Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXI, págs. 2485-2496 (artículo completo)
Alberto Cardona, Paul H. Kohan, Ricardo D. Quinteros, Mario A. Storti (Eds.)
Salta, Argentina, 13-16 Noviembre 2012

VIBRACIONES DE PLACAS DELGADAS SUPERELÍPTICAS CON FUERZAS EN SU PLANO

Santiago Maiz[a], Diana V. Bambill [a,b], Carlos A. Rossit[a,b]

[a]*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Universidad Nacional del Sur Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.* http://www.uns.edu.ar
[b]*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina*

E-mail: smaiz@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, carossit@crib.edu.ar,

Palabras clave: Vibración transversal, placas superelípticas, carga crítica de pandeo, método de Ritz.

Resumen. El presente trabajo se refiere al estudio dinámico de placas delgadas de forma superelíptica que vibran transversalmente y están sometidas a la acción de cargas que actúan en su plano medio. Como es sabido, el definir el contorno de la placa con una función superelítica permite analizar desde una placa elíptica, pasando por la circular y hasta una placa rectangular con vértices ligeramente redondeados. Este último caso, representa una situación tecnológica habitual en orden a disminuir concentraciones de tensiones y su modelación superelíptica favorece su resolución. La presencia de fuerzas en el plano puede constituir una perturbación importante en el desempeño dinámico estructural de la placa y debe ser considerada en la formulación analítica del problema. Se determinan las primeras frecuencias de vibración transversal de diversas configuraciones de placas superelípticas sometidas a fuerzas en su plano de distinta magnitud. Como casos particulares, se determinan valores críticos de la carga que provocan inestabilidad elástica en la placa. El problema es analizado mediante el método de Ritz, aproximando las amplitudes de desplazamiento transversal con expresiones polinómicas en las coordenadas cartesianas. Los resultados obtenidos mediante el enfoque propuesto, muestran satisfactoria concordancia con casos particulares del modelo en análisis disponibles en la literatura técnico-científica.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

1 INTRODUCCION

En numerosas situaciones tecnológicas, las exigencias de diseño requieren la utilización de placas de diferentes formas en su contorno.

En ese contexto adquiere trascendencia el estudio de las placas superelípticas.

Se denomina así a las placas cuyo perímetro es definido por una función superelíptica con una potencia que se corresponde con su forma, que variará entre rectángulo de vértices redondeados y una elipse:

$$\left[\frac{x}{a}\right]^{2\alpha}+\left[\frac{y}{b}\right]^{2\alpha}=1 \tag{1}$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente y α es un parámetro que define la forma de la placa. En efecto, en caso de que α=1, la ecuación (1) representa en general una elipse y como caso particular (a=b) una circunferencia. (Figura 1)

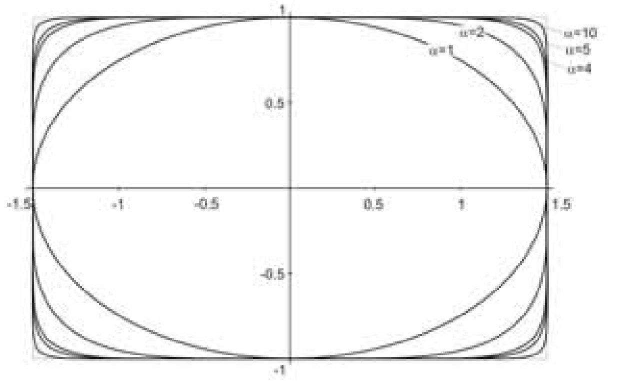

Figura 1: Contornos de placas superelípticas correspondientes a valores de α = 1, 2, 4, 5 y 10, para a/b =3/2

Obviamente, valores muy grandes de α aproximarán el contorno al de un rectángulo al reducir significativamente el radio en los vértices.

Se cuenta entonces, con una herramienta que permite un tratamiento unificado para un amplio rango de placas considerando placas circulares, elípticas o rectangulares eligiendo el parámetro adecuado.

No son numerosos los trabajos sobre placas superelípticas y aún elípticas en la literatura.

Entre los trabajos sobre placas elípticas merecen consignarse las contribuciones de Sato (1972, 1973, 1976 y 2002) quien investigó profundamente las vibraciones transversales de placas elípticas macizas con distintas condiciones de borde.

