\alpha^{J_0}$. Como se vio anteriormente, una condición necesaria para la existencia de minimizantes globales del funcional $J_\alpha^{J_0}$ sobre $BV(\Omega)$ es que el mismo sea BV -coercitivo. Se observa inmediatamente que la omisión de $\|x\|_{L^1(\Omega)}$ en el penalizante de $J_\alpha^{J_0}$ puede originar la ausencia de esta propiedad. En efecto, tal es el caso, por ejemplo si el operador T anula funciones constantes (i.e. $T\chi_\Omega = 0$) puesto que para tales funciones x se tiene obviamente que $J_0(x) = 0$. Será necesario entonces imponer condiciones adicionales al operador T para preservar la propiedad de BV -coercitividad del funcional $J_\alpha^{J_0}$.

Por otro lado, de la misma forma que en el caso de la utilización de la norma $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ como penalizante (J_α^{BV} definido como en (5)), desde el punto de vista numérico-computacional surge

además el inconveniente de que el funcional $J_\alpha^{J_0}$ no es derivable pues J_0 no lo es. Una forma de solucionar este problema consiste en considerar en lugar de $J_\alpha^{J_0}$ funcionales de la forma

$$J_\alpha^{J_\beta}(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \alpha J_\beta(x), \quad (7)$$

donde J_β es una perturbación diferenciable de J_0 definida como

$$J_\beta(x) \doteq \sup_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \int_{\Omega} \left(-x \operatorname{div} \vec{v} + \sqrt{\beta(1 - |\vec{v}|^2)} \right) ds, \quad (8)$$

donde β es un parámetro positivo.

A continuación se presentan dos resultados que proveen condiciones suficientes, para la BV -coercitividad y la existencia de minimizantes globales del funcional $J_\alpha^{J_\beta}$ sobre $BV(\Omega)$.

Lema 3.6. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$, $y \in \mathcal{Y}$, $\beta \geq 0$, J_β como en (8), $J_\alpha^{J_\beta}$ como en (7) y supongamos que T no anula funciones constantes (no nulas), es decir $T\chi_\Omega \neq 0$. Entonces $J_\alpha^{J_\beta}$ es BV -coercitivo.

Teorema 3.7. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1}]$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$, $y \in \mathcal{Y}$, $\beta \geq 0$, J_β como en (8) y $J_\alpha^{J_\beta}$ como en (7). Si T no anula funciones constantes (no nulas) entonces el funcional $J_\alpha^{J_\beta}$ tiene un minimizante global sobre $BV(\Omega)$. Si T es inyectivo tal minimizante global es único.

Finalizamos la sección presentando un resultado de estabilidad para los minimizantes globales del funcional $J_\alpha^{J_\beta}$, bajo perturbaciones simultáneas en el operador T y en el dato y .

Teorema 3.8. Sean $p \in [1, \frac{d}{d-1})$, \mathcal{Y} espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathcal{Y})$ tal que $T_n \rightarrow T$ para $n \rightarrow \infty$, $\|T_n\chi_\Omega\| \geq \gamma > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $y \in \mathcal{Y}$, $\{y_n\} \subset \mathcal{Y}$ tal que $y_n \doteq y + \xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\xi_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, $\beta \geq 0$, J_β como en (8), $J_\alpha^{J_\beta}$ como en (7) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una perturbación de $J_\alpha^{J_\beta}$ definida por $J_n(x) \doteq \|T_n x - y_n\|^2 + \alpha J_\beta(x)$. Sean \bar{x} y x_n los únicos minimizantes globales de $J_\alpha^{J_\beta}$ y J_n , respectivamente, sobre $BV(\Omega)$. Entonces $x_n \rightarrow \bar{x}$ en $L^p(\Omega)$ para $n \rightarrow \infty$.

4 EL ENFOQUE BAYESIANO: MODELOS DE MARKOV AUTOREGRESIVOS E HIPERMODELOS

En esta sección presentamos sucintamente el enfoque bayesiano para el tratamiento de problemas inversos y mostraremos como se pueden utilizar modelos de Markov autoregresivos para diseñar modelos estadísticos de regularización los que, bajo ciertas elecciones de las distribuciones involucradas y de los parámetros e hiperparámetros, resultan particularmente adecuados para el tratamiento de problemas con soluciones no regulares como los descriptos en las secciones precedentes. Por simplicidad describiremos solamente un ejemplo unidimensional, aunque las mismas técnicas son fácilmente adaptables a problemas en más dimensiones, en particular, a problemas de restauración de imágenes.

