

## ESTUDO DO EFEITO DE ESCALA NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

Lisandro Maders<sup>a</sup>, Luis E. Kostaski<sup>b</sup> e Ignacio Iturrioz<sup>c</sup>

<sup>a</sup>DEMEC, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, [lisandro\\_maders@hotmail.com](mailto:lisandro_maders@hotmail.com)

<sup>b</sup>Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pampa, Alegrete, Brasil, [luis\\_kostaski@hotmail.com](mailto:luis_kostaski@hotmail.com)

<sup>c</sup>PROMECA, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, [ignacio@mecanica.ufrgs.edu.br](mailto:ignacio@mecanica.ufrgs.edu.br)

**Palavras Chave:** Método dos elementos discretos, efeito de escala, materiais quase frágeis.

**Resumo.** O método dos elementos discretos formado por barras, devido a sua concepção, permite captar o efeito de escala nas simulações realizadas. Neste método, os nós são unidos por barras bi rotuladas que tem uma relação constitutiva uniaxial com um comportamento linear até a sua resistência máxima e um posterior abrandamento. Esta característica permite em forma natural modelar dano anisotrópico no material estudado. As massas são concentradas nos nós, e a equação de movimento da discretização espacial realizada é integrada utilizando um esquema implícito. Neste trabalho, várias leis de abrandamento são testadas e também é estudado como as mesmas influenciam nos resultados em termos do efeito de escala e das configurações finais dos corpos de prova simulados. Este trabalho agrega em uma melhor compreensão das possibilidades da metodologia empregada na modelagem de materiais heterogêneos solicitados até a ruptura.

## 1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Discretos formados por barras (doravante DEM) ou modelo de treliça aqui utilizado é baseado no trabalho de [Nayfeh e Hefzy \(1978\)](#), no qual determinaram as propriedades de um contínuo elástico ortótropo equivalente para modelar painéis de aeronaves consistentes num grande número de pequenas barras interconectadas. Eles representaram um contínuo elástico ortótropo por meio de uma treliça regular. Seguindo o conceito de homogeneização inversa proposto por [Sigmund \(1994\)](#), esta treliça é utilizada no DEM para resolver numericamente diversos problemas de mecânica dos sólidos. Essa abordagem foi proposta por [Riera \(1984\)](#) para determinar a resposta dinâmica de placas e cascas submetidas a impacto, quando a falha ocorre, principalmente, por tração, modo de falha usual em estruturas de concreto.

Utilizando uma lei uniaxial de dano, baseada na lei proposta por [Hillerbrog \(1978\)](#), que permite modelar fratura e dano anisotrópico com relativa facilidade, foram efetuadas numerosas verificações e desenvolvimentos adicionais do DEM. Entre elas podemos mencionar a resolução de problemas dinâmicos de cascas sujeitos a cargas impulsivas ([Riera e Iturrioz, 1995, 1998](#)), estudo da fratura em fundações elásticas apoiadas sobre solos brandos ([Schnaid et al, 2004](#)), simulação da geração e posterior propagação de sismos. ([Dalguer et al, 2001](#)), estudo do efeito de escala em concreto ([Rios e Riera, 2004](#)) e em rochas ([Miguel et al, 2008 e Iturrioz et al, 2009](#)); cálculo de parâmetros fractomecânicos ([Barrios D'ambra et al. 2008, Kostascki et al, 2009](#)) e propagação de trincas em sólidos ([Kostascki et al. 2011, 2012](#)).

Neste trabalho examina-se a influência da lei constitutiva do elemento na resposta global da estrutura assim como no efeito de escala obtido mediante a simulação. Para este motivo, apresentam-se duas alternativas ao modelo bi-linear ou de Hillerborg e se realiza um estudo paramétrico para encontrar a sensibilidade à relação constitutiva dos resultados.

## 2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

O Método dos Elementos Discretos é baseado na representação do sólido por intermédio de um arranjo 3D (ver [Figura 1](#)) de elementos capazes de suportar somente cargas axiais. Assumindo que as massas estão concentradas nos nós, modelos com elementos discretos permitem resolver problemas de dinâmica estrutural por meio de integração numérica explícita das equações de movimento. O módulo básico é construído interconectando 20 elementos de barra e nove nós. Cada nó do arranjo 3D tem três graus de liberdade, correspondentes às três componentes do vetor deslocamento em coordenadas globais. As equações que relacionam as propriedades dos elementos com as constantes elásticas de um meio contínuo e isotrópico são:

$$\delta = \frac{9\nu}{4-8\nu}, \quad A_l = L^2 \frac{(9+8\delta)}{2(9+12\delta)}, \quad A_d = \frac{2\sqrt{3}}{3} A_l \quad (1)$$

onde  $\nu$  é o módulo de Poisson do sólido e  $A_l$  e  $A_d$  representam as áreas da seção transversal do elemento longitudinal e diagonais respectivamente. É importante notar que, para  $\nu = 0,25$ , a equivalência com o contínuo isotrópico é completa. Por outro lado, aparecem pequenas diferenças nos termos de corte para  $\nu \neq 0,25$ . Os detalhes do cálculo da seção transversal equivalente por unidade de comprimento das barras longitudinais e diagonais das Eq. (1) podem ser encontradas em [Nayfeh e Hefzy \(1978\)](#) e [Dalguer et al \(2001\)](#).

O sistema de equações resultante de aplicar a segunda lei de Newton em cada nó tem a forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{t}) - \mathbf{P}(\mathbf{t}) = 0 \quad (2)$$

onde  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\ddot{\mathbf{x}}$  são os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, enquanto  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes de massa e amortecimento respectivamente. Os vetores  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  e  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  contêm as forças internas e externas que atuam nas massas nodais. Como as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são diagonais, as Eq. (2) não são acopladas. Para integrar as Eq. (2) no domínio do tempo, é utilizado um esquema de integração explícita de diferenças finitas. É interessante notar que, desde que as coordenadas nodais são atualizadas a cada passo de tempo, grandes deslocamentos podem ser levados em conta naturalmente.

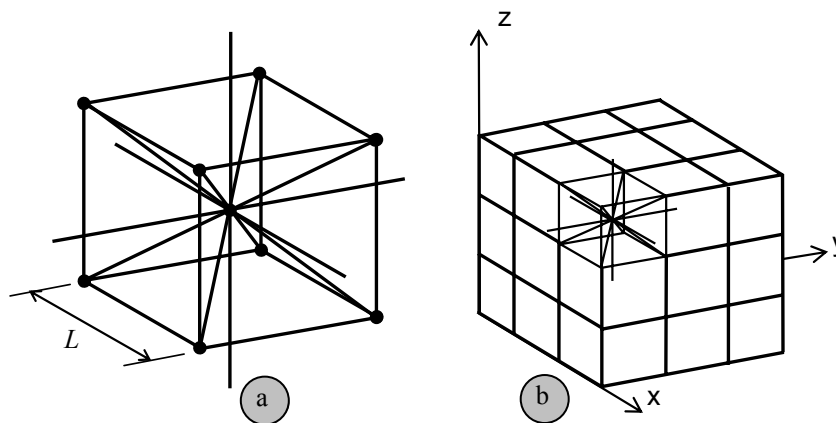


Figura 1: Discretização utilizada no DEM: a) modelo cúbico básico, b) geração do corpo prismático

A estabilidade do esquema de integração na região de comportamento físico linear é assegurada limitando o incremento de tempo  $\Delta t$  de modo que:

$$\Delta t \leq 0,6L/C_p \quad (3)$$

onde  $C_p$  é a velocidade de propagação da onda longitudinal,  $C_p = \sqrt{E/\rho}$ . A convergência das soluções do DEM para elasticidade linear e instabilidade elástica foi extensivamente verificada (ver, por exemplo, [Dalguer et al., 2003](#)).

## 2.1 Modelo constitutivo não-linear

Para levar em conta a energia de fratura dissipada no processo de ruptura, impõe-se como condição que a energia dissipada pela fratura do material contínuo e sua representação discreta sejam equivalentes. Com este propósito, é considerada a fratura de um espécime cúbico de dimensões  $L \times L \times L$  (ver [Figura 2a](#)). A energia dissipada pela fratura de uma amostra contínua de material devido a uma ruptura paralela a uma de suas faces é:

$$\Gamma = G_f \Lambda = G_f L^2 \quad (4)$$

onde  $\Lambda$  é a área de fratura atual. Por outro lado, a energia dissipada quando o módulo do DEM de dimensões  $L \times L \times L$  é dividido em duas partes leva em conta a contribuição de cinco elementos longitudinais (quatro coincidentes com os eixos do módulo e um interno) e quatro elementos diagonais (sendo seu comprimento,  $L_d = 2/\sqrt{3}L$ ) (ver [Figura 2b](#)). Assim, a energia dissipada pelo módulo do DEM pode ser escrito como a seguir:

$$\Gamma_{\text{DEM}} = G_f \left( 4 \cdot 0,25 \cdot c_A + c_A + 4 \cdot c_A \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2 \quad (5)$$

onde o primeiro termo na soma considera os quatro elementos dos eixos (o coeficiente 0,25 é devido ao fato de que cada elemento é compartilhado por quatro módulos), o segundo termo considera o elemento longitudinal interno, e o terceiro termo considera a contribuição dos quatro elementos diagonais.

