

## APLICACIÓN DE UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN AL DISEÑO DE UNA VIGA ELÁSTICA

María C. Maciel\*, Elvio A. Pilotta<sup>†</sup> and Graciela N. Sottosanto<sup>‡</sup>

\*Depto. de Matemática, Universidad Nacional de Sur  
Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina  
e-mail: immaciel@criba.edu.ar

<sup>†</sup>CIEM (CONICET)-FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba  
Medina Allende s/n, 5000 Córdoba, Argentina  
e-mail: pilotta@mate.uncor.edu

<sup>‡</sup>Depto. de Matemática, Universidad Nacional del Comahue  
Santa Fe 1400, 8300 Neuquén, Argentina  
e-mail: gsottos@uncoma.edu.ar

**Key Words:** programación no lineal, optimización estructural, método de elementos finitos.

**Abstract.** *Se considera el problema de determinar la altura de la sección de una viga elástica sujeta a una carga vertical de modo que la rigidez de la viga sea máxima. El planteo de este problema se basa en la presentación de Haslinger y Mäkinen,<sup>1</sup> aunque el modelo y la resolución del problema de optimización resultante siguen lineamientos diferentes. Se usa el método de elementos finitos para obtener una discretización adecuada del problema con valores en la frontera y para formular, posteriormente, el problema de optimización. Este último se resuelve combinando el método de puntos interiores con estrategias de región de confianza. Resultados numéricos preliminares son presentados.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo consiste en ilustrar el uso de modelos de optimización para resolver problemas de diseño óptimo, en particular, de dimensiones óptimas (*sizing optimization*).

En esta primera etapa, estamos interesados en resolver el primer problema, es decir, consideramos el caso de diseño óptimo de una viga, sometida a esfuerzos de flexión, que responde a la teoría de Euler-Bernoulli. En esta teoría se asume que las secciones planas perpendiculares al eje de la viga, permanecen planas después de la flexión y que la deformación transversal  $w$  está gobernada por la ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( b \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q \quad \text{para } 0 < x < l,$$

donde  $b = b(x)$  y  $q = q(x)$  son funciones dadas de  $x$  y  $w$  es la variable dependiente.

La función  $b = E \times I$ , es el producto del módulo de elasticidad del material por el momento de inercia de la sección transversal de la viga,  $q$  es la carga distribuida transversal y  $w$  es la deformación medida transversalmente al eje de la viga. Además de satisfacer la ecuación diferencial,  $w$  también debe cumplir apropiadas condiciones de frontera que dependerán de la forma de sustentación de la viga.

En nuestro problema de diseño óptimo la variable es el espesor de la viga (altura de la sección transversal) que llamaremos  $e$  y el objetivo es encontrar una distribución de espesores que maximice la rigidez de la viga. Bajo estas condiciones, la deformación transversal es una función del espesor, es decir,  $w = w(e)$ .

En nuestros experimentos numéricos consideraremos una viga de espesor variable  $e$  representada en el intervalo  $I = [0, l]$  y sometida a diferentes estados de sustentación y carga.

Si bien el planteo del problema y parte de su análisis está basado en la presentación de Haslinger y Makinen,<sup>1</sup> el modelo de optimización que se obtiene y la forma de resolución siguen lineamientos diferentes.

La estrategia consiste, básicamente, en usar la técnica de elementos finitos para obtener una discretización adecuada del problema con valores en la frontera y formular un problema de optimización no lineal sujeto a restricciones de igualdad, desigualdad y cotas sobre las variables. Para la resolución numérica se usó el algoritmo KNITRO desarrollado por J. Nocedal y R. A. Waltz<sup>2</sup> el cual consiste en una implementación del método de puntos interiores con estrategias de region de confianza.

Si a este problema se le agregan otros objetivos que se desean satisfacer simultáneamente, tales como maximizar la frecuencia mínima de libres oscilaciones y maximizar la carga mínima de pandeo, el problema resultante podría ser resuelto usando algún método de optimización multicriterio. Una alternativa posible sería usar un método de cuadrados mínimos no lineales, una vez resuelto cada uno de los problemas en forma individual.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 presentamos el problema de estructuras, posteriormente en la sección 3 desarrollamos la discretización del mismo, mediante el método de elementos finitos, y describimos el problema de optimización.

En la sección 4, reformulamos el problema de optimización, y en la sección 5 mostramos algunos resultados numéricos. Finalmente, en la sección 6 damos algunas conclusiones.