También, entre los trabajos pioneros debe mencionarse el de DeCapua y Sun (1972) que estudiaron las frecuencias de placas ortótropas superelípticas utilizando polinomios como funciones aproximantes en el método de Ritz

Zhou et al. (2004) estudiaron la vibración tridimensional de placas superelípticas generalizadas, basado en la teoría lineal de la elasticidad utilizando el método de Ritz para derivar la ecuación de frecuencias. Series triplicadas de polinomios de Chebyshev fueron utilizadas en la formulación de las funciones admisibles.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

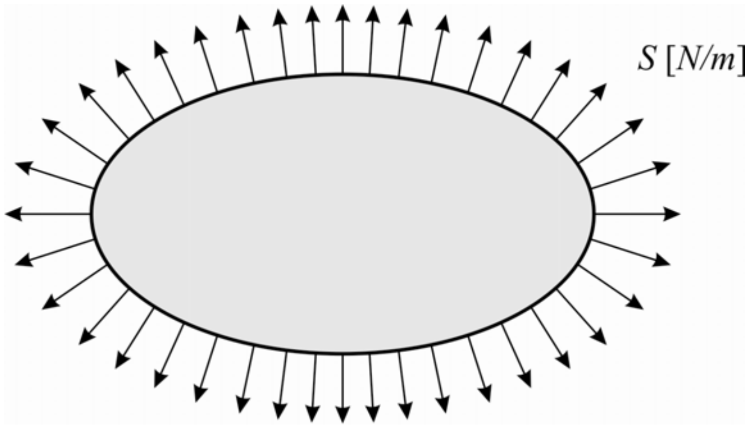

Figura 2: Placa superelíptica α=1 con esfuerzos uniformes en el plano

En el caso de placas superelípticas con estados de cargas en su plano, se menciona el trabajo de Wang et al. (1994) que estudiaron su vibración y pandeo utilizando el llamado Método de Rayleigh *pb* -2 tomando como funciones aproximantes el producto de una función básica (*b)* por un polinomio bidimensional completo *(p-2)* , y el más reciente de Altekin (2008) estudió la vibración y el pandeo de placas apoyadas en cuatro puntos simétricos a los ejes por el método de Ritz utilizando funciones polinómicas.

En el presente trabajo se estudia la influencia de un estado de fuerzas hidróstático de tracción en el plano medio de la placa sobre las frecuencias de vibración transversal de la placa superelíptica empotrada (Figura 2). En caso de fuerzas de compresión, se determinan los valores críticos.

2 EL MÉTODO DE RITZ

Cuando la placa ejecuta uno de sus modos normales de vibración, el desplazamiento de la superficie media de la placa *w(x,y,t)* puede ser representado mediante el producto:

$$w(x,y,t) = W(x,y)\, e^{i\omega t} \tag{2}$$

donde W es una función continua que representa la amplitud de la deformación de la superficie media y ω es la frecuencia circular natural.

Se obtendrá una solución aproximada del problema mediante el método de Ritz. Para ello es necesario utilizar como aproximación para la amplitud W, alguna expresión que satisfaga al menos las condiciones esenciales de borde. En este caso la expresión para W será definida como una sumatoria con coeficientes indeterminados C_i.

$$W(x,y) \cong W_a(x,y) = \sum_{i=1}^{R} C_i\, f_i(x,y), \tag{3}$$

en la que f representa funciones continuas:

$$f_i(x,y) = \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2\alpha} - 1\right]^n \phi_i(x,y) \tag{4}$$

La expresión en el corchete define el contorno de la placa, el parámetro n depende de la vinculación de la placa y los ϕ_i's son monomios elegidos de un set de monomios (Fig. 3) de la forma:

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

$$x^{q-p}y^p \tag{5}$$

Entonces, la solución aproximada (3) deviene en:

$$W_a(x,y)=\sum_{i=1}^{R}C_i\, f_i(x,y)=\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2\alpha}-1\right]^n\sum_{q=0}^{s}\sum_{p=0}^{q}C_i\,x^{q-p}y^p$$
$$\left(i=\frac{q(q+1)}{2}+(p+1);\ R=\frac{(s+1)(s+2)}{2}\right) \tag{6}$$

que satisface las condiciones de borde de placas libres cuando n=0, simplemente apoyadas cuando n=1 y empotradas cuando n=2.