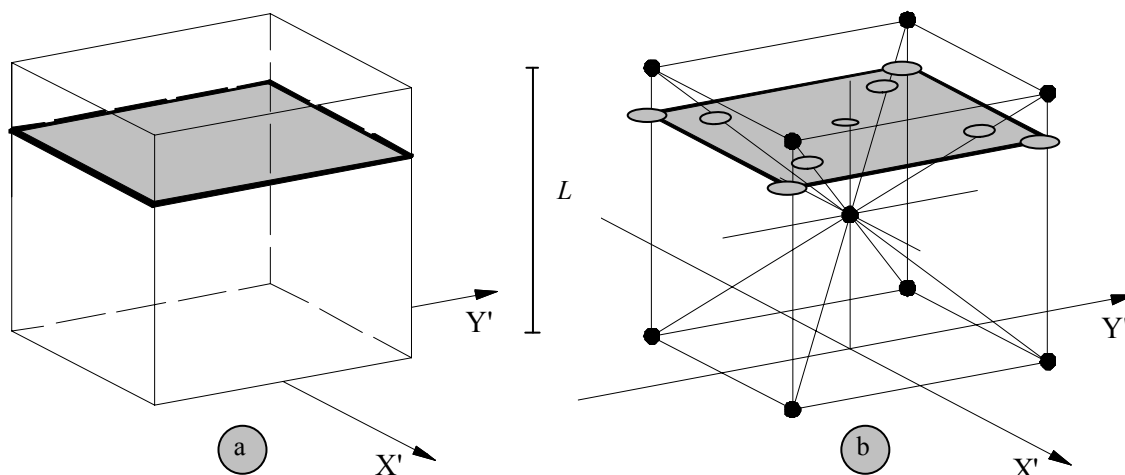


Figura 2: a) sólido cúbico de dimensões  $L \times L \times L$ , b) módulo do DEM de dimensões  $L \times L \times L$ .

O coeficiente  $c_A$  é um parâmetro de escala utilizado para fazer cumprir a equivalência entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_{\text{DEM}}$ . Assim, trabalhando as expressões (4) e (5) resulta:

$$G_f L^2 = G_f \left( \frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (6)$$

da qual pode-se deduzir facilmente que  $c_A = 3/22$  para que exista equivalência entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_{\text{DEM}}$ . Finalmente a *Área de fratura equivalente*,  $A_i^f = c_A L_i^2$ , para os longitudinais e diagonais é, respectivamente:

$$A_l^f = (3/22) L^2, \quad A_d^f = (4/22) L^2 \quad (7)$$

Resumindo, quando um elemento rompe, geram-se as áreas de fratura equivalentes indicadas na Eq. (7), liberando-se energia de fratura que depende da área da fratura e da equação constitutiva do material. Riera (1984) e Riera e Rocha (1991) adotaram a lei proposta por Hillerborg (1971) para materiais quase-frágeis como Relação Constitutiva Elementar (RCE), estendendo assim o Método dos Elementos Discretos para problemas de fratura frágil. A lei bi-linear, mostrada na Figura 3a, foi extensamente utilizada para simular o comportamento de materiais quase-frágeis. No presente trabalho se estudam RCE alternativas: o modelo tri-linear apresentado na Figura 3b e o modelo com amolecimento exponencial mostrado na Figura 3c.

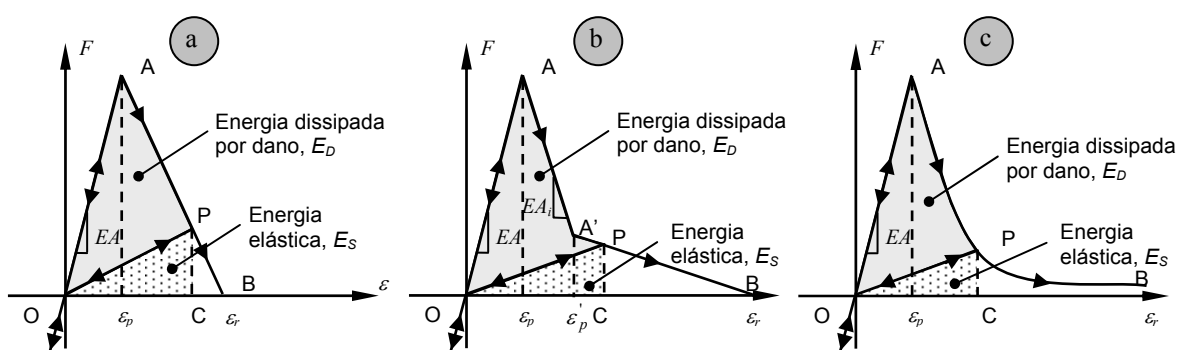


Figura 3: Relações constitutivas elementares utilizadas no DEM, a) Modelo de Hillerborg, b) Modelo tri-linear e c) modelo com amolecimento exponencial.

Os parâmetros e símbolos utilizados nas definições dos modelos são os seguintes: Força  $F$  é a força axial no elemento, função da deformação específica  $\varepsilon$  no mesmo. A relação entre  $F$  e  $\varepsilon$  é dada pelo produto do módulo de Young do material ( $E$ ) e a área da seção transversal ( $A_i$ ) da barra. O Comprimento do módulo básico é  $L$ . As áreas dos elementos longitudinais ou diagonais são  $A_l$  ou  $A_d$  segundo as Eqs. (1). Cabe esclarecer que cada elemento é caracterizado por duas áreas, uma indicada acima, relacionada à sua rigidez e outra a área de fratura equivalente. A energia específica de fratura,  $G_f$ , assim como o módulo de Young ( $E$ ), são características do material. A deformação limite  $\varepsilon_r$  é o valor de deformação axial para o qual o elemento perde sua capacidade de carga. Este valor deve ser calculado para satisfazer a condição que, quando o elemento falha, a densidade de energia dissipada seja igual ao produto da área de fratura equivalente do elemento,  $A_i^f$ , vezes a energia específica de fratura  $G_f$ , dividida pelo comprimento do elemento; isto é:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} \quad (8)$$

onde o sub-índice  $i$  tem que ser substituído por  $l$  ou  $d$ , dependendo se o elemento é longitudinal ou diagonal, respectivamente.

Na presente formulação do DEM admitem-se falhas por tração unicamente. Mudando a forma da curva força-deformação que pode resistir cada elemento se terão diferentes modelos constitutivos. Mas a premissa fundamental para levar em conta a fratura é que a área debaixo da curva força-deformação deve ser igual à densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento (a área de fratura equivalente).

Em contrapartida, sob tensões de compressão o material se comporta como elástico linear. Assim, a falha sob compressão é induzida por tração indireta. Esta suposição é razoável para materiais quase frágeis para os quais a tensão última (máxima) sob compressão uniaxial é usualmente de cinco a dez vezes maior que sob tração uniaxial (ver Kupfer e Gerstle, 1973)

### Modelo de Hillerborg

A Deformação crítica de falha  $\varepsilon_p$  é a deformação atingida pelo elemento antes da iniciação do dano (ponto A na Figura 3a). A relação entre  $\varepsilon_p$  e a energia específica de fratura  $G_f$  é dada em termos da Mecânica de Fratura elástica linear como:

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E}} \quad (9)$$

onde  $R_f$  é aqui denominado fator de falha, o qual leva em conta a presença de um defeito intrínseco de tamanho  $a$ , que pode ser expressado como:

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad (10)$$

onde  $Y$  é um parâmetro adimensional que depende tanto das dimensões do espécime e da trinca. O parâmetro adimensional  $Y$  se pode entender também como uma função que depende de um defeito intrínseco do elemento com características representadas pelo produto de um coeficiente adimensional  $Y$  e pela raiz quadrada de um comprimento  $a$ . É interessante salientar que este produto ( $Ya^{1/2}$ ) poderia ser considerado como uma propriedade material.

O elemento perde sua capacidade de carregamento quando a deformação limite  $\varepsilon_r$  é atingida (ponto B na Figura 3a). Utilizando a Eq. (8), obtém-se a deformação limite  $\varepsilon_r$ . Esta deformação limite pode ser relacionada com a deformação crítica de falha por intermédio da constante  $K_r$  da seguinte forma:

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (11)$$

Como foi mencionado, a Eq. (8) mostra que a área debaixo da curva força-deformação é igual ao produto da área de fratura equivalente do elemento  $A_i^f$  vezes a energia específica de fratura  $G_f$  dividida pelo comprimento do elemento. Com ela, obtém-se uma importante relação dos parâmetros de fratura com a deformação limite  $\varepsilon_r$  ou o coeficiente  $K_r$

$$\frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_p E A_i}{2} = \frac{K_r \varepsilon_p^2 E A_i}{2} \quad (12)$$

onde o sub-índice  $i$  tem que ser substituído por  $l$  ou  $d$ , segundo o elemento seja longitudinal ou diagonal, respectivamente. O coeficiente  $K_r$  é uma função das propriedades do material e do comprimento  $L_i$  do elemento:

$$K_r = \left( \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) \left( \frac{2}{L_i} \right) \quad (13)$$

Para garantir a estabilidade do algoritmo, deve-se cumprir a condição que  $K_r \geq 1$  (Riera e Rocha, 1991). Isto é, que  $\varepsilon_r$  é maior do que  $\varepsilon_p$ . O coeficiente  $A_i^f/A_i$  na Eq. (15) é  $A_l^f/A_l = (3/22)/\phi$  e  $A_d^f/A_d = (\sqrt{3}/11)/\delta\phi$  para os elementos longitudinais e diagonais, respectivamente (ver Eq. 1 e 7). No caso especial de um contínuo isotrópico com  $\nu=0,25$ , as funções tomam os valores  $\delta=1,125$  e  $\phi=0,4$ , o que resulta em  $A_l^f/A_l \approx A_d^f/A_d \approx 0,34$ . Assim, por fins práticos um único valor do comprimento crítico do elemento pode ser utilizado, tanto para elementos longitudinais como para diagonais.