## 2 EL PROBLEMA

Para la descripción del problema, en primer lugar, consideramos una viga doblemente empotrada, sometida a una carga  $q(x)$  uniformemente distribuida y de espesor variable  $e$ . Bajo estas condiciones la deformación  $w$  debe satisfacer el siguiente problema de cuarto orden con valores en la frontera

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( \beta e(x)^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= q(x), \quad 0 < x < l, \\ w(0) = w(l) = \frac{dw}{dx}(0) = \frac{dw}{dx}(l) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\beta \in L^\infty(0, l)$  es una función no negativa que depende de las propiedades del material y del área de la sección transversal de la viga.

La rigidez de la viga está caracterizada por el funcional

$$J(w(e)) = \int_0^l q(x)w(e)dx,$$

donde  $w(e)$  debe satisfacer el problema (1).

Este funcional, que representa energía externa de deformación, puede ser interpretada como una medida de la flexibilidad de la viga. Por otro lado, podría pensarse que representa una medida “inversa”, ya que su decrecimiento implica incremento de la rigidez, de manera que maximizar la rigidez equivale a minimizar el funcional  $J$ . Este funcional es usada habitualmente en problemas de optimización estructural, ya sea como función objetivo o entre las restricciones del problema.<sup>3,4</sup>

Con respecto a los posibles espesores admisibles  $e$ , serán elegidos dentro de un cierto conjunto  $C$  tal que, además de satisfacer el problema (1) cumplan ciertas condiciones, no sólo desde el punto de vista matemático, sino también aceptables para fines prácticos.

Por ejemplo, algunos requisitos que impondremos a nuestro problema son:

- i) mantener el volumen constante de la viga, es decir,

$$\int_0^l e(x)dx = \alpha,$$

para cierto valor  $\alpha$  positivo constante;

- ii) pertenecer al conjunto de funciones uniformemente acotadas;
- iii) satisfacer ciertas cotas inferiores y superiores;

iv) satisfacer una condición de simetría en el intervalo  $[0, l]$ .

La última condición se impone ya que en el caso que nos ocupa, la viga tiene condiciones de sustentación y carga simétricas. La segunda y tercera tienden a lograr una variación de espesores dentro de ciertas cotas y prevenir oscilaciones bruscas.

Si bien las condiciones anteriores definen un conjunto muy simple desde el punto de vista matemático pueden no resultar aceptables para fines prácticos. Constructivamente, es más sencilla una viga “escalonada”, y por lo tanto caracterizaremos nuestros espesores admisibles con una distribución constante en cada subintervalo.

Así, el problema de optimización puede ser planteado como

Hallar  $e^* \in C$  tal que

$$w(e^*) = \operatorname{argmin} J(w(e)) = \operatorname{argmin} \int_0^l q(x)w(e(x))dx$$

donde  $w(e)$  satisface el problema (1).

Para poder ser resuelto por métodos de programación matemática, el problema debe ser presentado completamente discretizado, de manera que es necesario construir un nuevo modelo que depende de un número finito de variables de diseño.

### 3 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE ESTADO

La discretización del problema se realizará a usando el método de elementos finitos. Para ello vamos a discretizar el dominio y escribir la formulación débil de la ecuación diferencial que rige el problema.<sup>5,6</sup>

#### 3.1 Discretización del dominio

El dominio de la estructura, el intervalo  $[0, l]$ , se divide en un conjunto de  $d$  subintervalos que llamaremos elementos, cada uno con dos nodos extremos. De esta manera, dado  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta h : 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_d = l$  es una partición equidistante de  $I$  con paso  $h = l/d$ ,  $a_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, d$ .

#### 3.2 Derivación de las ecuaciones elementales

Nuestro objetivo es construir la formulación débil de la ecuación diferencial de cuarto orden, distribuyendo la diferenciación entre una función de peso y la variable dependiente, y analizar las condiciones de frontera asociadas con la ecuación.

Para ello consideramos un elemento  $\Omega_k = [a_k, a_{k+1}]$ . Sea  $v$  una función de peso,  $v \in V$ , donde  $V$  es un subespacio de dimensión finita de  $H_0^2(I)$ . Aquí  $H_0^2(I)$  representa el espacio de funciones de Sobolev, cuyas derivadas son cuadrado integrables hasta segundo orden en el intervalo  $I$  y satisfacen las condiciones de frontera del problema (1).

Multiplicando la ecuación diferencial por la función  $v$  e integrando sobre el elemento  $\Omega_k$  resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{a_k}^{a_{k+1}} v \left( \frac{d^2}{dx^2} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q \right) dx \\ &= \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left[ -\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - vq \right] dx + \left[ v \frac{d}{dx} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \\ &= \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left( \beta e^3 \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - vq \right) dx + \left[ v \frac{d}{dx} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}}, \end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades se obtienen integrandos dos veces por partes.