Consideremos una función (o señal) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y denotemos con $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ a una muestra uniformemente espaciada de f , i.e. $x_j = f(\frac{j}{n})$, $1 \leq j \leq n$. Por simplicidad supondremos $f(0) = 0$ y definimos $x_0 \doteq 0$. El paradigma bayesiano comienza con modelar la función

muestreada como un proceso estocástico $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Para este proceso consideraremos un modelo de Markov autoregresivo de primer orden:

$$X_j = X_{j-1} + \theta_j^{\frac{1}{2}} W_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad X_0 = 0 \quad (9)$$

donde $W_j \sim N(0, 1)$ y θ_j es un parámetro conocido como la varianza del proceso de innovación.

Las ecuaciones (9) pueden escribirse en la forma

$$LX = D_{\theta}^{\frac{1}{2}} W, \quad (10)$$

donde $D = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, $X = [X_1, \dots, X_n]^T$, $W = [W_1, \dots, W_n]^T$ y

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Puesto que $W \sim N(0, I)$, de (10) se tiene que la distribución a-priori de X está dada por

$$\pi_{\text{prior}}(x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \|D_{\theta}^{-\frac{1}{2}} Lx\|^2\right). \quad (12)$$

Permitiremos que f pueda presentar saltos. Si la amplitud y ubicación de estos saltos es conocida, esta información *cuantitativa* puede volcarse de manera obvia en la estimación de los parámetros θ_j . Si, en cambio, la información es de tipo *cualitativa* (por ejemplo podríamos saber que f posee saltos pero ignorar el número de ellos y sus ubicaciones y amplitudes), entonces el paradigma bayesiano indica que las varianzas θ_j deben también pensarse como variables aleatorias Θ_j y asignarles una distribución en base al conocimiento previo que se tenga sobre las mismas. En este contexto esta distribución se denomina “hiperdistribución”. Denotaremos entonces con $\pi_{\text{hyper}}(\theta)$ a la hiperdistribución del vector aleatorio $\Theta = [\Theta_1, \dots, \Theta_n]^T$. La distribución conjunta de X y Θ está entonces dada por

$$\pi_{\text{prior}}(x, \theta) = \pi_{\text{prior}}(x|\theta)\pi_{\text{hyper}}(\theta),$$

con la salvedad de que ahora, en lugar de (12) se tiene

$$\pi_{\text{prior}}(x|\theta) = \left(\frac{\det(L^T D_{\theta}^{-1} L)}{(2\pi)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|D_{\theta}^{-\frac{1}{2}} Lx\|^2\right), \quad (13)$$

puesto que la constante de normalización que depende de θ ahora no puede ignorarse. En general el cálculo del determinante en (13) presenta serias dificultades computacionales, especialmente en grandes dimensiones. Una forma de evitar su cálculo consiste en definir las variables

$$Z_j \doteq X_j - X_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad X_0 = 0,$$

donde $Z = [Z_1, \dots, Z_n]^T = LX = D_{\theta}^{-\frac{1}{2}} W$. Así,

$$\begin{aligned} \pi_{\text{prior}}(z|\theta) &= \frac{\sqrt{\det(D_{\theta}^{-1})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|D_{\theta}^{-\frac{1}{2}} z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\|D_{\theta}^{-\frac{1}{2}} z\|^2 + \sum_{j=1}^n \log(\theta_j) \right]\right). \end{aligned}$$

La distribución $\pi_{\text{hyper}}(\theta)$ del vector de varianzas debe modelarse teniendo en cuenta toda la información a-priori de la que se disponga sobre los saltos que presenta f . Como dijimos previamente, supondremos que f es suave a trozos con algunas discontinuidades de saltos, lo que sugiere que las variables Θ_j deben ser independientes. Supondremos además que la ubicación de los saltos es desconocida y ninguna región tiene predilección sobre otra para la ocurrencia de los mismos, lo cual sugiere que las variables Θ_j deberían ser idénticamente distribuidas. Finalmente, suponemos que existen solo “unos pocos” saltos, lo cual sugiere para las Θ_j una distribución que permita unas pocas observaciones anómalas. Existen dos candidatos naturales para esta distribución, a saber: la distribución Gamma (Γ) y la distribución Gamma inversa ($\text{inv}\Gamma$). Con la primera elección se tiene que

$$\Theta_j \sim \Gamma(\alpha, \beta), \quad \pi_{\text{hyper}}(\theta) \propto \prod_{j=1}^n \theta_j^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\theta_j}{\beta}\right) \chi_{\mathbb{R}_+^n}(\theta)$$

mientras que con la segunda

$$\Theta_j \sim \text{Inv}\Gamma(\alpha, \beta), \quad \pi_{\text{hyper}}(\theta) \propto \prod_{j=1}^n \theta_j^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{\theta_j}\right) \chi_{\mathbb{R}_+^n}(\theta).$$