Na Figura 4 apresenta-se uma ilustração da lei de Hillerborg com os seguintes parâmetros,  $E=7,5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$  e  $G_f = 1300$  N/m. ( $K_r = 202,8$ , e  $R_f = 0,8$ ).

### Modelo de tri-linear

A RCE tri-linear apresenta uma cauda mais pronunciada no amolecimento, observada em ensaios de laboratório. A relação constitutiva tri-linear é mostrada na Figura 3b. Note-se que na lei tri-linear a área debaixo da curva força vs deformação (área do quadrilátero OAA'B na Figura 3b) está também associada com a energia específica de fratura do material  $G_f$ . Por isso, para um ponto P na curva força vs deformação, a área do triângulo OPC representa a

densidade de energia elástica reversível armazenada no elemento, enquanto a área do quadrilátero OAA'P corresponde à densidade de energia dissipada por dano. Além dos parâmetros introduzidos anteriormente, o modelo tri-linear é caracterizada por dois parâmetros extras,  $\varepsilon'_p$  e  $E'$  (ver Figura 3b). A falha do elemento ocorre quando a densidade de energia dissipada por dano (área OAA'P) é igual à área total (área OAA'B).

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\overbrace{\varepsilon_p^2 EA_i}^{OA\varepsilon_p}}{2} + \overbrace{(\varepsilon'_p - \varepsilon_p) \varepsilon_p EA + \frac{(\varepsilon'_p - \varepsilon_p)^2 E' A_i}{2}}^{\varepsilon_p AA' \varepsilon'_p} + \frac{\overbrace{(\varepsilon_r - \varepsilon'_p)(\varepsilon_p EA_i + (\varepsilon'_p - \varepsilon_p) E' A_i)}^{\varepsilon'_p A' \varepsilon_r}}{2} \quad (14)$$

Na qual os termos  $OA\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_p AA' \varepsilon'_p$  e  $\varepsilon'_p A' \varepsilon_r$  levam em conta as diferentes subáreas debaixo da curva força vs deformação representada na Figura 3b. Seguindo o mesmo procedimento empregado para o modelo de Hillerborg, é possível obter o valor do fator  $K'_r$  que relaciona a deformação  $\varepsilon'_p$  com a deformação limite  $\varepsilon_r$ :

$$\varepsilon_r = K'_r \varepsilon'_p \quad (15)$$

a expressão para  $K'_r$  resulta da equação (18):

$$K'_r = \frac{\frac{2G_f A_i^f}{L_i \varepsilon'_p} + \frac{\varepsilon_p^2}{\varepsilon'_p} (E - E') A_i + 2E' A_i \varepsilon_p}{(\varepsilon_p (E - E') A_i + \varepsilon'_p E' A_i)} - 1 \quad (16)$$

A estabilidade para a RCE tri-linear é assegurada por meio de duas condições:

$$\varepsilon'_p \geq \varepsilon_p \quad \text{e} \quad K'_r \geq 1 \quad (17)$$

Chamando  $c$  à razão entre  $E'/E$  na Figura 3b, e  $r$  ao quociente entre as deformações limite dos modelos tri-linear ( $\varepsilon_r^T$ ) e Hilleborg ( $\varepsilon_r^H$ ):

$$c = E'/E \quad \text{e} \quad r = \varepsilon_r^T / \varepsilon_r^H \quad (18)$$

é possível definir  $\varepsilon'_p$  como:

$$\varepsilon'_p = (1 - c r) \varepsilon_r^H + c \varepsilon_p \quad (19)$$

O modelo tri-linear considerando  $E = 7,5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$  e  $G_f = 1300 \text{ N/m}$ ,  $c=0,10$ ,  $r=2$  ( $\varepsilon'_p=0,0177$ ,  $K'_r=2,499$ ) é também mostrado na Figura 4.

### Modelo com amolecimento exponencial

O Modelo com amolecimento exponencial é mostrado na Figura 3c, apresentando uma cauda de forma exponencial. A região de amolecimento é definida pela expressão a seguir, válida para valores da deformação maiores que  $\varepsilon_p$ :

$$f = a e^{-b\varepsilon} \quad (20)$$

onde  $f$  denota a força e  $a$  e  $b$  são constantes. Como valor desta função quando  $\varepsilon = \varepsilon_p$  tem que ser o mesmo que na região linear do modelo, então:

$$a e^{-b\varepsilon_p} = \varepsilon_p EA_i \quad (21)$$

Finalmente, a área sob a curva, para valores de  $\varepsilon$  maiores que zero, tem que ser igual à densidade de energia dissipada por dano, assim:

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\varepsilon_p^2 EA_i}{2} + \frac{a}{b} e^{-b\varepsilon_p} \quad (22)$$

A partir das Eqs. (21) e (22) obtêm-se os parâmetros do modelo:

$$a = \varepsilon_p EA_i e^{-b\varepsilon_p}$$

$$b = \frac{\varepsilon_p EA_i}{\frac{G_f A_i^f}{L_i} - \frac{\varepsilon_p^2 EA_i}{2}} = \frac{2/\varepsilon_p}{K_r^H - 1} \quad (23)$$

A Figura 4 mostra o modelo com amolecimento exponencial, para  $E = 7,5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\varepsilon_p = 1,088 \times 10^{-4}$  e  $G_f = 1300$  N/m, o que conduz aos parâmetros  $a = 82,397e$  e  $b = 91,073$ .

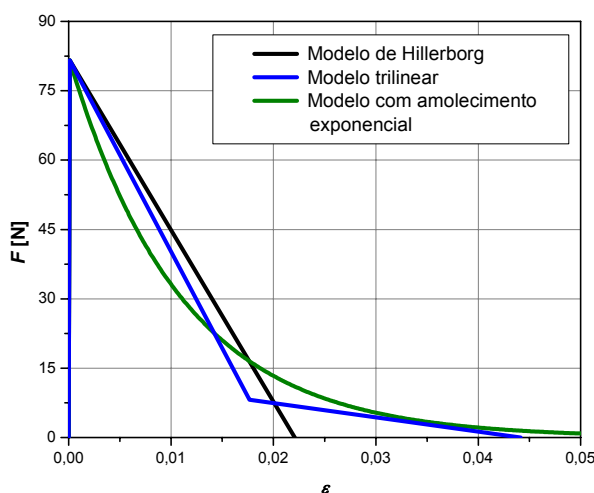


Figura 4: Gráfico ilustrativo das relações constitutivas elementares utilizadas para os elementos uniaxiais do DEM consideradas no trabalho.

## 2.2 Inclusão do caráter aleatório do material no DEM

Rocha (1989) introduziu a tenacidade do material  $G_f$ , como uma variável aleatória considerando para a mesma uma distribuição de probabilidades tipo Weibull de dois parâmetros:

$$F(G_f) = 1 - e^{-(G_f/\beta)^\gamma} \quad (24)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são os parâmetros de escala e de forma respectivamente. A função de densidade de



probabilidade de  $G_f$  é dada pela derivada da expressão (24).

Como  $G_f$  pode ser escrito em função de  $\varepsilon_p$  (ver expressão 11) da seguinte forma:

$$G_f = c \varepsilon_p^2, \text{ com } c = E(1 - \nu^2)/R_f \quad (25)$$

Utilizando esta expressão, pode se achar a função de densidade de probabilidade de  $\varepsilon_p$  vinculada á de  $G_f$ . Assim, se encontra uma relação aproximadamente constante entre os coeficientes de variação de  $G_f$  e  $\varepsilon_p$ , com valor em torno de 0,5.

A Figura 5 mostra o processo de incorporação da aleatoriedade na energia específica de fratura  $G_f$  para a relação constitutiva de Hillerborg. Note-se que para definir  $G_f$  como um campo aleatório é necessário especificar o valor médio, o coeficiente de variação e o comprimento de correlação. Adicionalmente é necessário definir como muda a forma da área encerrada pela lei constitutiva, proporcional a  $G_f$ . Essa energia, relacionada com a área da RCE, considera-se que tem uma variação espacial segundo uma distribuição tipo Weibull, como mostrada na parte superior da Figura 5. Assim, diferentes elementos terão diferentes RCE, com forma similar, como mostrado também na Figura 5, para o modelo de material não homogêneo.

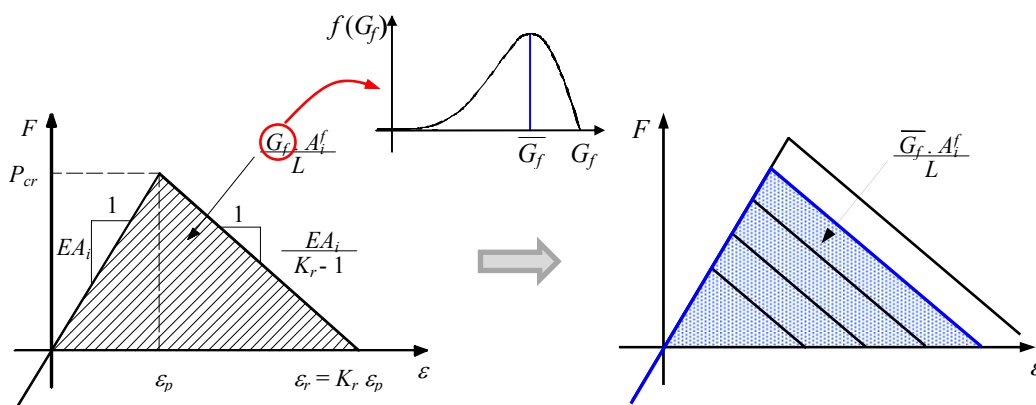


Figura 5: Esquema da incorporação da aleatoriedade no DEM usando o Modelo de Hillerborg e considerado  $G_f$  como um campo aleatório correlacionado com  $\varepsilon_p$ .