Las variables en cada nodo involucran la deformación  $w$  y su pendiente  $\frac{dw}{dx}$ .

Con motivo de las dos integraciones por partes aparecen dos expresiones que deben ser evaluadas en los extremos del elemento. Estos términos de frontera, para el caso de vigas sometidas a flexión tienen interpretaciones específicas.<sup>7</sup> Así, las condiciones de frontera naturales incluyen especificaciones del momento flexor  $\beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2}$  y del esfuerzo de corte  $\frac{d}{dx} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right)$  en los extremos del elemento.

Por razones de conveniencia introduciremos la siguiente notación (ver Figura 1).

$$\begin{aligned} Q_1^k &= \left[ \frac{d}{dx} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{a_k}, \\ Q_2^k &= \left[ \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{a_k}, \\ Q_3^k &= - \left[ \frac{d}{dx} \left( \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{a_{k+1}}, \\ Q_4^k &= - \left[ \beta e^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{a_{k+1}}. \end{aligned}$$

Con esta notación la formulación débil resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left( \beta e^3 \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - vq \right) dx - v(a_k) Q_1^k - (-dv/dx) Q_2^k \\ &\quad - v(a_{k+1}) Q_3^k - \left( -\frac{dv}{dx} \right) Q_4^k. \end{aligned} \quad (2)$$

La formulación variacional (2) requiere que las funciones de interpolación sean continuas hasta segundo orden y en los extremos de cada elemento deben satisfacer

$$w(a_k) = w_1, \quad w(a_{k+1}) = w_2, \quad -\frac{dw}{dx} \Big|_{a_k} = \theta_1, \quad -\frac{dw}{dx} \Big|_{a_{k+1}} = \theta_2.$$

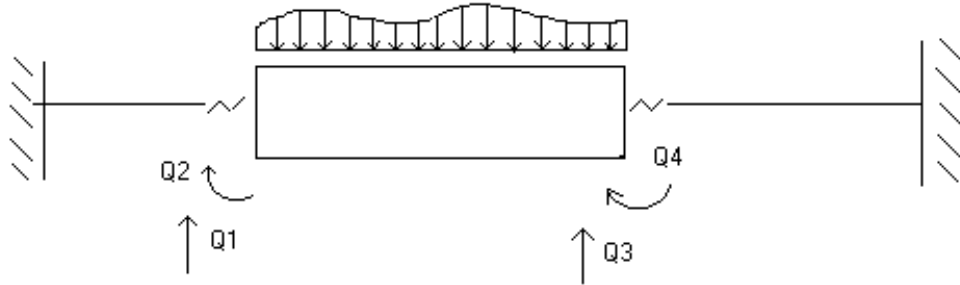


Figure 1: Fuerzas generalizadas sobre un elemento de la viga.

Las cuatro condiciones en cada elemento sugieren seleccionar un polinomio de grado tres para aproximar  $w(x)$ :

$$w(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3. \quad (3)$$

A continuación se asignan las variables nodales para el elemento de acuerdo a

$$u_1 = w_1, \quad u_2 = \theta_1 \quad u_3 = w_2, \quad u_4 = \theta_2.$$

En función de estas variables es posible obtener para  $w$  la siguiente expresión

$$w(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x) + u_3\phi_3(x) + u_4\phi_4(x) = \sum_{j=1}^4 u_j\phi_j(x).$$

Las funciones  $\phi_j$  constituyen la familia de polinomios cúbicos de Hermite<sup>7</sup> y tienen la siguiente forma (ver Figura 2)

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{-(x-x_2)^2[-h+2(x_1-x)]}{h^3} \\ \phi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{h^2} \\ \phi_3(x) &= \frac{(x-x_1)^2[h+2(x_2-x)]}{h^3} \\ \phi_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{h^2} \end{aligned}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son los extremos izquierdo y derecho respectivamente, de cada elemento.