0	1									
1	x	y								
2	x^2	xy	y^2							
.	.	.	.	.						
.	.	.	.	.	.					
.	.	.	.	.	.	.				
q	x^q	$x^{q-1}y$	$x^{q-2}y^2$….	$x^{q-p}y^p$	.	.	y^q			
.	.									
k	x^k	$x^{k-1}y$	$x^{k-2}y^2$….	$x^{k-p}y^p$	.	.	.	.	xy^{k-1}	y^k
	0	1	2…..	p	.	.	q..	.	k-1	k

Figura 3: Conjunto de monomios elegidos

El funcional de energía que gobierna el problema de la placa vibrante de la Figura 1 es:

$$J(W)=\iint_A D\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+S\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy$$
$$-\frac{1}{2}\omega^2\rho h\iint_A W^2dxdy \tag{7}$$

donde A es el dominio de la placa, ν es el coeficiente de Poisson, ρ es la densidad del material de la placa, h su espesor uniforme y S es la carga en el plano medio de la placa y normal a su borde expresada en N/m como se observa en la Figura 2.

$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, es la rigidez flexional de la placa y E módulo de Young.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

Es conveniente normalizar las coordenadas:

$$\xi = \frac{x}{a} \qquad , \qquad \eta = \frac{y}{b} \tag{8}$$

con lo que:

$$W_a(\xi,\eta) = \sum_{q=0}^{s}\sum_{p=0}^{q} \overline{C}_i \left[\xi^{2\alpha} + \eta^{2\alpha} - 1\right]^n \xi^{q-p}\eta^p \tag{9}$$

donde $\overline{C}_i = C_i \ a^{q-p} b^p$.

De acuerdo con el método de Ritz, luego de introducir la expresión aproximada $W_a(\xi,\eta)$, Ec. (9) en la Ec. (7), la integración de $J(W_a)$ conduce a una función cuadrática homogénea en los desconocidos coeficientes de desplazamiento $\overline{C}_i$. La minimización de dicha función lleva a un sistema de ecuaciones homogéneas de primer orden en los $\overline{C}_i$:

$$\frac{\partial J(W_a)}{\partial \overline{C}_i} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,3,....,R. \tag{10}$$

El sistema de ecuaciones obtenido puede ser escrito en la forma:

$$\left[\mathbf{K} + N\mathbf{H} - \Omega^2\mathbf{L}\right]\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \tag{11}$$

donde $N = \frac{Sab}{D}$, es el valor adimensional de la carga en el plano, $\Omega = \omega\, ab\sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ son los coeficientes de frecuencia naturales de vibración del sistema y **K, H** y **L** son matrices simétricas cuyos elementos vienen dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \iint_{\overline{A}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \varphi_{i,\xi\xi}\varphi_{j,\xi\xi} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \varphi_{i,\eta\eta}\varphi_{j,\eta\eta} + \nu\left(\varphi_{i,\xi\xi}\varphi_{j,\eta\eta} + \varphi_{j,\xi\xi}\varphi_{i,\eta\eta}\right) + 2(1-\nu)\varphi_{i,\xi\eta}\varphi_{j,\xi\eta}\right] d\xi d\eta \\ h_{ij} &= \iint_{\overline{A}} \left(\varphi_{i,\xi}\varphi_{j,\xi} + \varphi_{i,\eta}\varphi_{j,\eta}\right) d\xi d\eta \\ l_{ij} &= \iint_{\overline{A}} \varphi_i\varphi_j\, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{12}$$

en las cuales $\overline{A}$ es el dominio normalizado, i,j son enteros (1,2,…, R) y $\varphi_i(\xi,\eta) = \left[\xi^{2\alpha} + \eta^{2\alpha} - 1\right]^n \xi^{q-p}\eta^p$.

Los coeficientes de frecuencia natural Ω son obtenidos estableciendo la nulidad del determinante de la Ec. (11), definiendo con anterioridad el valor N de la carga en el plano. La condición de no trivialidad conduce a una ecuación trascendente en Ω. En tanto que el coeficiente de carga crítica N_{cr} se determina haciendo nulo el coeficiente de frecuencias Ω y procediendo de manera similar a lo antedicho, quedando el problema de carga crítica de la siguiente forma:

$$\left[\mathbf{K} + N_{cr}\mathbf{H}\right]\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \tag{13}$$

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

Como es sabido, las raíces de dicha ecuación constituyen límites superiores, por lo que hay que tener sumo cuidado con los valores de carga crítica de pandeo, ya que los coeficientes resultantes de la ecuación (13) producen la inestabilidad de la estructura.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han realizado pruebas de convergencia y comparaciones con trabajos anteriores llegando a una predicción optima de los coeficientes de frecuencias y de pandeo con R=136.