El método bayesiano requiere finalmente del modelo de observación, al que en nuestro caso lo supondremos lineal con ruido aditivo (en nuestro caso gaussiano con media cero):

$$Y = AX + E, \quad E \sim N(0, \sigma^2 I),$$

de donde, expresando a X como $X = L^{-1}Z$, se obtiene que la distribución de la observación Y condicionada a la variable de interés Z , denominada “distribución de verosimilitud”, está dada por

$$\pi_{\text{likelihood}}(y|z) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|y - AL^{-1}z\|^2\right),$$

(observar que esta densidad no depende del hiperparámetro θ). Finalmente, la utilización de la fórmula de Bayes nos permite escribir la densidad a-posteriori de los vectores aleatorios (Z, Θ) condicionada a la observación $Y = y$ como

$$\begin{aligned} \pi_{\text{post}}(z, \theta|y) &\propto \pi_{\text{likelihood}}(y|z, \theta) \pi(z, \theta) \\ &= \pi_{\text{likelihood}}(y|z) \pi_{\text{prior}}(z, \theta) \pi_{\text{hyper}}(\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

A diferencia de los métodos determinísticos que resultan en una sola solución aproximada (o regularizada), los métodos bayesianos resultan en una distribución de la variable de interés, de la que deben ahora obtenerse estimadores puntuales. Uno de los más utilizados en este contexto es el llamado estimador “MAP” (“Maximun a-Posteriori”) definido como el maximizante global de la distribución a-posteriori (14), i.e. se definen

$$(z_{MAP}, \theta_{MAP}) = \arg \max \pi_{\text{post}}(z, \theta|y). \quad (15)$$

Una forma eficiente de calcular este estimador (z_{MAP}, θ_{MAP}) es mediante el siguiente algoritmo iterativo cíclico:

- (i) inicializar $\theta = \theta_0, k = 1$;

- (ii) actualizar (estimar si $k = 1$) $z^{(k)} \doteq \arg \max \pi_{\text{post}}(z, \theta^{(k-1)}|y)$;
- (iii) actualizar $\theta^{(k)} \doteq \arg \max \pi_{\text{post}}(z^{(k)}, \theta|y)$;
- (iv) incrementar k en 1 y repetir desde (ii) hasta obtener convergencia (i.e. hasta satisfacer un cierto criterio de parada).

Se puede demostrar de manera sencilla que tanto para el caso de una hiperdistribución Γ como para el caso de una $\text{Inv}\Gamma$, el paso (ii) del algoritmo anterior es equivalente a resolver para $z^{(k)}$, en el sentido de mínimos cuadrados, el sistema

$$\begin{bmatrix} \sigma^{-1}AL^{-1} \\ D_{\theta}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} z^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma^{-1}y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

mientras que el paso (iii) puede resolverse de manera explícita, resultando

$$\theta_j^{(k)} = \beta \left(\gamma + \sqrt{\frac{z_j^{(k)2}}{2\beta} + \gamma^2} \right), \quad 1 \leq j \leq n, \quad \gamma \doteq \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}$$

si la densidad de $\pi_{\text{prior}}(\Theta_j)$ es la de una $\Gamma(\alpha, \beta)$, mientras que

$$\theta_j^{(k)} = \frac{2}{2\alpha + 3} \left(\beta + \frac{z_j^{(k)2}}{2} \right), \quad 1 \leq j \leq n,$$

si la densidad de $\pi_{\text{prior}}(\Theta_j)$ es la de una $\text{Inv}\Gamma(\alpha, \beta)$. La metodología anterior se puede generalizar de manera relativamente sencilla a problemas en dos dimensiones. Por razones de extensión no presentaremos aquí las correspondientes deducciones, algunas de las cuales pueden verse en [Calvetti and Somersalo \(2008\)](#).

5 REGULARIZACIÓN POR VARIACIÓN ACOTADA Y ESTIMADORES MAP

Como ya mencionamos, los métodos de regularización por variación acotada han sido empleados exitosamente en los últimos 15 años en una gran variedad de aplicaciones, especialmente en procesamiento de señales y restauración de imágenes y en Medicina, en problemas en los cuales es deseable preservar bordes y discontinuidades que pudieran existir en la solución exacta. Los métodos BV son métodos de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes no suaves ($\|\cdot\|_{BV}$ y J_0) o por una perturbación diferenciable de la seminorma, J_{β} . En los casos mencionados, el uso de alguno de estos penalizantes puede resultar en una mejora significativa en las soluciones aproximadas, con respecto a las que pueden obtenerse con otros penalizantes. Esto justifica el costo computacional extra debido al uso de penalizantes no cuadráticos y no diferenciables.