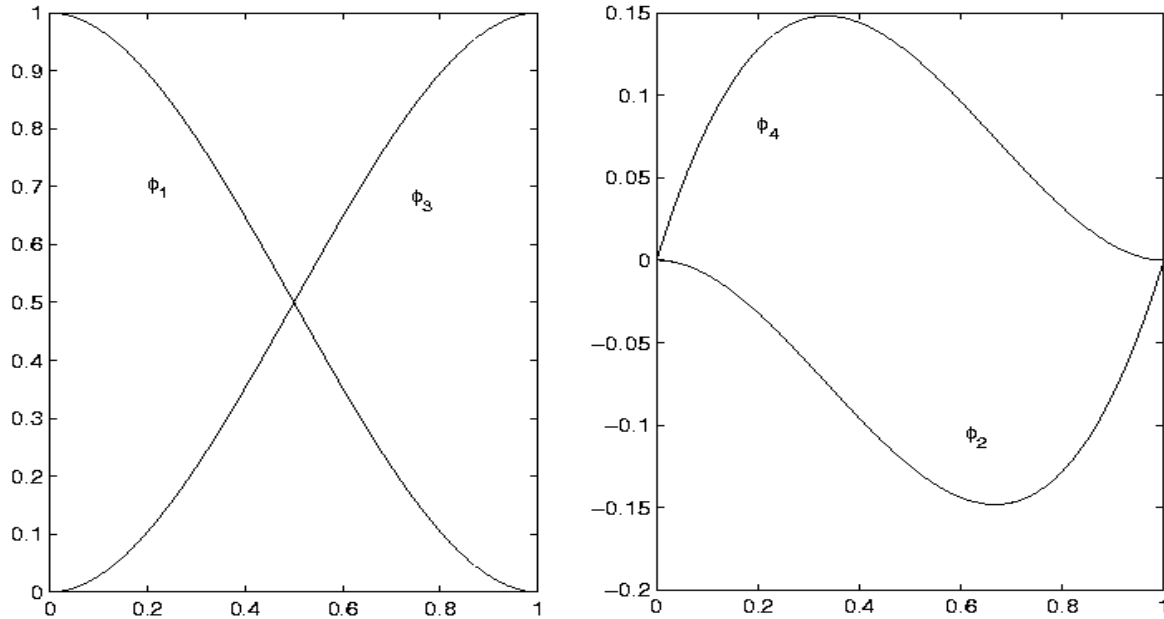


Figure 2: Polinomios cúbicos de Hermite.

### 3.3 El modelo de elementos finitos

Introduciendo la interpolación dada por (3) como  $w$  y las funciones  $\phi_j$  para la función de peso en la formulación variacional débil (2) se obtiene el modelo de elementos finitos de la viga de Euler-Bernoulli. Como hay cuatro variables nodales para cada elemento, cuatro posibles elecciones pueden ser usadas para  $v$ ,  $v = \phi_i, i = 1, \dots, 4$ .

En nuestros experimentos numéricos consideramos el espesor constante en cada elemento y la función  $\beta$  constante sobre toda la viga. Así, la  $i$ -ésima ecuación algebraica (para  $v = \phi_i$ ) resulta

$$0 = \beta e_k^3 \sum_{j=1}^4 \left( \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d^2 \phi_j^k}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i^k}{dx^2} dx \right) u_j - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \phi_i^k q(x) dx - Q_i^k,$$

o bien,

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^k u_j^k - F_i^k = 0,$$

donde

$$K_{ij}^k = \beta e_k^3 \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d^2 \phi_j^k}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i^k}{dx^2} dx, \quad F_i^k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \phi_i^k q(x) dx + Q_i^k.$$

Estos coeficientes pueden presentarse en notación matricial

$$\begin{bmatrix} K_{11}^k & K_{12}^k & K_{13}^k & K_{14}^k \\ K_{21}^k & K_{22}^k & K_{23}^k & K_{24}^k \\ K_{31}^k & K_{32}^k & K_{33}^k & K_{34}^k \\ K_{41}^k & K_{42}^k & K_{43}^k & K_{44}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ u_4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^k \\ q_2^k \\ q_3^k \\ q_4^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^k \\ Q_2^k \\ Q_3^k \\ Q_4^k \end{bmatrix}.$$

Aquí  $\mathbb{K}^k$  es la matriz de rigidez para el  $k$ -ésimo elemento de la viga y resulta ser simétrica. El segundo miembro de la ecuación matricial anterior recibe el nombre de vector de fuerzas generalizadas pues contiene fuerzas externas aplicadas y los esfuerzos de corte y flexión en los extremos del elemento.

Si el elemento tiene longitud  $h$  y espesor  $e$  la matriz de rigidez, según<sup>6</sup> tienen la siguiente forma específica

$$\mathbb{K}^k = \frac{2\beta e^3}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix},$$

$$F^k = \frac{qh}{12} \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 6 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \right\}.$$

### 3.4 Ensamble de las ecuaciones elementales

Para ensamblar los elementos de la viga deben tenerse en cuenta los dos grados de libertad en cada nodo. Esto implica considerar la relación entre las variables asociadas al nodo derecho de un elemento y el izquierdo del elemento vecino y las relaciones de equilibrio entre momento flexor y esfuerzo de corte entre elementos.