La tabla N°1 muestra los coeficientes de carga N_{cr} de pandeo para diferentes placas superelípticas empotradas.

ν=0.3	a/b					
α	1	1.2	1.5	2	2.5	3
1	-14.682	-15.128	-16.856	-20.868	-25.317	-29.899
	(-14.684)		(-16.861)	(-20.877)	(-25.331)	(-29.920)
2	-13.175	-13.621	-15.361	-19.484	-24.123	-28.872
	(-13.186)		(-15.375)	(-19.502)	(-24.147)	(-28.898)
3	-13.090	-13.535	-15.266	-19.380	-24.032	-28.720
4	-13.079	-13.523	-15.253	-19.365	-24.019	-28.616
	(-13.090)			(-19.369)	(-24.023)	(-28.641)
5	-13.076	-13.520	-15.250	-19.362	-24.016	-28.589
10	-13.071	-13.517	-15.248	-19.361	-24.016	-28.576
	(-13.080)			(-19.351)	(-23.822)	(-28.852)
rectangular	-13.087[¥]		-15.253[¥]	-19.362[¥]	-24.015[¥]	-28.577[¥]

Tabla 1: Coeficientes de carga crítica de pandeo para una placa superelíptica empotrada.

Los valores entre paréntesis fueron calculados por Wang et al. (1994), los valores para la placa rectangular [¥] calculados por S. P. Timoshenko and J. M. Gere (1961).

Debe notarse que los valores negativos en la tabla 1 corresponden justamente a cargas de compresión, ya que en el desarrollo se supuso como positiva la carga de tracción.

En las tablas 2 a 6 se muestran los coeficientes de frecuencias para distintas placas elípticas. En la tabla 2 dichos coeficientes son calculados sin carga en plano medio de la placa. Los valores entre paréntesis corresponden al estudio realizado por Wang et al. (1994).

	N=0					
a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
1	10.216	21.260	21.260	34.876	34.877	39.771
	(10.218)	(21.259)	(21.259)	(34.877)	(34.877)	(39.775)
1.2	10.461	19.735	23.615	32.625	35.516	43.325
1.5	11.420	18.981	27.658	29.593	38.023	43.220
	(11.422)	(18.981)	(27.668)	(29.596)	(38.023)	(43.221)
2	13.689	19.749	27.988	34.929	38.497	44.024
	(13.694)	(19.749)	(27.991)	(34.947)	(38.496)	(44.022)
2.5	16.258	21.593	28.551	37.233	42.435	47.715
	(16.265)	(21.592)	(28.556)	(37.232)	(42.461)	(47.721)
3	18.933	23.863	30.077	37.650	46.652	50.030
	(18.943)	(23.862)	(30.083)	(37.648)	(46.660)	(50.064)

Tabla 2: Coeficientes frecuencia para una placa elíptica empotrada sin cargas en el plano.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

En las tablas 3 a 6 se indica los coeficientes de frecuencias para placas elípticas empotradas para diferentes cargas en el plano. Las cargas se relacionan con la carga crítica de pandeo. En las tablas 4 a 6 el signo menos en la carga en el plano significa carga de tracción ya que el coeficiente N_{cr} es negativo. Se observa el efecto rigidizador de la carga de tracción.

			$N=N_{cr}/2$			
a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
1	7.2750	18.114	18.114	31.624	31.624	36.554
1.2	7.4512	16.473	20.403	29.264	32.173	40.020
1.5	8.1395	15.354	24.121	25.836	34.329	39.387
2	9.7730	15.356	23.383	30.604	33.768	39.518
2.5	11.627	16.402	23.078	31.577	37.226	41.934
3	13.559	17.871	23.747	31.089	39.926	43.908

Tabla 3: Coeficientes frecuencia para carga de compresión igual a la mitad de la carga crítica.