Denotemos con $x \in \mathbb{R}^N$, $N = n^2$, a la versión vectorizada de una imagen discretizada de $n \times n$ píxeles. La contraparte discreta del penalizante J_0 se define como

$$J_0(x) \doteq \sum_{j=1}^N \sqrt{v_j^2 + h_j^2},$$

donde $v = L_V x$, $h = L_H x$, siendo L_V y L_H las matrices de $N \times N$ que definen las aproximaciones discretas de las derivadas parciales en las direcciones vertical y horizontal, respectivamente. Más precisamente, L_V y L_H están dadas por $L_V \doteq I_n \otimes L$, $L_H \doteq L \otimes I_n$, donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$, L es la matriz de diferencias de primer orden dada en (11) y “ \otimes ” denota el producto de Kronecker. Considerando la versión discreta del modelo lineal $y = Ax$, se tiene que la solución regularizada con el método *BV* con penalizante J_0 es el minimizante global de la contraparte discreta del funcional de Tikhonov-Phillips generalizado $J_\delta^{J_0}$ definido como en (6), es decir

$$x_\delta^{J_0} = \arg \min_x \left\{ \|Ax - y\|^2 + \delta \sum_{j=1}^N \sqrt{v_j^2 + h_j^2} \right\}. \quad (17)$$

El parámetro de regularización δ puede seleccionarse, por ejemplo, mediante el Principio de Discrepancia de Morozov (Morozov (1996)) o el método de la curva “*L*” (Engl et al. (1996)). Asimismo, la solución regularizada con el método de Tikhonov-Phillips con penalizante cuadrático, $\|\cdot\|^2$, es el minimizante global de la contraparte discreta del funcional J_δ^{TP} definido como en (3), esto es

$$x_\delta^{TP} = \arg \min_x \left\{ \|Ax - y\|^2 + \delta \sum_{j=1}^N (v_j^2 + h_j^2) \right\}. \quad (18)$$

Notar que mientras que en (18) sólo se requiere la solución de problemas lineales de mínimos cuadrados, en (17) se requiere la solución de sistemas no lineales lo cual resulta sumamente oneroso desde el punto de vista computacional. Es bien sabido que el minimizante global x_δ^{TP} de (18) satisface la forma regularizada, con Tikhonov-Phillips, de la ecuación normal lineal (2)

$$A^T A x + \delta x = A^T y.$$

A continuación mostraremos como el penalizante asociado a la seminorma *BV* en (17) se puede escribir como un penalizante cuadrático asociado a un funcional no lineal. Para ello expresemos el penalizante J_0 de la siguiente manera:

$$J_0(x) = \sum_{j=1}^N \sqrt{v_j^2 + h_j^2} = \sum_{j=1}^N \frac{v_j^2 + h_j^2}{\sqrt{v_j^2 + h_j^2}} = \|W_x^{1/2} M x\|^2,$$

donde $M \doteq \begin{bmatrix} L_V \\ L_H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times N}$ y $W_x \doteq I_2 \otimes \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{(L_V x)_j^2 + (L_H x)_j^2}} \right) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$. En consecuencia, para el método de Tikhonov-Phillips con penalizante J_0 , la correspondiente ecuación normal no lineal puede escribirse en la forma

$$A^T A x + \delta M^T W_x M x = A^T y. \quad (19)$$

De la ecuación (19) deducimos el siguiente método iterativo para aproximar la correspondiente solución.

(i) Inicializar $x = x_0$, $k = 1$.

(ii) Actualizar x :

$$(A^T A + \delta M^T W_{x^{(k-1)}} M) x^{(k)} = A^T y. \quad (20)$$

(iii) Incrementar k en uno y repetir desde (ii) hasta obtener convergencia (i.e. hasta satisfacer un cierto criterio de parada).

Se puede probar que este método iterativo para aproximar el minimizante global del funcional (17) es equivalente al algoritmo cíclico iterativo para aproximar el estimador MAP de la distribución a-posteriori en el caso bidimensional cuando la hiperdistribución de las componentes del vector de varianzas es una Gamma de parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = \frac{2\sigma^4}{\delta^2}$. De igual modo, para el caso unidimensional, se puede probar que la solución regularizada por variación total con penalizante J_0 (i.e. el minimizante global del funcional (6)), coincide con el estimador MAP cuando la hiperdistribución de las varianzas se elige como una Gamma con parámetros $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = \frac{2\sigma^4}{n^2\delta^2}$. En este sentido entonces, una solución regularizada por variación total puede verse como un estimador MAP de un hipermodelo bayesiano. Estas observaciones son importantes pues nos permiten aproximar las soluciones regularizadas por variación total utilizando los algoritmos cíclicos iterativos derivados del enfoque bayesiano los que, a menudo son muy rápidos y eficientes.