A inclusão do caráter aleatório com as outras leis apresentadas se faz da mesma forma, considerando-se  $\varepsilon_p$  variável e utilizando as Eq. (18) e (19); e (23) para os modelos trilinear e com amolecimento exponencial, respectivamente

### 3 ESTUDO DO EFEITO DE ESCALA

A seguir será estudada a resposta até a fratura de placas de rocha de diferentes tamanhos expostas à tração uniaxial. As placas se encontram engastadas na face inferior, submetidas a deslocamentos prescritos crescentes na face superior. O comprimento  $b$  das placas varia de 0,05 a 0,5 m. O menor arranjo possível que conduz resultados satisfatórios consiste em 10x10x1 módulos cúbicos, enquanto que o modelo de 0,5 m consiste em 100x100x1 módulos cúbicos, constituindo no maior modelo analisado nesse estudo. Para simular o estado plano de deformações, em todos os casos são restritos os deslocamentos nodais na direção normal ao plano médio da placa.

O material estudado tem módulo de elasticidade de  $7,5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>; densidade de 2700 kg/m<sup>3</sup>; coeficiente de Poisson de 0,25 e energia específica de fratura  $G_f=1300$  N/m. Os valores de  $\varepsilon_p$  e  $K_r$  (vinculados por intermédio de Eq. 13) serão variados juntamente com o coeficiente de variação de  $G_f$  ( $CV(G_f)$ ) para analisar como estes parâmetros, além da RCE

utilizada, influenciam no efeito de escala.

A Figura 6 mostra a configuração da placa estudada, juntamente com suas dimensões e condições de contorno.

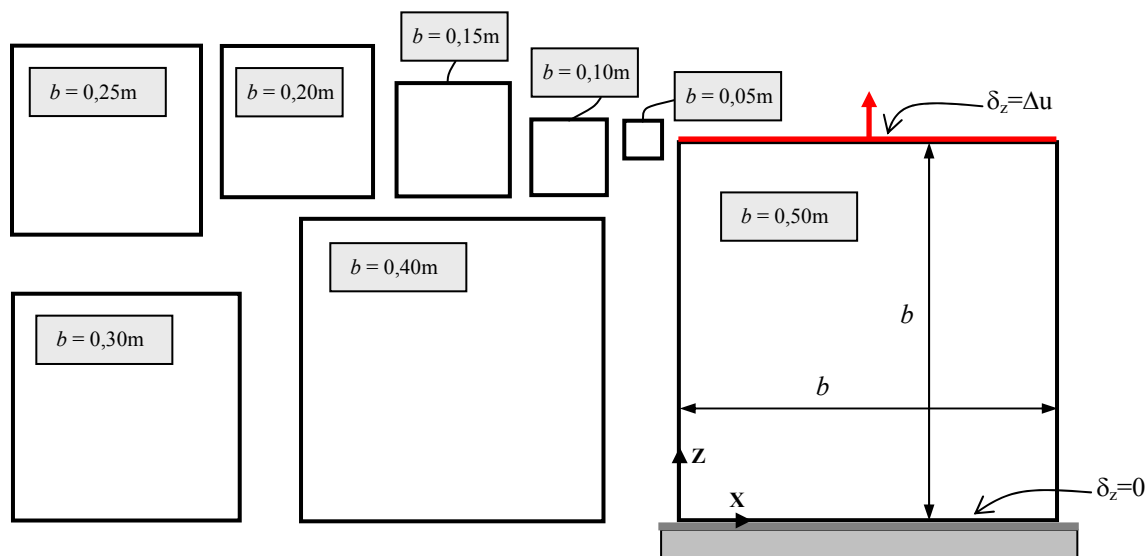


Figura 6: Configuração da placa e condições de contorno.

### 3.1 Modelo de Hillerborg

Para explicar como é o procedimento utilizado na análise e apresentação dos dados obtidos, começa-se descrevendo detalhadamente como foram tratados os dados para um caso específico,  $K_r=75$  ( $\varepsilon_p=1,7813 \times 10^{-4}$ ) e  $CV(G_f)=20\%$ , para logo generalizar os resultados. Esse mesmo procedimento também é logo utilizado para as outras relações constitutivas elementares estudadas, o tri-linear e o modelo com amolecimento exponencial, com suas respectivas modificações de parâmetros.

Assim, na Figura 7a se apresentam as curvas tensão-deformação obtidas em 6 simulações de placas com  $b=0,05m$ , para um  $K_r=75$  ( $\varepsilon_p=1,7813 \times 10^{-4}$ ),  $CV(G_f)=20\%$  e lei de Hillerborg, assim como sua curva média. Também estão representados os pontos característicos da curva, onde  $\sigma_u$  indica a tensão última,  $\varepsilon_u$  a correspondente deformação chamada de última e a deformação crítica  $\varepsilon_c$ , a deformação para a qual a resistência é totalmente esgotada, definida por questões práticas como a deformação correspondente ao ponto no qual a tensão passa a ser menor que 2% da tensão máxima ou última ( $\sigma_u$ ). Em placas com comprimentos maiores, nas quais ocorre uma falha frágil, não é possível distinguir claramente a diferença entre a deformação última  $\varepsilon_u$  e a deformação crítica  $\varepsilon_c$ .

Na Figura 7b são mostradas as curvas tensão-deformação globais médias de cada tamanho de placa com  $K_r=75$  ( $\varepsilon_p=1,7813 \times 10^{-4}$ ) e lei de Hillerborg. Observa-se uma mudança do comportamento relacionada com um tamanho de placa entre 0,15 e 0,2m, onde, se passa de ter propagação estável para ter instabilidade na propagação.

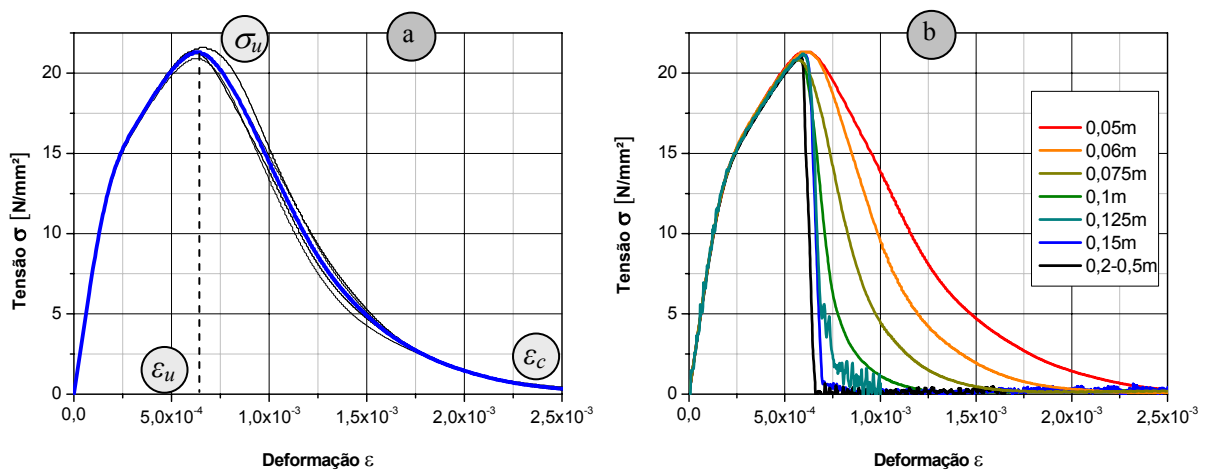


Figura 7: a) Curvas tensão-deformação das placas de comprimento  $b=0,05\text{m}$  para as seis simulações e curva média (em azul). b) curvas tensão-deformação médias globais para as diferentes dimensões das placas.  $K_r=75$  ( $\varepsilon_p=1,7813 \times 10^{-4}$ ),  $CV(G_f)=20\%$  e o Modelo de Hillerborg.

A fim de obter resultados somente de simulações onde as placas apresentavam o mesmo tipo de comportamento quanto à propagação da fissura, foram considerados somente os resultados de placas que apresentavam uma trinca. As simulações onde as placas apresentavam a propagação com 2 fissuras ou uma fissura com ramificações, não foram consideradas. Na Figura 8, são mostradas duas curvas tensão-deformação que apresentaram falha com uma e duas fissuras respectivamente, assim como as configurações de ruptura vinculadas.

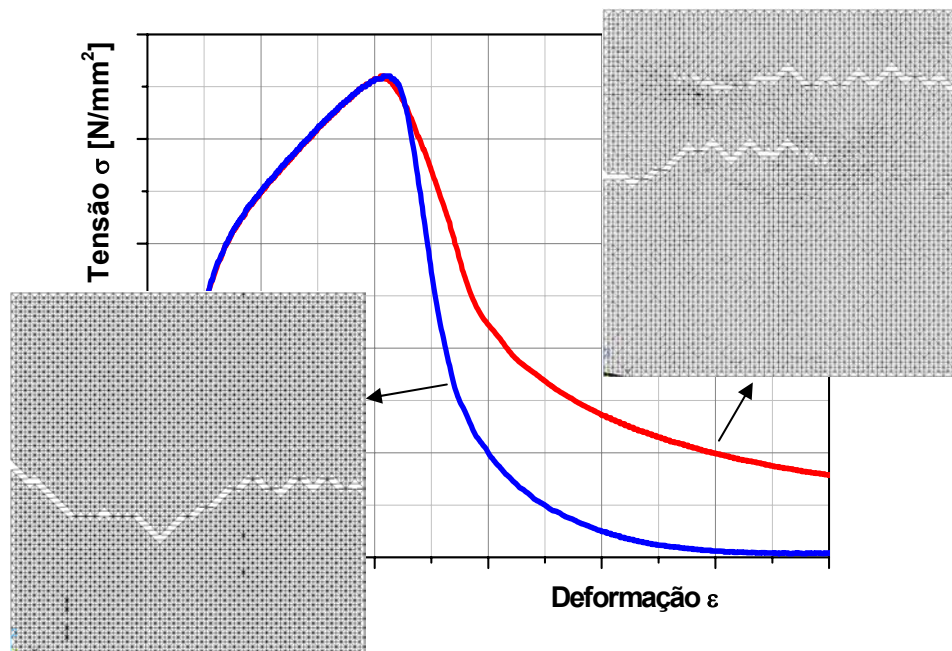


Figura 8: Mudança de comportamento relativo aos resultados.