			$N=-N_{cr}/2$			
a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
1	12.440	23.975	23.975	37.837	37.838	42.743
1.2	12.738	22.504	26.418	35.658	38.557	46.390
1.5	13.898	21.986	30.768	32.908	41.372	46.731
2	16.644	23.277	31.908	38.746	42.691	48.087
2.5	19.750	25.683	33.090	42.111	47.037	52.852
3	22.984	28.529	35.226	43.186	52.499	55.439

Tabla 4: Coeficientes frecuencia para carga de tracción con módulo igual a la mitad de la carga crítica.

			$N=-N_{cr}$			
a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
1	14.296	26.396	26.396	40.572	40.573	45.517
1.2	14.637	24.949	28.934	38.442	41.364	49.259
1.5	15.965	24.603	33.573	35.904	44.457	49.988
2	19.107	26.303	35.375	42.197	46.495	51.814
2.5	22.661	29.160	37.044	46.459	51.199	57.517
3	26.360	32.472	39.668	48.057	57.735	60.333

Tabla 5: Coeficientes frecuencia para carga de tracción con módulo igual a la carga crítica.

			$N=-2N_{cr}$			
a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
1	17.376	30.633	30.634	45.527	45.528	50.598
1.2	17.788	29.194	33.367	43.455	46.445	54.530
1.5	19.396	29.095	38.537	41.219	50.028	55.915
2	23.193	31.431	41.402	48.317	53.261	58.520
2.5	27.488	35.012	43.831	54.067	58.583	65.828
3	31.958	39.083	47.229	56.485	66.937	69.016

Tabla 6: Coeficientes frecuencia para carga de tracción con módulo igual al doble de la carga crítica.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

En las tablas 7 a 9 se muestran los coeficientes de frecuencias para diferentes placas superelípticas con distintas magnitudes de cargas en el plano.

a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
			$N=N_{cr}/2$			
1	6.4795	15.867	15.875	25.261	30.078	31.293
1.2	6.6473	14.079	18.247	25.781	26.230	36.163
1.5	7.3041	12.687	22.003	22.111	27.841	35.074
2	8.8801	12.267	18.757	28.129	28.472	32.877
2.5	10.697	13.064	17.747	24.803	34.126	35.053
3	12.615	14.443	18.003	23.471	30.880	40.167
			$N=0$			
1	9.0927	18.671	18.680	28.173	32.978	34.163
1.2	9.3270	17.014	21.107	28.781	29.248	39.117
1.5	10.244	16.014	25.182	25.561	31.184	38.581
2	12.442	16.397	23.158	32.454	32.639	37.029
2.5	14.968	17.984	23.106	30.384	39.811	39.952
3	17.622	20.113	24.230	30.052	37.658	47.049
			$N=-N_{cr}/2$			
1	11.067	21.085	21.093	30.797	35.632	36.808
1.2	11.351	19.487	23.604	31.482	31.973	41.857
1.5	12.464	18.727	27.982	28.582	34.185	41.787
2	15.131	19.629	26.818	35.971	36.581	40.738
2.5	18.194	21.754	27.392	35.059	44.279	44.763
3	21.405	24.419	29.091	35.387	43.360	52.695
			$N=-N_{cr}$			
1	12.713	23.234	23.242	33.204	38.092	39.270
1.2	13.039	21.662	25.845	33.958	34.474	44.423
1.5	14.316	21.071	30.510	31.300	36.929	44.757
2	17.374	22.367	30.013	39.153	40.124	44.118
2.5	20.883	24.920	31.060	39.158	48.194	49.203
3	24.560	28.021	33.207	39.985	48.372	57.360
			$N=-2\,N_{cr}$			
1	15.444	26.990	26.998	37.532	42.565	43.770
1.2	15.839	25.424	29.793	38.408	38.977	49.140
1.5	17.387	25.068	34.985	36.100	41.852	50.155
2	21.094	26.966	35.507	44.799	46.374	50.160
2.5	25.345	30.200	37.269	46.231	55.139	57.021
3	29.794	34.012	40.114	47.809	57.039	65.635