Por otro lado, es importante observar que la solución de (19) puede verse como el estado estacionario de la siguiente ecuación de difusión no lineal

$$\frac{dx}{dt}(t) = (A^T A + \delta M^T W_{x(t)} M) x(t) - A^T y,$$

por lo que también podría utilizarse un algoritmo de marcha de ecuaciones diferenciales para llevar cualquier estado inicial cerca del estado estacionario.

Finalizamos la sección mostrando que ciertas variantes de este enfoque dan lugar a los métodos de regularización de Perona-Malik, otros métodos ampliamente utilizados en procesamiento de imágenes (Perona and Malik (1990)). Estas variantes se obtienen cambiando en la matriz W_x de (19) el funcional no lineal asociado. Por ejemplo, si $W_x = I_2 \otimes \text{diag} \left(\frac{1}{1 + \nu((L_V x)_j^2 + (L_H x)_j^2)} \right) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ la solución de la ecuación normal no lineal (19) es la solución regularizada por el método de Perona-Malik. En efecto, la ecuación (19) induce ahora un método iterativo que es equivalente al método de iteración cíclica de la sección anterior cuando la hiperdistribución de las varianzas se elige como una Gamma inversa con parámetros $\alpha = \frac{\delta}{2\sigma^2\nu} - 2$ y $\beta = \frac{1}{2\nu}$.

En consecuencia, tanto el método de regularización por variación acotada con penalizante J_0 y el método de Perona-Malik pueden ser vistos como métodos para estimaciones MAP en hipermodelos jerárquicos Bayesianos.

6 APLICACIONES EN PROBLEMAS DE RESTAURACIÓN DE SEÑALES E IMÁGENES

A continuación, presentamos algunos resultados numéricos de estos métodos iterativos en problemas de restauración de señales e imágenes.

Ejemplo 1: Para este caso utilizamos un modelo de tipo convolución dado por

$$g(t) = \int_0^1 h(t, s) f(s) ds, \quad (21)$$

donde $h(t, s)$ es un núcleo gaussiano de la forma $h(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b}} \exp\left(-\frac{(t-s)^2}{2\sigma_b^2}\right)$. Procedemos a discretizar el modelo (21) en forma usual (cuadratura y colocación), resultando en un modelo discreto de la forma

$$y = Ax, \quad (22)$$

donde A es una matriz de $n \times n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x_j = f(t_j)$, $y_j = g(t_j)$, $t_j = \frac{j}{n}$, $1 \leq j \leq n$). Para este caso tomamos $n = 100$, $\sigma_b = 0.05$ y utilizamos el algoritmo cíclico descrito en la sección 4, con una hiperdistribución Gamma de parámetros $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = 0.1864$. El dato y se obtuvo contaminando con ruido blanco aditivo del orden de 1 % (del rango del dato sin ruido). En la Figura 1 se muestran el dato y la solución exacta que, en este caso es constante a trozos. En la Figura 2 se muestran las aproximaciones obtenidas con el algoritmo MAP después de 13

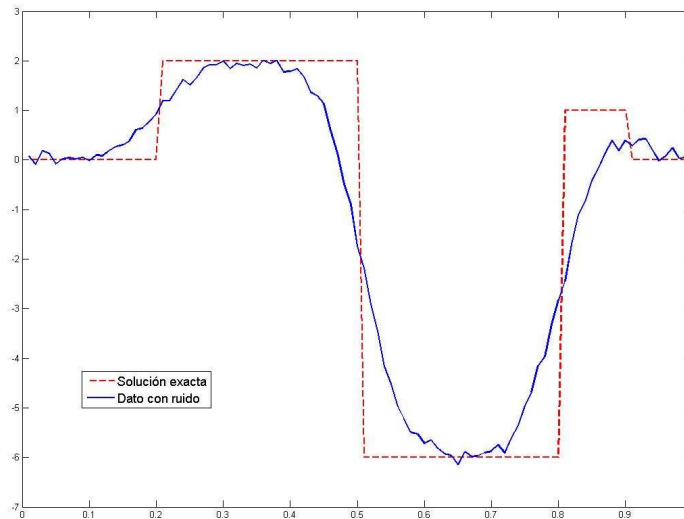


Figure 1: Solución exacta (- -) y dato (línea sólida).

iteraciones y la solución obtenida con el método clásico de Tikhonov-Phillips (el parámetro de regularización utilizado en este caso fue obtenido por el método de la curva L , $\delta = 0.0208$). Se observa claramente como la aproximación obtenida con el método MAP es capaz de capturar satisfactoriamente los saltos presentes en la solución exacta, mejorando significativamente a la solución regularizada obtenida con el método clásico.