A curva tensão-deformação apresentada na Figura 7b tem toda a informação do efeito de escala utilizando o modelo de Hillerborg para  $K_r=75$  ( $\varepsilon_p=1,7813 \times 10^{-4}$ ),  $CV(G_f)=20\%$ , mas de uma forma confusa. Utilizando os pontos característicos definidos na Figura 7a, obtêm-se as curvas que relacionam o tamanho da placa com as deformações características e com as tensões máximas em escala bi-logarítmica. Estas curvas se encontram representadas na Figura

9a e b respectivamente.

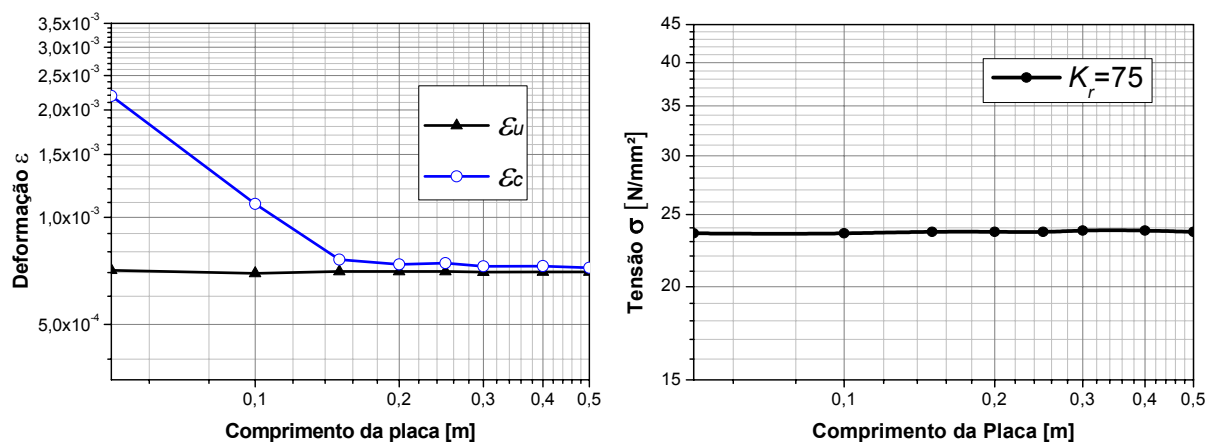


Figura 9: Efeito de escala para o modelo de Hillerborg com  $K_r=75$  ( $\epsilon_p=1,7813 \times 10^{-4}$ ),  $CV(G_f)=20\%$  a) deformações características médias e b) tensões últimas (escala bi-logarítmica).

Na Figura 10 estão representadas as curvas que relacionam o tamanho da placa com as deformações características e com as tensões máximas em escala bi-logarítmica, para vários valores de  $K_r$ . Esta figura mostra o efeito de escala para o modelo de Hillerborg com  $CV(G_f)=20\%$ , quando se muda o  $K_r$  (ou  $\epsilon_p$ ) deixando as demais propriedades constantes. Foram constatadas simulações que não correspondiam ao comportamento procurado da propagação de uma fissura. Estas simulações foram descartadas para fazer estes gráficos.

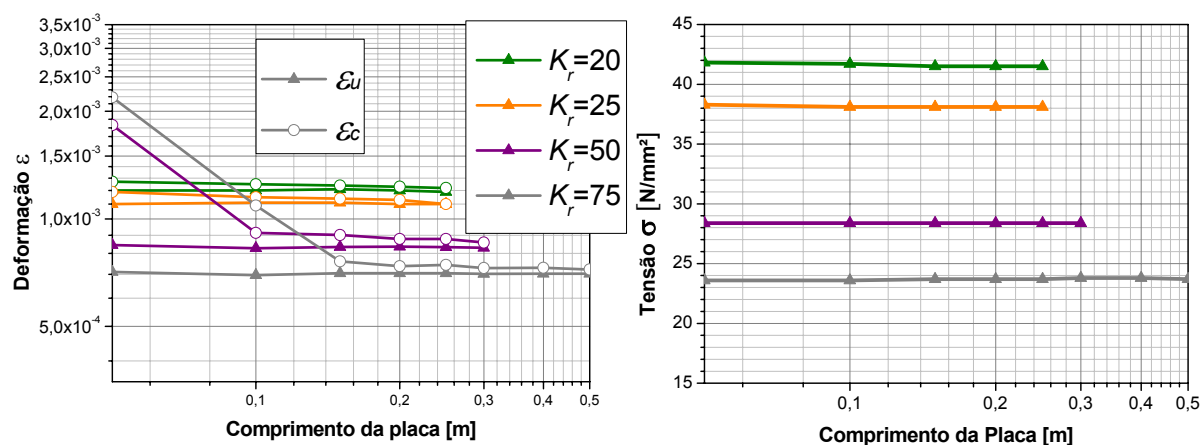


Figura 10: a) Gráfico em escala bi-logarítmica do tamanho da placa vs deformações características ( $\epsilon_c$ ,  $\epsilon_u$ ), b) Gráfico em escala bi-logarítmica do tamanho da placa vs tensão.  $CV(G_f)=20\%$ , e RCE de Hillerborg.

Como se observa na Figura 10, algumas curvas terminam com tamanhos menores que outras. Isto acontece para alguns valores de  $K_r$ , pelo fato de que o comportamento procurado se obtém somente até certo tamanho de placa. Após esse tamanho, a configuração de ruptura não corresponde à propagação de uma fissura somente. A Figura 11 mostra este comportamento observado, onde para tamanhos de placa muito grandes, a configuração da ruptura para  $K_r$  abaixo de 50 torna-se incompatível com o comportamento procurado.

Para valores de  $K_r$  menores que 20, nenhuma das seis simulações realizadas apresentou a propagação de uma única fissura. Este é o motivo pelo qual foi apresentado até esse valor de

$K_r$  na Figura 10.

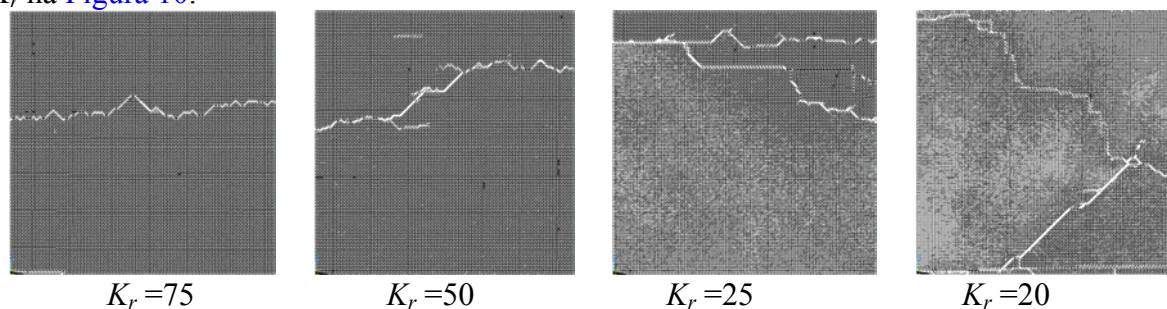


Figura 11: Configuração da ruptura para diferentes  $K_r$  com tamanho de placa  $b=0,40m$ ,  $CV(G_f)=20\%$  e RCE de Hillerborg.

A Figura 12 mostra uma comparação das configurações da ruptura de placas com  $b=0,15m$ , para diferentes  $K_r$ , onde se observa que na medida em que diminui o  $K_r$ , aumenta a quantidade de fissuras e bifurcações encontradas na placa.

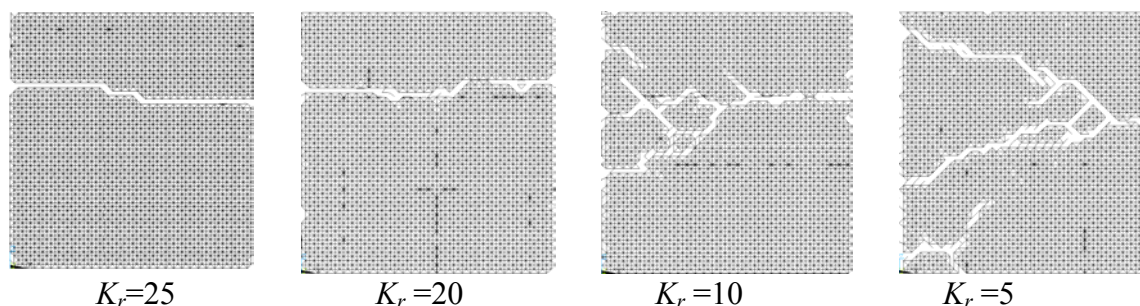


Figura 12: Configuração da ruptura para diferentes  $K_r$  com tamanho de placa  $b=0,15m$ ,  $CV(G_f)=20\%$  e RCE de Hillerborg.