Tabla 7: Coeficientes frecuencia para una placa superelíptica α=2 empotrada con distintas magnitudes de cargas en el plano con relación a la carga crítica de pandeo.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
			$N=N_{cr}/2$			
1	6.4093	15.564	15.583	24.203	29.992	30.238
1.2	6.5754	13.772	17.943	24.700	25.692	35.541
1.5	7.2225	12.345	21.522	21.663	26.666	34.319
2	8.7736	11.828	18.021	27.197	28.065	31.495
2.5	10.560	12.517	16.812	23.629	32.807	34.588
3	12.494	13.852	16.922	22.072	29.303	38.484
			$N=0$			
1	8.9900	18.333	18.351	27.069	32.866	33.065
1.2	9.2217	16.671	20.767	27.654	28.674	38.462
1.5	10.125	15.634	24.805	24.934	29.958	37.789
2	12.290	15.917	22.391	31.675	32.006	35.591
2.5	14.781	17.392	22.159	29.204	38.477	39.447
3	17.403	19.415	23.097	28.629	36.051	45.322
			$N=- N_{cr}/2$			
1	10.938	20.712	20.731	29.644	35.497	35.666
1.2	11.219	19.108	23.230	30.305	31.364	41.171
1.5	12.316	18.307	27.569	27.917	32.905	40.959
2	14.944	19.100	26.006	35.485	35.577	39.238
2.5	17.968	21.104	26.396	33.841	43.394	43.737
3	21.122	23.625	27.871	33.894	41.689	51.235
			$N=- N_{cr}$			
1	12.561	22.829	22.848	32.001	37.937	38.086
1.2	12.884	21.249	25.440	32.730	33.832	43.706
1.5	14.141	20.613	30.063	30.596	35.594	43.894
2	17.157	21.790	29.153	38.631	39.076	42.554
2.5	20.626	24.211	30.006	37.890	47.616	47.791
3	24.227	27.140	31.895	38.409	46.625	56.515
			$N=-2\ N_{cr}$			
1	15.253	26.526	26.545	36.230	42.374	42.500
1.2	15.644	24.949	29.330	37.079	38.271	48.363
1.5	17.169	24.537	34.479	35.321	40.407	49.223
2	20.826	26.298	34.551	44.211	45.237	48.469
2.5	25.033	29.385	36.097	44.856	54.496	55.514
3	29.379	32.980	38.628	46.065	55.135	64.854

Tabla 8: Coeficientes frecuencia para una placa superelíptica α=5 empotrada con distintas magnitudes de cargas en el plano con relación a la carga crítica de pandeo.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

a/b	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
			$N=N_{cr}/2$			
1	6.4066	15.548	15.576	24.167	29.982	30.195
1.2	6.5732	13.759	17.935	24.664	25.662	35.521
1.5	7.2205	12.333	21.494	21.654	26.626	34.269
2	8.7713	11.815	17.991	27.146	28.052	31.441
2.5	10.557	12.501	16.776	23.569	32.743	34.569
3	12.493	13.834	16.879	22.002	29.228	38.416
			$N=0$			
1	8.9859	18.315	18.342	27.030	32.854	33.020
1.2	9.2184	16.656	20.758	27.615	28.642	38.441
1.5	10.122	15.620	24.794	24.905	29.915	37.737
2	12.286	15.901	22.359	31.622	31.990	35.533
2.5	14.776	17.372	22.119	29.141	38.407	39.426
3	17.396	19.390	23.046	28.552	35.966	45.239
			$N=-N_{cr}/2$			
1	10.933	20.693	20.720	29.602	35.483	35.619
1.2	11.215	19.092	23.219	30.263	31.330	41.147
1.5	12.312	18.291	27.557	27.885	32.858	40.905
2	14.939	19.081	25.970	35.468	35.520	39.175
2.5	17.962	21.080	26.351	33.773	43.318	43.715
3	21.112	23.593	27.812	33.808	41.594	51.140
			$N=-N_{cr}$			
1	12.555	22.808	22.835	31.955	37.921	38.037
1.2	12.879	21.231	25.427	32.685	33.796	43.681
1.5	14.137	20.595	30.050	30.562	35.544	43.837
2	17.151	21.769	29.114	38.612	39.016	42.487
2.5	20.618	24.185	29.957	37.818	47.592	47.709
3	24.214	27.103	31.828	38.315	46.521	56.409
			$N=-2\,N_{cr}$			
1	15.245	26.502	26.530	36.177	42.354	42.448
1.2	15.637	24.927	29.315	37.027	38.231	48.335
1.5	17.163	24.516	34.462	35.282	40.350	49.162
2	20.819	26.272	34.505	44.190	45.170	48.394
2.5	25.024	29.351	36.039	44.775	54.469	55.421
3	29.362	32.933	38.548	45.956	55.014	64.814

Tabla 9: Coeficientes frecuencia para una placa superelíptica α=10 empotrada con distintas magnitudes de cargas en el plano con relación a la carga crítica de pandeo.