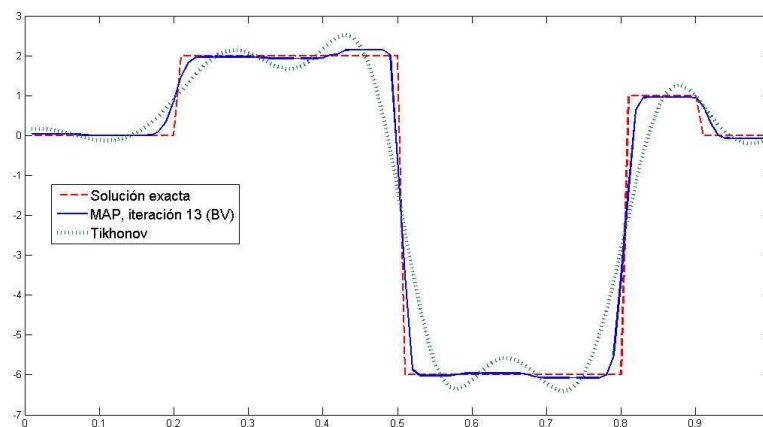


Figure 2: Solución exacta (- -) y soluciones regularizadas con MAP (BV) y Tikhonov-Phillips.

Ejemplo 2: Para este ejemplo utilizamos nuevamente el modelo del Ejemplo 1 con parámetros $n = 100$, $\sigma_b = 0.03$, $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = 0.1858$. En la Figura 3 se muestran el dato y la solución exacta que, en este caso, posee tres saltos pero es suave en el intervalo $[0.25, 0.95]$. La Figura 4 muestra la aproximación MAP después de 13 iteraciones y la solución regularizada por el método de Tikhonov-Phillips clásico. Aquí nuevamente se observa como la aproximación MAP es significativamente mejor donde la solución exacta es constante a trozos, pero de menor calidad donde la solución exacta es suave (en esta región se observa el clásico efecto escalera de la regularización BV).

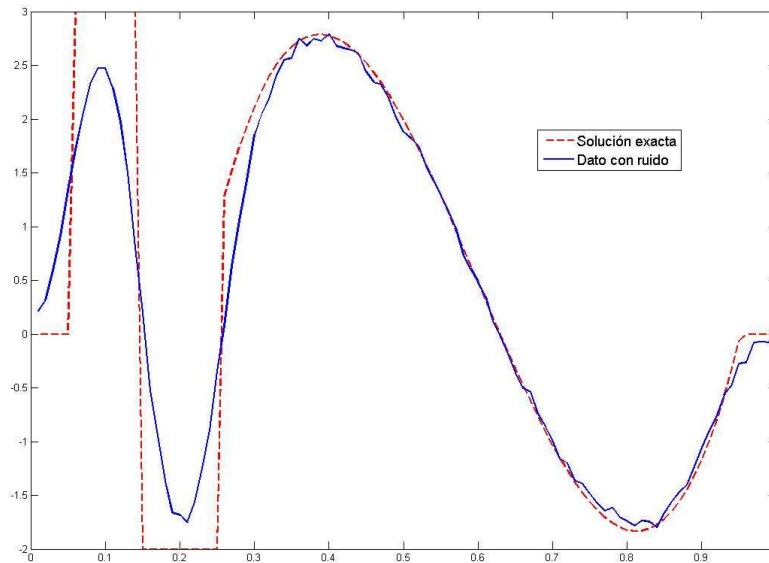


Figure 3: Solución exacta (- -) y dato (línea sólida).

Ejemplo 3: Para este ejemplo utilizamos un modelo de convolución bidimensional con función de dispersión puntual de tipo “turbulencia atmosférica” (núcleo gaussiano) con varianzas vertical y horizontal σ_v^2 y σ_h^2 , respectivamente. El modelo fue discretizado de la forma usual con la misma cantidad de puntos en ambas direcciones, resultando en un modelo discreto de la forma $y = Ax$ donde A es una matriz de $N \times N$, $N = n^2$ y $x, y \in \mathbb{R}^N$. Al dato del problema inverso se lo contaminó con ruido blanco aditivo de varianza σ^2 . Los valores utilizados en este caso fueron $n = 100$, $\sigma_h = 4$, $\sigma_v = 4$ y $\sigma = 0.01$. En la Figura 5 se muestran las imágenes original y degradada (dato) mientras que en la Figura 6 se muestran las restauraciones obtenidas con el algoritmo iterativo descrito en la Sección 5 con $\delta = 0.001$ después de 4 iteraciones (a) y con el método de Tikhonov-Phillips con el mismo parámetro δ (b). Aquí nuevamente se observa como la aproximación MAP mejora la detección de bordes pero tiende a producir mayor “pixelado” en regiones donde la solución exacta es regular.