Realizando o procedimento acima descrito para diferentes valores de  $CV(G_f)$ , utilizando a RCE de Hillerborg, são realizadas as curvas que relacionam o tamanho da placa com as deformações características e com as tensões máximas em escala bi-logarítmica. Na Figura 13 se mostram essas curvas utilizando um  $CV(G_f)=40\%$  e na Figura 14,  $CV(G_f)=80\%$ .

É importante esclarecer que, da mesma forma que para  $CV(G_f)=20\%$ , os  $K_r$  menores de 10 não foram considerados, nem as placas maiores realizadas com esse e os outros valores de  $K_r$  que não apresentaram o comportamento procurado.

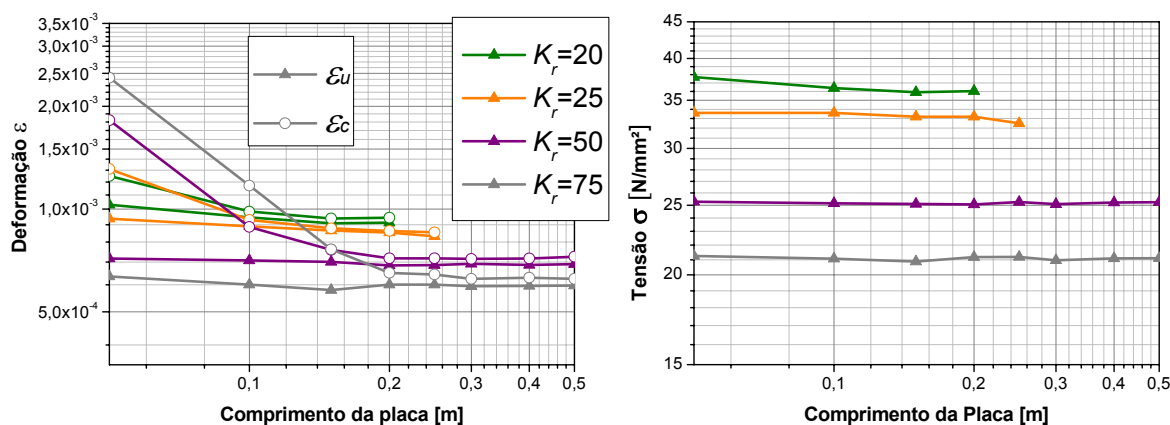


Figura 13: a) Gráfico em escala bi-logarítmica do tamanho da placa vs deformações características ( $\epsilon_c$ ,  $\epsilon_u$ ), b) Gráfico em escala bi-logarítmica do tamanho da placa vs tensão.  $CV(G_f)=40\%$ , e RCE de Hillerborg.

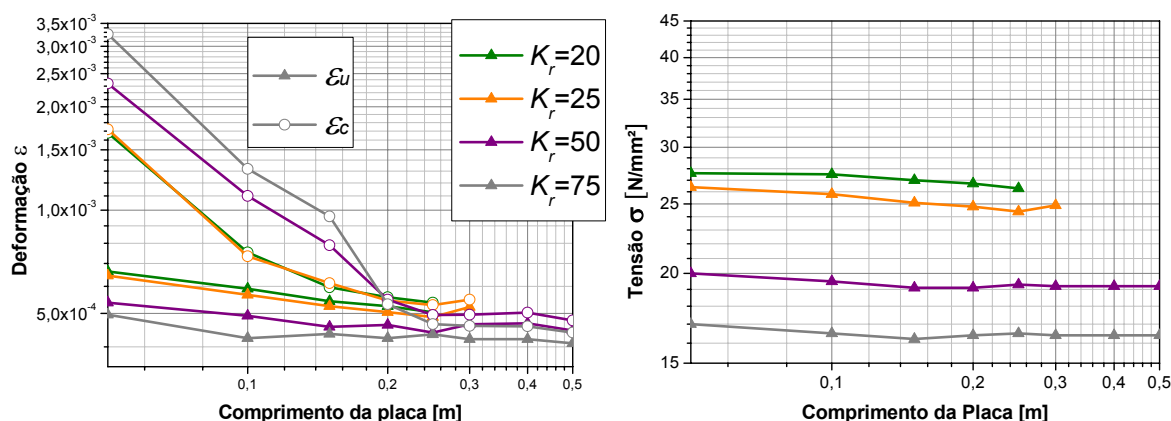


Figura 14: a) Gráfico em escala bi-logarítmica do tamanho da placa vs deformações características ( $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_u$ ), b) Gráfico em escala bi-logarítmica do tamanho da placa vs tensão.  $CV(G_f)=80\%$ , e RCE de Hillerborg.

Comparando as Figuras 10, 12 e 14, pode-se observar que tanto a tensão máxima  $\sigma_u$ , quanto a deformação relacionada com esta  $\varepsilon_u$ , diminuem com o aumento do  $CV(G_f)$ . O aumento de inclinação destas curvas com o aumento do  $CV(G_f)$  mostra que o efeito de escala de esses parâmetros tem uma relação direta com o  $CV(G_f)$ . A diminuição de  $K_r$  provoca um aumento nos valores de  $\sigma_u$  e  $\varepsilon_u$ .

Já o aumento do  $CV(G_f)$  gera um incremento na deformação crítica  $\varepsilon_c$  na região onde se apresenta propagação estável das trincas (parte com maior inclinação nas curvas). O tamanho de placa crítico também aumenta com essa variação, para um mesmo valor de  $K_r$ . O aumento de  $K_r$ , para uma aleatoriedade definida, gera diminuição de  $\varepsilon_c$  na região de propagação estável, comportamento contrario ao que ocorre na região de propagação instável.

### 3.2 Modelo Tri-linear

Para a análise dos resultados obtidos utilizando a relação constitutiva tri-linear, foram realizados os mesmos procedimentos propostos com o modelo de Hillerborg.

A Figura 15 mostra as curvas que relacionam o tamanho da placa com as deformações características e com as tensões máximas em escala bi-logarítmica variando o  $K_r$  para  $CV(G_f)=20\%$ . As Figuras 16 e 17 mostram essas mesmas figuras para  $CV(G_f)=40\%$  e  $CV(G_f)=80\%$ , respectivamente.

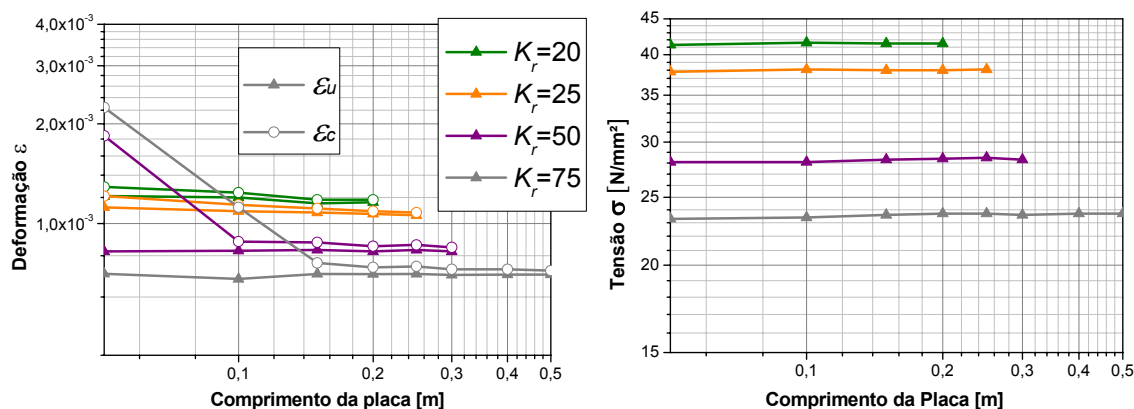


Figura 15: a) Tamanho da placa vs deformações características ( $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_u$ ) e b) tamanho da placa vs tensão, em escala bi-logarítmica.  $CV(G_f)=20\%$  e RCE tri-linear.

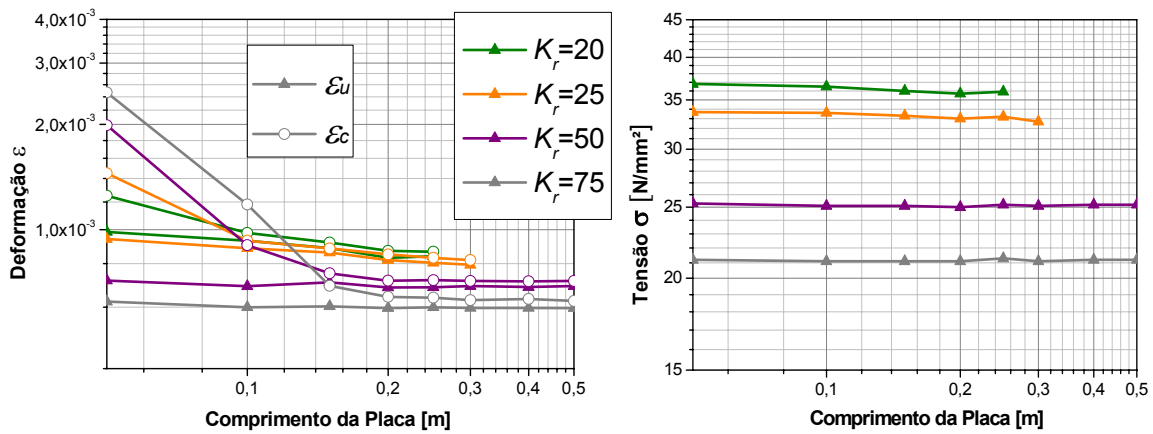


Figura 16: a) Tamanho da placa vs deformações características ( $\epsilon_c$ ,  $\epsilon_u$ ) e b) tamanho da placa vs tensão, em escala bi-logarítmica.  $CV(G_f)=40\%$  e RCE tri-linear.