Para ejemplificar el proceso de ensamble podemos seleccionar un modelo de dos elementos con tres nodos. Con  $u_i^k$  indicamos las variables nodales asociadas al elemento  $k$  y con  $U_j$  las variables globales.

La continuidad de las variables asociadas a los nodos implican la existencia de seis variables globales  $U_j, j = 1, \dots, 6$

$$u_1^1 = U_1, \quad u_2^1 = U_2, \quad u_3^1 = u_1^2 = U_3, \quad u_4^1 = u_2^2 = U_4, \quad u_3^2 = U_5, \quad u_4^2 = U_6.$$

Por otra parte, las condiciones de equilibrio de las fuerzas generalizadas requieren que la suma  $Q_3^1 + Q_1^2$  sea igual a la fuerza externa puntual aplicada y  $Q_4^1 + Q_2^2$  sea igual al momento flexor externo aplicado. Consecuentemente, para imponer estas condiciones es necesario adicionar la tercer y cuarta ecuación del segundo nodo del primer elemento a la primera y segunda correspondientes al primer nodo del segundo elemento.

En general, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas para los dos elementos consecutivos que estamos ejemplificando resulta



$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^k + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 + q_1^2 \\ q_4^1 + q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{bmatrix}.$$

### 3.5 Imposición de las condiciones de frontera y equilibrio

Para el caso general de la viga particionada en  $d$  elementos la matriz ensamblada es de orden  $2(d + 1) \times 2(d + 1)$ . Sin embargo, el sistema algebraico contiene  $4(d + 1)$  incógnitas, de las cuales  $2(d + 1)$  corresponden al vector de fuerzas generalizadas y  $2(d + 1)$  a deformaciones y pendientes. La imposición de las condiciones de frontera y las cargas aplicadas permitirán reducir el número de incógnitas.

Las condiciones de frontera esenciales para el problema específico de una viga dependen de la naturaleza geométrica de la forma de sustentación de los apoyos.

Para el caso particular de la viga doblemente empotrada la deformación  $w$  y la pendiente  $\frac{dw}{dx}$  son nulas en los apoyos. Con respecto a las condiciones de equilibrio, en cada uno de los nodos intermedios debe verificarse que

$$Q_3^k + Q_1^{k+1} = 0, \quad Q_4^k + Q_2^{k+1} = 0,$$

ya que no existen fuerzas puntuales aplicadas, mientras que en los extremos de la viga, el esfuerzo de corte y el momento flexor son desconocidos.

Usando las condiciones de equilibrio para el nodo intermedio, y suponiendo que los dos elementos que estamos ejemplificando tengan la misma longitud  $h$  y altura de sección  $e_1$  y  $e_2$  resulta el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 6e_1^3 & -3he_1^3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3he_1^3 & 2h^2e_1^3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6e_1^3 & 3he_1^3 & 6(e_1^3 + e_2^3) & 3h(e_1^3 - e_2^3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -3he_1^3 & h^2e_1^3 & 3h(e_1^3 - e_2^3) & 2h^2(e_1^3 + e_2^3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 6(e_d^3 + e_{d-1}^3) & 3h(e_{d-1}^3 - e_d^3) & -6e_d^3 & -3he_d^3 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 3h(e_{d-1}^3 - e_d^3) & 2h^2(e_d^3 + e_{d-1}^3) & 3he_d^3 & h^2e_d^3 & u_{2d} \\ 0 & \dots & \dots & -6e_d^3 & 3he - d^3 & 6e - d^3 & 3he_d^3 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{2d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{qh}{12} \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -h \\ 12 \\ \vdots \\ \vdots \\ 6 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_3^d \\ Q_4^d \end{bmatrix} \right\}.$$

Como las ecuaciones algebraicas que contienen deformaciones y pendientes no contienen las incógnitas de las fuerzas generalizadas, las ecuaciones correspondientes pueden resolverse de manera independiente. La ecuación matricial puede ser particionada en la forma

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix},$$

donde  $U^1$  y  $U^3$  contienen las deformaciones y pendientes conocidas (en el caso que estamos analizando son nulas por las condiciones de sustentación) y  $U^2$  son las desconocidas, en el caso del lado derecho en  $F^1$  y  $F^3$  están las incógnitas.

Bajo estas condiciones la ecuación matricial que nos interesa puede escribirse en la forma

$$K^{22}U^2 = F^2.$$

Esta ecuación matricial constituye un sistema de  $2(d - 1)$  ecuaciones algebraicas en  $2(d - 1)$  incógnitas, las deformaciones y pendientes en cada uno de los nodos intermedios en que se ha discretizado la viga. Los elementos de la submatriz  $K^{22}$  dependen de los espesores de cada elemento de la viga.