En las tablas 3 a 9 se observa el efecto rigidizador de las tensiones de tracción de la carga transversal en el plano medio de la placa como así también el efecto contrario para las cargas de compresión. Estos casos pueden darse en estructuras o mecanismos cuando existe un gradiente de temperatura, o para distintos efectos de dilatación térmica entre la placa y su contorno. El ingeniero de diseño deberá contemplar este comportamiento dinámico para evitar posibles resonancias en la estructura, ya sea por transmisión de vibraciones de equipos

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

lindantes o por equipos montados sobre las placas.

Por otro lado, en ocasiones se generan en estructuras existentes que contienen elementos del tipo placa o tabique, corrimientos accidentales o sobrecargas no previstas. En tales circunstancias se generan esfuerzos en el plano medio de la placa que, si es esbelta, podría inestabilizarse imprevistamente. Esos esfuerzos pueden resultar difíciles de estimar con precisión aceptable. Sin embargo se puede contar con valiosa información adicional, monitoreando el comportamiento dinámico de la estructura mediante la medición de sus frecuencias naturales, ya que las mismas mantienen una fuerte dependencia con el estado de cargas en su plano.

4 CONCLUSIONES

El concepto de placa superelíptica permite un tratamiento unificado para un amplio rango de placas considerando desde placas circulares a cuadradas ($a=b$), y desde elípticas a rectangulares ($a \neq b$) mediante una adecuada elección del parámetro α.

El método de Ritz con las funciones base propuestas, demuestra ser una herramienta eficiente en la determinación de un gran número de frecuencias naturales de placas cuyo contorno presenta una variada gama de geometrías y distintas condiciones de borde, permitiendo el agregado de masas inerciales traslacionales y rotacionales adosadas (Maiz et al, 2009).

La cantidad de frecuencias a determinar, puede incrementarse simplemente tomando un número adecuado de términos R en la sumatoria de aproximación (6).

Se señala que para R=136, el tiempo computacional insumido en el cálculo de las primeras seis frecuencias en cada caso analizado fue de escasos segundos utilizando una PC estándar.

La formulación presentada implica un ahorro de tiempo significativo frente a la utilización de códigos de elementos finitos, los que requieren modelar el dominio de la placa cada vez que se considera una geometría diferente para su contorno. Esto es importante en la etapa de diseño de la estructura resistente.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y al Conicet por su auspicio para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

Altekin, M., Free linear vibration and buckling of super-elliptical plates resting on symmetrically distributed point-supports on the diagonals. *Thin walled structures,* 46: 1066-1086, 2008.

DeCapua, N.J., and Sun, B.C., Transverse vibration of a class of orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics—ASME,* 39: 613–615, 1972.

Maiz, S., Rossit, C.A., Bambill, D.V., and Susca, A., Transverse vibrations of a clamped elliptical plate carrying a concentrated mass at an arbitrary position. *Journal of Sound and Vibration,* 320:1146-1163, 2009.

Sato, K., Free flexural vibrations of an elliptical plate with edge restrained elastically. *The Japan Society of Mechanical Engineers,* 129:260-264, 1976.

Sato, K., Free flexural vibrations of an elliptical plate with free edge. *The Journal of the*

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar

Acoustical Society of America, 54:547-550, 1973.
Sato, K., Free flexural vibrations of an elliptical plate with simply supported edge. *The Journal of the Acoustical Society of America,* 52, 919-922, 1972
Sato, K., Vibration and Buckling of a Clamped Elliptical Plate on Elastic Foundation and under Uniform In-Plane Force. *Theor Appl Mech Jpn,* 51:49-62, 2002.
Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., *Theory of elastic estability.* Mc Graw Hill, 1961.
Wang, C.M., Wang, L., and Liew, K.M., Vibration and buckling of super elliptical plates. *Journal of Sound and Vibration,* 171, 301–314, 1994.
Zhou, D., Lo, S.H., Cheung, Y.K., and Au, F.T.K., 3-D vibration analysis of generalized super elliptical plates using Chebyshev-Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*, 41,4697-4712, 2004.

Copyright © 2012 Asociación Argentina de Mecánica Computacional http://www.amcaonline.org.ar