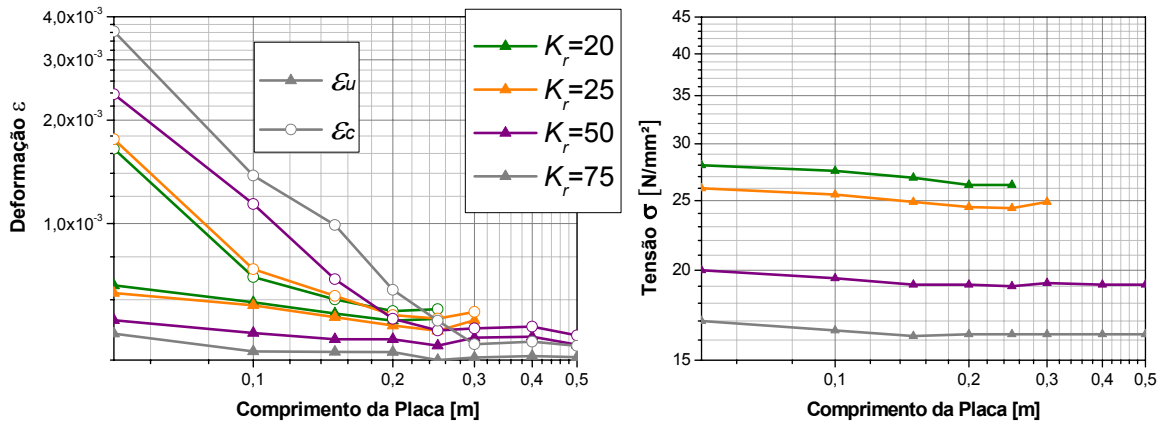


Figura 17: a) Tamanho da placa vs deformações características ( $\epsilon_c$ ,  $\epsilon_u$ ) e b) tamanho da placa vs tensão, em escala bi-logarítmica.  $CV(G_f)=80\%$  e RCE tri-linear.

Comparando as Figuras 15, 16 e 17, observam-se os mesmos efeitos com o  $CV(G_f)$  e o  $K_r$ , que para o modelo de Hillerborg.

### 3.3 Modelo com amolecimento exponencial

Com a relação constitutiva elementar representada pelo modelo com amolecimento exponencial, também foram realizadas as curvas que mostram o efeito de escala nas tensões e deformações para  $CV(G_f)$  de 20%, 40% e 80% e variando o  $K_r$ . Estas curvas se encontram nas Figuras 18, 19 e 20 respectivamente. Cabe notar que as outras propriedades do material foram consideradas constantes, com valores já definidos no começo da seção 3, módulo de elasticidade de  $7,5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>; densidade específica de massa 2700 kg/m<sup>3</sup>; coeficiente de Poisson de 0,25 e energia específica de fratura  $G_f=1300$  N/m.

Como se aprecia nas Figuras 18, 19 e 20, para o modelo com amolecimento exponencial foi possível encontrar resultados de propagação com uma trinca a partir de  $K_r=10$ . Também se observa que o aumento do  $CV(G_f)$  gera mais desordem nos resultados deste modelo que para os anteriores. Estes dois fatos fazem acreditar que quanto maior a cauda, com menor valor de  $K_r$ , será encontradas configurações com uma fissura e maior dispersão com o aumento da aleatoriedade é esperado. Além disso, o efeito de escala utilizando a relação constitutiva com amolecimento exponencial difere muito pouco do obtido com os modelos de Hillerborg e

trilinear. O tamanho de placa crítica se mostra sensível ao modelo utilizado assim como à variação de  $K_r$  e  $CV(G_f)$ .

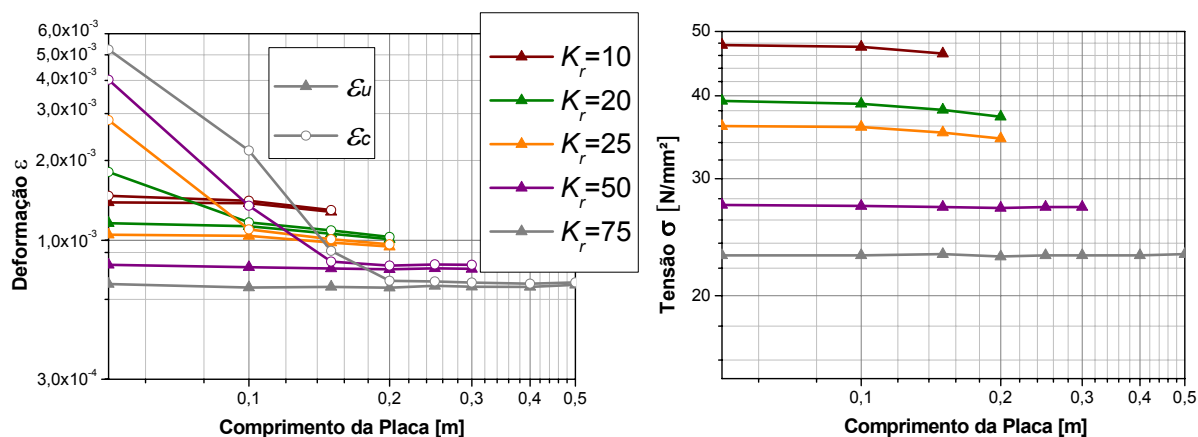


Figura 18: a) Tamanho da placa deformações características ( $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_u$ ) e b) tamanho da placa vs tensão, em escala bi-logarítmica.  $CV(G_f)=20\%$  e RCE com amolecimento exponencial.

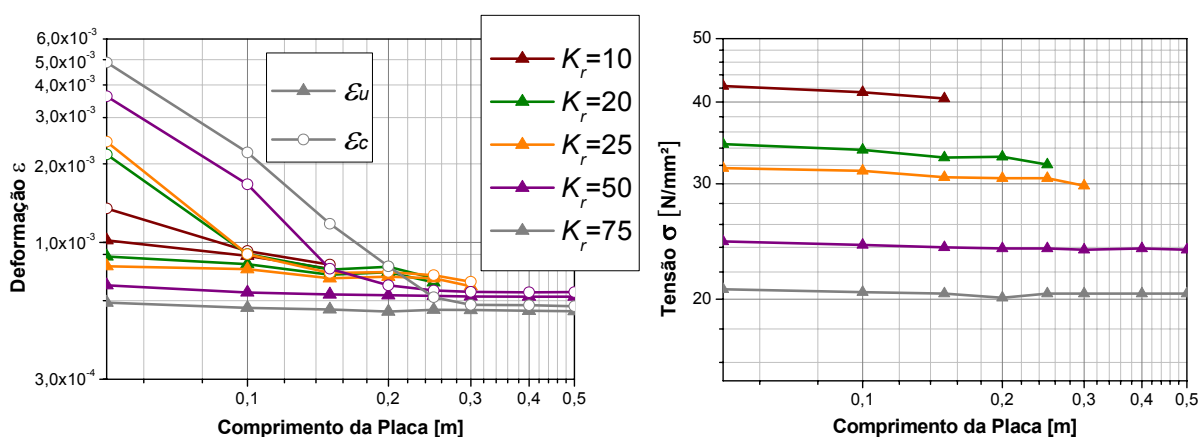


Figura 19: a) Tamanho da placa deformações características ( $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_u$ ) e b) tamanho da placa vs tensão, em escala bi-logarítmica.  $CV(G_f)=40\%$  e RCE com amolecimento exponencial.

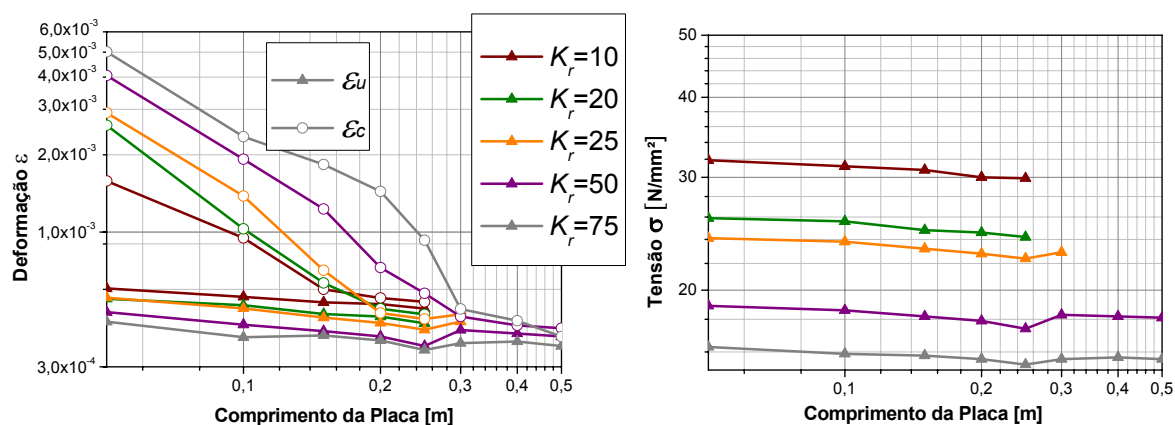


Figura 20: a) Tamanho da placa deformações características ( $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_u$ ) e b) tamanho da placa vs tensão, em escala bi-logarítmica.  $CV(G_f)=80\%$  e RCE com amolecimento exponencial.



#### 4 VARIACÃO DO TAMANHO CRÍTICO

Como já foi mencionado, a definição de tamanho crítico adotada neste trabalho corresponde ao tamanho da placa no qual se tem uma mudança de comportamento em relação à propagação da fissura. Isto é, o tamanho onde ocorre a transição de uma propagação estável para a instabilidade da mesma.