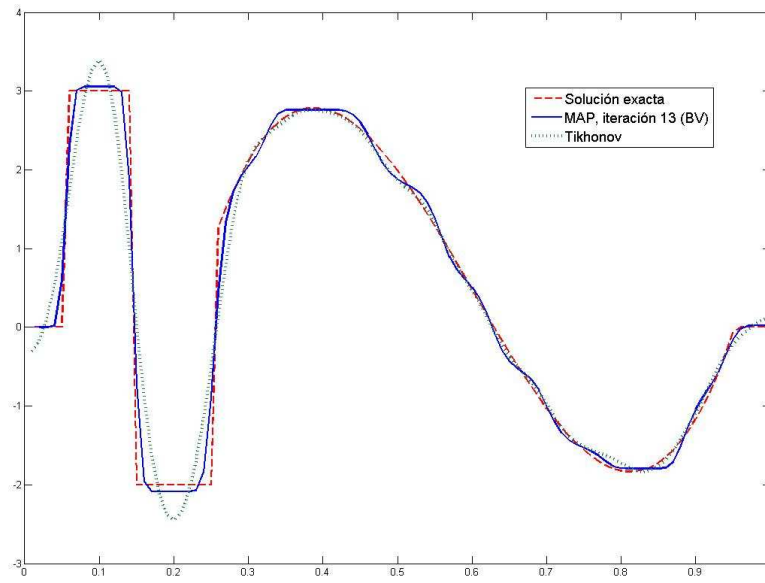


Figure 4: Solución exacta (- -) y soluciones regularizadas con MAP (BV) y Tikhonov-Phillips.

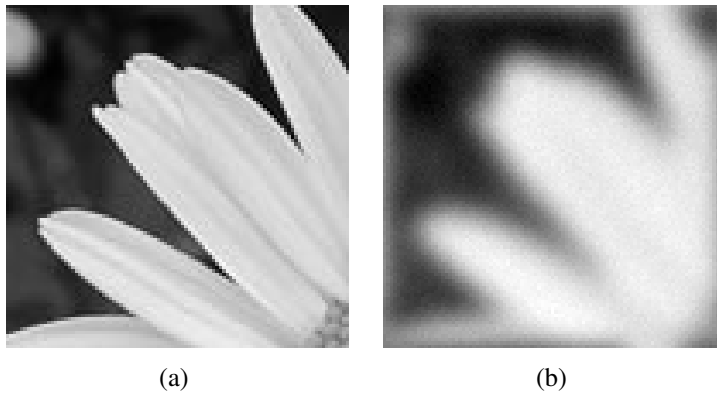


Figure 5: (a): Imagen original; (b): Imagen degradada con ruido.

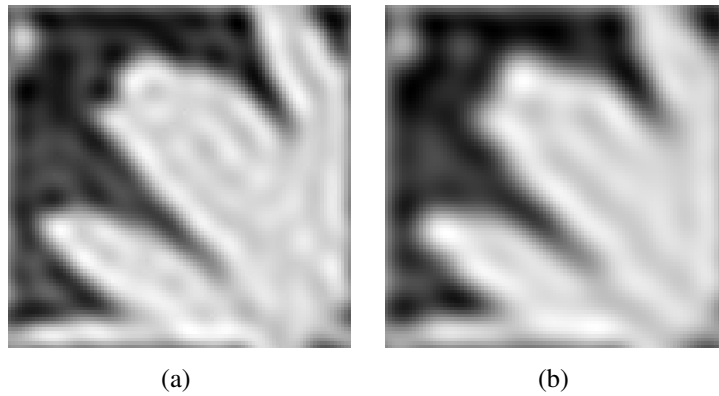


Figure 6: (a): Algoritmo iterativo; (b): Tikhonov-Phillips.

Ejemplo 4: Para este caso se utilizó el mismo modelo que en el Ejemplo 3 con parámetros $n = 100$, $\sigma_v = \sigma_h = 4.5$, $\sigma = 0.01$ y $\delta = 0.001$. La Figura 7 muestra las imágenes original y degradada (dato) mientras que en la Figura 8 se muestran las restauraciones obtenidas con el algoritmo iterativo (a) y con Tikhonov-Phillips (b), observándose idénticas características que en el ejemplo anterior.