#### 4 REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

La discretización del problema de estado condujo a un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma

$$\mathbb{K}(e)U(e) = F, \tag{4}$$

donde en el vector  $U$  se encuentran ordenadas deformaciones y pendientes en cada uno de los nodos intermedios.

Con esta discretización el problema de optimización puede ser planteado como

Hallar  $e^* \in C$  tal que

$$J(u(e^*)) = \min_{e \in C} J(u(e))$$

donde  $u(e)$  satisface el sistema (4).

Para poder resolver el problema numéricamente resta formalizar las condiciones que debe satisfacer el conjunto de espesores admisibles y discretizar el funcional objetivo.

Con respecto a la función objetivo, en nuestra experimentación numérica hemos discretizado la integral usando la misma fórmula de integración numérica que para la integral que define el volumen de la viga. Como nuestra experiencia se ha realizado con distribuciones uniformes de carga, esto es,  $q(x) = q$  constante sobre la viga y además, impusimos la condición de que el espesor se mantenga constante sobre cada elemento, no se observaron mejoras numéricas relevantes usando otras fórmulas de integración respecto de la regla del rectángulo. Probablemente, con distribuciones de carga no uniformes sería conveniente usar otras cuadraturas.

La función objetivo resulta

$$J(u(e)) = \int_0^l q(x)u(e(x))dx \simeq q^T \bar{U},$$

donde el vector  $\bar{U}$  contiene sólo las  $d + 1$  componentes de  $U$  que corresponden a deformaciones en cada uno de los nodos intermedios y  $q$  es un vector constante del mismo número de componentes.

La viga que se diseña es una viga escalonada, por lo tanto el conjunto de espesores admisibles queda caracterizado por funciones constantes a trozos en cada elemento y que cumplen ciertas condiciones como

$$\begin{aligned} e_{min} &\leq e_i \leq e_{max}, \quad i = 1, \dots, d, \\ |e_{i+1} - e_i| &\leq \gamma h, \quad i = 1, \dots, d - 1, \end{aligned}$$

para alguna constante  $\gamma$ . Además, la condición que preserva el volumen de la viga está dada por

$$h \sum_{i=1}^{i=d} e_i = \alpha.$$

Finalmente, el problema de optimización no lineal resulta ser

$$\begin{aligned} \min_{e, \bar{U}_i} \quad & q^T \bar{U} \\ \text{s.a} \quad & KU = F \\ & h \sum_{i=1}^{i=d} e_i = \alpha, \\ & e_{min} \leq e_i \leq e_{max}, \quad i = 1, \dots, d, \\ & |e_{i+1} - e_i| \leq \gamma h, \quad i = 1, \dots, d - 1. \end{aligned}$$

De esta manera el modelo descripto conduce a una clásica formulación de un problema de programación lineal con cotas sobre las variables y restricciones de igualdad y desigualdad. Si

bien el desarrollo del modelo es similar al planteado en,<sup>1</sup> la formulación es conceptualmente diferente ya que en nuestro modelo las variables correspondientes a espesores y deformaciones, si bien se plantean en principio como independientes, se relacionan a través del conjunto de restricciones  $KU = F$ . En la formulación mencionada, se plantea un problema de optimización donde sólo se consideran como variables los espesores y su relación con las deformaciones que intervienen en la función objetivo, se consideran a través de un análisis de sensibilidad, que si bien es riguroso desde el punto de vista matemático no es sencillo para el usuario interesado en resolver un problema de diseño óptimo.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

En nuestros experimentos numéricos consideramos dos condiciones de sustentación para la viga que diseñamos. En primer lugar la viga doblemente empotrada, cuyo modelo discretizado se describió en las secciones anteriores, y en segundo lugar, una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro. Para la segunda formulación debe tenerse en cuenta que varían las condiciones de frontera para la ecuación diferencial. Esto es, en el extremo apoyado la deformación es nula mientras que la pendiente no lo es, simultáneamente, esta condición de sustentación no permite absorber momento flexor en ese extremo. Usando la notación de la sección 3 resulta:

$$w(0) = u_1^1 = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = u_2^1 = 0; \quad w(l) = u_3^d = 0; \quad Q_4^d = - \left[ \beta e_d^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_l = 0.$$

Con estas condiciones se replantea el sistema de ecuaciones algebraicas que surgen de ensamblar las ecuaciones en el método de elementos finitos.