Na Figura 21 pode-se como varia o tamanho crítico com o  $K_r$  para os diferentes valores de  $CV(G_f)$  e para cada relação constitutiva analisada. As sombras coloridas na figura indicam a possível variação do tamanho crítico, já seriam necessárias mais simulações para definir este valor corretamente.

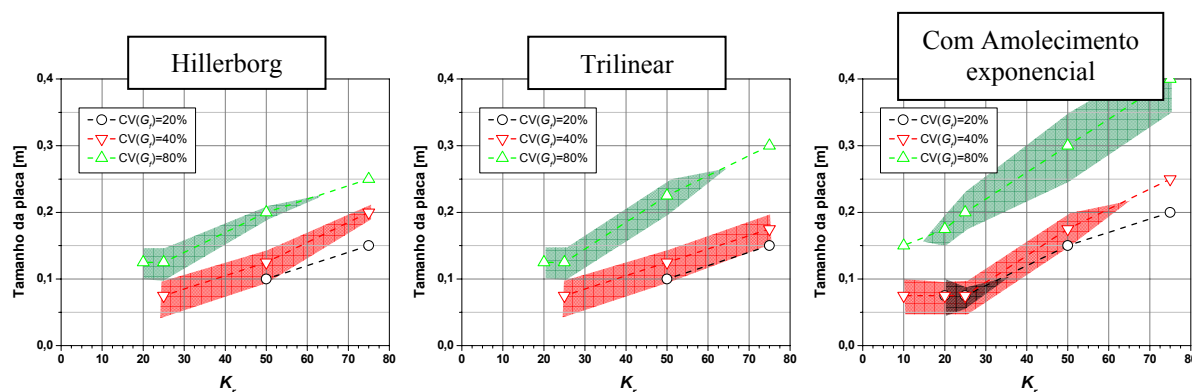


Figura 21: Variação do tamanho crítico da placa com o  $K_r$  e  $CV(G_f)$  variável.

Um estudo mais detalhado do tamanho crítico foi feito para o modelo de Hillerborg com  $CV(G_f)=40\%$ . A curva azul da Figura 22 mostra os resultados do estudo detalhado. A curva vermelha e sua sombra é a mesma curva apresentada na Figura 21 para os mesmos parâmetros.

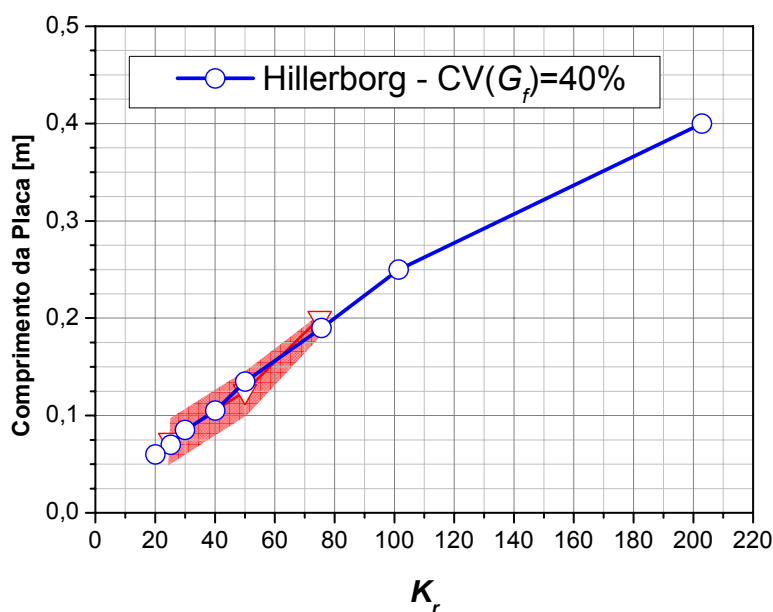


Figura 22: Variação do tamanho crítico da placa com o  $K_r=75$  e modelo de Hillerborg com  $CV(G_f)=40\%$ .

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estudado o efeito de escala para diferentes RCE mudando algumas características dos modelos como  $K_r$ , valor que relaciona a deformação crítica da relação constitutiva com a deformação de ruptura elementar, e o  $CV(G_f)$  que controla a dispersão do campo aleatório da energia específica de fratura do material simulado. Também foi realizada uma análise da variação do tamanho crítico ou de mudança de propagação estável a instável, com os parâmetros antes mencionados.

### 5.1 Referente ao efeito de escala

Em todos os casos, com o aumento do tamanho da placa, observa-se um aumento na instabilidade da propagação de fissuras. A ruptura passa de ser a propagação estável de uma fissura para propagação instável da mesma, ou da propagação instável de uma fissura para a geração e propagação de múltiplas fissuras com bifurcações.

Para uma mesma RCE, a maiores coeficientes de variação maior o número de placas que falham de forma estável. O mesmo efeito tem o aumento de  $K_r$  para um campo aleatório definido.

A cauda da relação constitutiva elementar mostra influencia nos resultados e quanto maior é a mesma maior quantidade de configurações com propagação estável são encontradas. Mas em linhas gerais os resultados são similares sendo o efeito de  $K_r$  e  $CV(G_f)$  na RCE o mesmo.

### 5.2 Referente à variação do tamanho crítico

O tamanho de placa crítico é muito influenciado pela forma da relação constitutiva elementar utilizada. Também se observou que o aumento do  $K_r$  leva a um aumento desse tamanho de placa. Já o incremento da dispersão da energia específica de fratura induz uma diminuição do tamanho crítico da placa porque se encontram elementos mais fracos nos quais começa a nucleação seguida da propagação de fissuras.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da Capes e da CNPq, que fazem possível a continuação das pesquisas e a melhora continua profissional.

## REFERÊNCIAS

- Barrios D'Ambra, R.L., Kostaski, L., Podesta, J.M., Uberti, B., Iturrioz, I., Estudio del comportamiento de placas delgadas submetidas a cargas de impacto utilizando el método de los elementos discretos, Enief 2009. *Mecánica Computacional*, v. XXVIII, p. 973-984, 2009.
- Dalguer, L.A., Irikura, K., Riera, J.D., Chiu, H.C, The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, v. 91, p. 1112-1127, 2001.
- Hillerborg, A. A Model for Fracture Analysis. Cod LUTVDG/TV BM-3005/1-8, 1978.
- Iturrioz, I., Aplicação de Método dos Elementos Discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado. Tese (Doutorado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1995.
- Iturrioz, I., Miguel, L.F.F., Riera, J.D., Dynamic fracture analysis of concrete or rock plates by means of the Discrete Element Method. *Latin American Journal of Solids and*

- Structures*, v. 6, p. 229-245, 2009.
- Kosteski, L., Barrios D'ambra, R., Iturrioz, I., Determinación de Parámetros Fractomecánicos Estáticos y Dinámicos utilizando el Método de los Elementos Discretos compuestos por barras. *Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, Cimne, v. 24, p. 323-343, 2008.
- Kosteski, L., Barrios D'ambra, R., Iturrioz, I., Fractomechanics parameter calculus using the Discrete Element Method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 6, p. 301-321, 2009.
- Kosteski, L.E., Iturrioz, I., Batista, R.G., Cisilino, A.P., The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics. *Engineering Computations*, v. 28, p. 765-787, 2011a.
- Kosteski, L.E., Iturrioz, I., Riera, J.D., Consideration of size effect multifractal theory in fracture analysis by means of the truss-like Discrete Element Method (DEM). Em: Third International Symposium on Solid Mechanics - *MecSol 2011*, Florianópolis, Santa Catarina. Mechanics of Solids in Brazil 2011, p. 249-266. 2011b.
- Kosteski, L.E., Riera, J.D., Iturrioz, I., Ultimate load analysis of Barcom test model employing the discrete element method. Em: *SMiRT21*, 2011, Nueva Delhi. SMiRT21, 2011c.
- Kupfer, H.B., e Gerstle, K.H., Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers*, v. 99, No. 4, p. 853-866, 1973.
- Miguel, L.F.F., Riera J.D., Iturrioz, I., Influence of size on the constitutive equations of concrete or rock dowels. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 32/15, p. 1857-1881, 2008.
- Nayfeh, A.H., e Hefzy, M.S., Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. *AIAA Journal*, v. 16(8), p. 779-787, 1978.
- Riera, J.D., Local Effects In Impact Problems In Concrete Structures. Em: proceedings, Conf. on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants, UFRGS, 1984. Porto Alegre, Rs, Brasil. p. 0-0. 1984.
- Riera, J.D., e Rocha, M.M., A note on velocity of crack propagation in tensile fracture. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, v. XII/3, p. 217-240, 1991.
- Riera, J.D., e Iturrioz, I., Discrete element dynamic-response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Wiley & Sons, U. K, v. 11, p. 417-426, 1995.
- Riera, J.D., e Iturrioz, I., Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, v. 179, p. 135-144, 1998.
- Rios, R.D., e Riera, J.D., Size effects in the analysis of reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 26, p. 1115-1125, 2004.
- Rocha, M.M., Ruptura e Efeitos de Escala em Materiais não Homogêneos. Tese (Mestrado), CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1989.
- Rocha, M.M., Riera, J.D., Krutzik N.J., Extension of a model that aptly describes fracture of plain concrete to the impact analysis of reinforced concrete. Int. Conf. and Structural Mechanics in Reactor Technology, *SMiRT 11*, Trans, Vol. J., Tokyo, Japan. 1991.
- Schnaid, F., Spinelli, L., Iturrioz I., Rocha M.M., Fracture mechanics in ground improvement design. *Ground Improvement*, v. 8/1, p. 7-15, 2004.
- Sigmund O., Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, v. 31, Issue 17, p. 2313-2329,

1876

*L. MADERS, L.E. KOSTESKI, I. ITURRIOZ*

1994.