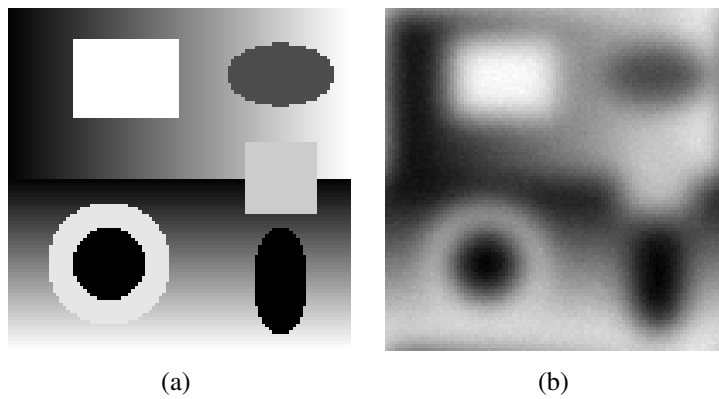


Figure 7: (a): Imagen original; (b): Imagen degradada con ruido.

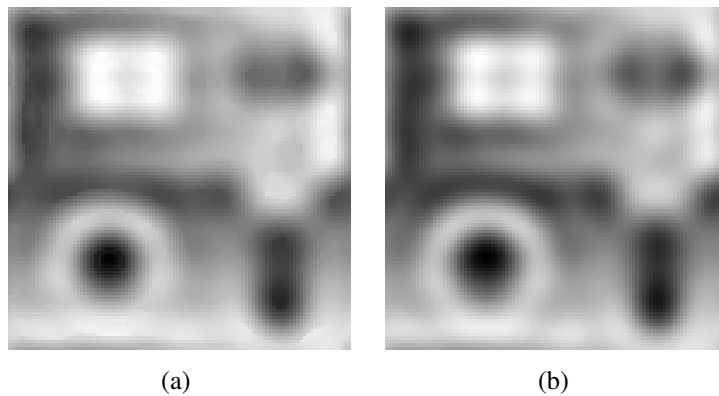


Figure 8: (a): Algoritmo iterativo; (b): Tikhonov-Phillips.

7 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron algunos resultados sobre existencia, unicidad y estabilidad de los minimizantes globales de funcionales de Tikhonov-Phillips generalizados con penalizantes “de tipo BV ”. Se presentó brevemente el enfoque bayesiano para el tratamiento de problemas inversos y se mostró como este enfoque, mediante el uso de modelos autoregresivos de Markov puede utilizarse para construir métodos estadísticos de regularización, particularmente apropiados para el caso de soluciones exactas que presentan saltos, discontinuidades, vértices o regiones de gradiente pronunciado. También se mostró como la seminorma BV se puede escribir como un penalizante cuadrático asociado a un funcional no lineal, resultando en una ecuación normal no lineal, de la que a su vez derivamos un método iterativo para aproximar la correspondiente solución. Asimismo mostramos también cómo estos métodos iterativos son casos particulares de los métodos resultantes del enfoque bayesiano para cierto tipo de distribuciones a-priori y determinados valores de los parámetros e hiperparámetros. Finalmente se presentaron varios resultados numéricos de estos métodos iterativos en problemas de restauración de señales e imágenes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado en parte por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, a través del proyecto PIP 2010-2012 Nro. 0219, por la Universidad Nacional del Litoral, UNL, a través del proyecto CAI+D 2009-PI-62-315, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, ANPCyT, a través del proyecto PICT 2008-1301 y por la Air Force Office of Scientific Research, AFOSR, a través de la Grant FA9550-10-1-0018.

REFERENCIAS.

- Acar R. and Vogel C.R. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 10:1217–1229, 1994.
- Calvetti D. and Somersalo E. Hypermodels in the bayesian imaging framework. *Inverse Problems*, 24:20pp, 2008.
- Dautray R. and Lions J.L. *Spectral Theory and Applications*, volume 3 of *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer, 1990.
- Dobson D. and Santosa F. An image enhancement technique for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 10:317–334, 1994.
- Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A. *Regularization of inverse problems*, volume 375 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, 1996.
- Gutman S. Identification of discontinuous parameters in flow equations. *SIAM Journal on Control and Optimizations*, 28:1049–1060, 1990.
- Hadamard J. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- Larrán A.C. Regularización de problemas inversos mal condicionados: $M\tilde{A}$ todos espectrales y de penalización por variación total. *Tesis de Maestría en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán*, 2011.
- Mazzieri G.L., Spies R.D., and Temperini K.G. Existence, uniqueness and stability of minimizers of generalized tikhonov phillips functionals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 396:396–411, 2012.
- Morozov V.A. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Math. Dokl.*, 7:414–417, 1996.

- Perona P. and Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:629–639, 1990.
- Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 9:84–97, 1962.
- Rudin L.I., Osher S., and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Proceedings of the 11th Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies, Physica D*, 60:259–268, 1992.
- Tikhonov A.N. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet Math. Dokl.*, 4:1624–1627, 1963.