Para resolver el problema de optimización se utilizó el código KNITRO 3.1 desarrollado por J. Nocedal y R. A. Waltz<sup>2</sup> usando una interface a Visual Fortran. Para la interface el usuario debe proveer tres subrutinas Fortran conteniendo respectivamente los datos del problema, la función objetivo y las restricciones y el gradiente de la función objetivo y la matriz Jacobiana de las restricciones. Este algoritmo implementa un método de punto interior o de barrera donde el problema de programación no lineal es reemplazado por una serie de subproblemas controlados por un parámetro de barrera  $\mu$ . El algoritmo usa región de confianza como estrategia globalizadora y una función de mérito para obtener convergencia.

El método, presentado y analizado en<sup>8,9</sup>, realiza uno o más pasos de optimización por cada subproblema hasta decrecer el parámetro y repite el proceso hasta que el problema original ha sido resuelto con la precisión deseada. Cada paso es tomado como la suma de dos componentes: una componente normal cuyo objetivo es mejorar la factibilidad y una componente tangencial computada usando una iteración de gradiente conjugado proyectado cuyo objetivo es mejorar la optimalidad.

Cada uno de los problemas fue resuelto variando el número de elementos en los que se discretizó la viga entre 8 y 32. Para los cálculos se adoptó, por simplicidad la longitud  $l = 1$ , la función  $\beta$  constante,  $\beta = 1$ , la carga uniformemente distribuida  $q(x) = -1$ , las cotas inferior y superior para el espesor  $e_{min} = 0.01$  y  $e_{max} = 0.1$ ,  $\alpha = 0.05$  y la constante  $\gamma = 0.5$ .

Como punto inicial se adoptó  $e_i = 0.05, i = 1, \dots, d$ . Con estos valores se resolvió el sistema (4) para obtener los valores iniciales de las demás variables.

A continuación se presentan gráficos del perfil óptimo obtenido de la viga usando discretizaciones de 8 y 32 elementos y los respectivos valores de la función objetivo.

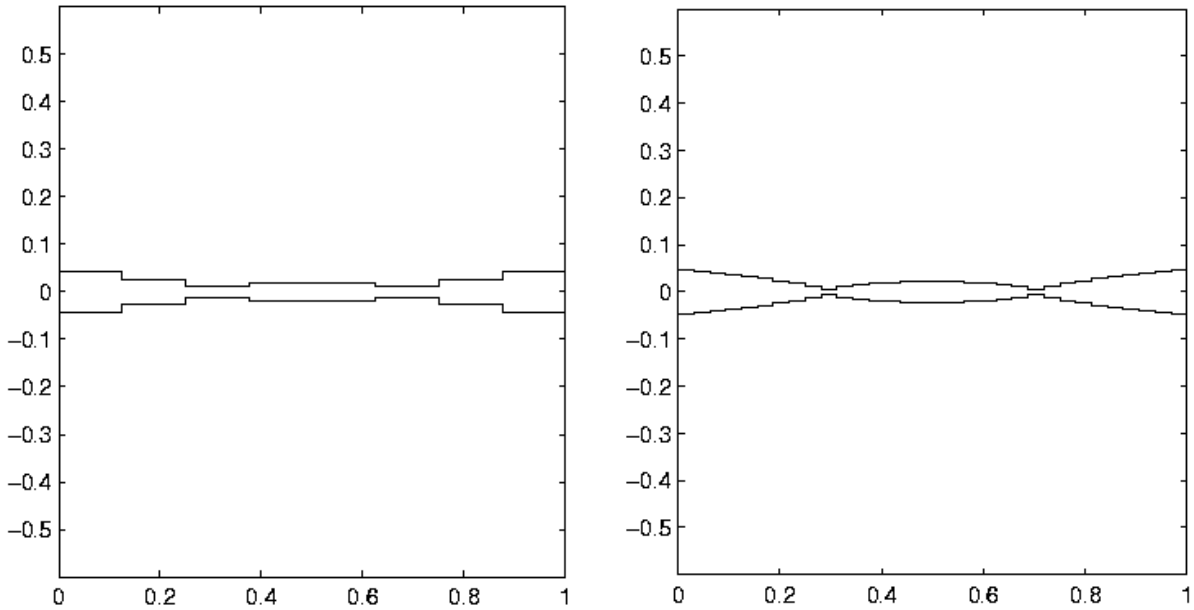


Figure 3: La viga doblemente empotrada discretizada en 8 ( $J=6.388$ ) y 32 elementos ( $J=5.659$ ).

## 6 CONCLUSIONES

Presentamos una formulación como problema de optimización del problema del diseño óptimo de una viga elástica sometida a esfuerzos de flexión que responde a la teoría de Euler-Bernoulli. Usamos el método de elementos finitos para obtener una versión discretizada del problema y de esta manera formular un problema de optimización no lineal sujeto a restricciones de igualdades, desigualdades y cotas en las variables.

Una de las principales ventajas de esta formulación es que permite utilizar cualquier algoritmo disponible de programación no lineal, lo cual resulta muy conveniente debido al avance en el desarrollo de algoritmos de optimización en los últimos años. Por otro lado, la conexión entre optimización y mecánica computacional en problemas estructurales (optimización estructural) ha despertado el interés de ingenieros y matemáticos aplicados en los últimos años obteniéndose avances importantes e interesantes.

Si bien el modelo considerado en este trabajo es unidimensional, el mismo puede ser generalizado y aplicado en problemas mucho más complicados para resolver problemas de estructuras similares sometidas a diferentes estados de sustentación y de cargas.

Para resolver el problema de optimización planteado utilizamos un algoritmo basado en el método de puntos interiores (KNITRO) en combinación con estrategias de región de confianza.

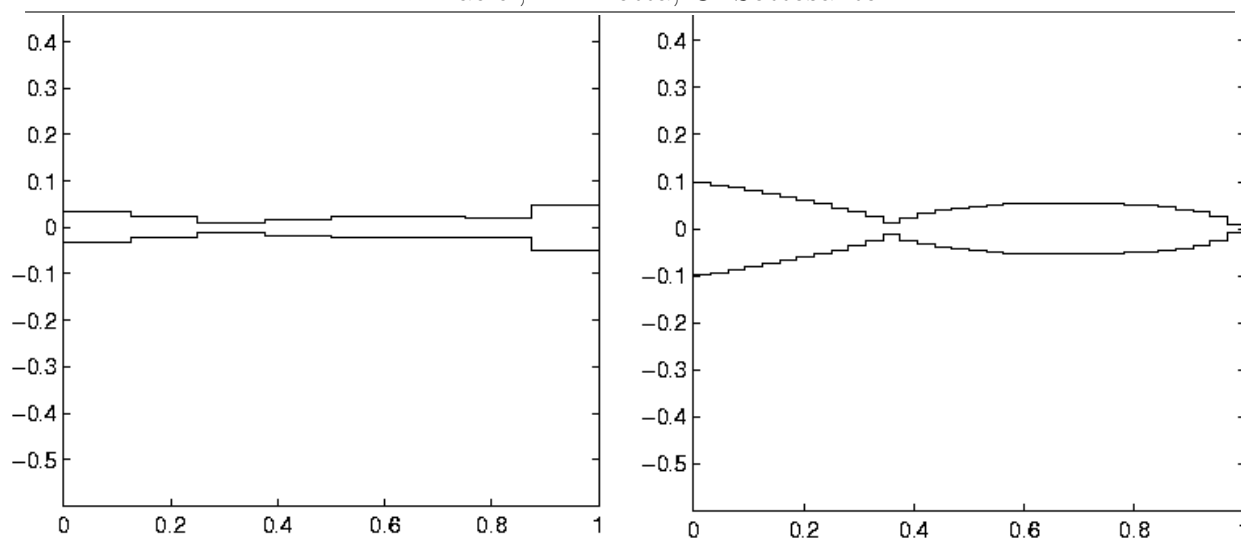


Figure 4: La viga empotrada-apoyada discretizada en 8 ( $J=29.458$ ) y 32 elementos ( $J=15.765$ ).

Los resultados numéricos obtenidos hasta ahora son promisorios y alentadores. Además, dada la estructura particular del problema de optimización que se obtiene de la discretización del problema continuo consideramos que aplicar adecuadamente un algoritmo de tipo Restauración Inexacta podría dar muy buenos resultados, en particular para problemas de gran porte.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. *Introduction to Shape Optimization. Theory, Approximation, and Computation*. SIAM, Philadelphia, (2003).
- [2] R. A. Waltz and J. Nocedal. Knitro user's manual. Technical report, Optimization Technology Center, Northwestern University, USA, (2003).
- [3] M. P. Bendsøe. *Topology Optimization. Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin, (2002).
- [4] K. Svanberg. "On the convexity and concavity of compliances". *Structural Optimization*, **7**, 42–46 (1994).
- [5] B. D. Reddy. *Introductory Functional Analysis*. Springer, New York, (1997).
- [6] H. R. Schwarz. *Finite Element Methods*. Academic Press, San Diego, CA., (1988).
- [7] J.N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Inc., USA, (1993).
- [8] R. H. Byrd, C. Ch. Gilbert, and J. Nocedal. "A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming". *Mathematical Programming*, **89**(1), 149–185 (2000).
- [9] R. H. Byrd, M. E. Hribar, and J. Nocedal. "An interior point algorithm for large scale nonlinear programming". *SIAM Journal on Optimization*, **9**(4), 877–900 (1999).