

IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE MAGNETO- ELECTRO-ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL ANISÓTROPA UTILIZANDO UN APPLICATION FRAMEWORK

Mariano Pucheu^a, Federico C. Buroni^b, Adrián Cisilino^a y Christian Duenser^c

^aDivisión Soldadura y Fractomecánica, INTEMA-CONICET, Universidad Nacional de Mar del Plata,
J. B. Justo 4302, 7600, Argentina, marianopucheu@fi.mdp.edu.ar, acisilino@fi.mdp.edu.ar,
www.fi.mdp.edu.ar/

^bDepartamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno.
Escuela Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n, E-41092,
Sevilla, España, fburoni@us.es, www.mmc.us.es/

^cInstitute of Structural Analysis, Graz University of Technology, Lessingstraße 25/II, 8010 Graz,
Austria, duenser@tugraz.at, www.tugraz.at/

Keywords: magneto-electro-elasticidad, solución fundamental, método de elementos de contorno, Application Framework.

Resumen. Los materiales magneto-electro-elásticos (MEE) tienen un amplio rango de aplicaciones tecnológicas debido a su habilidad para convertir la energía entre mecánica, eléctrica y magnética. Esto los convierte en materiales apropiados para aplicaciones en estructuras inteligentes, sistemas micro-electromecánicos y nano- electromecánicos entre otros.

Para implementar una formulación directa del Método de Elementos de Contorno (MEC) es necesario disponer de la solución fundamental MEE del problema acoplado y su derivada. En este trabajo se presenta por primera vez una implementación del MEC que utiliza las soluciones fundamentales recientemente derivadas por Buroni & Saez (F. Buroni, & A. Saez, *Proc. Royal Soc. A*, 466(2114): 515–537 (2010)). Estas soluciones son explícitas en función de los autovalores de Stroh y válidas para materiales con comportamiento totalmente anisótropo y con los tres campos completamente o parcialmente acoplados. Las soluciones contemplan también casos de degeneración matemática cuando existe algún autovalor de Stroh repetido.

La implementación del MEC se realiza utilizando un Application Framework (AF) especialmente diseñado para trabajar con métodos discretos (S. Urquiza, M. Venere., *Mecánica Computacional XXI*, 3099-3109 (2002)), el que provee un entorno para la implementación de aplicaciones de elementos finitos, elementos de contorno, diferencias finitas, etc., así como acoplamientos MEC-MEF. Se incorpora al AF un esquema para el cálculo de la solución fundamental. La evaluación de la misma es lograda a través de la interpolación de los valores previamente calculados en puntos de una grilla.

Se presenta en este trabajo la estrategia desarrollada para la implementación del MEC para materiales MEE en el AF. El desempeño de la implementación y el de la solución fundamental MEE son evaluados resolviendo una serie de ejemplos de benchmark para materiales con simetría en sus leyes de comportamiento que resultan en casos matemáticamente degenerados y no degenerados. Para concluir, un análisis del tamaño de la grilla en función de la calidad de los resultados es mostrado, permitiendo evaluar la performance de la estrategia de evaluación de la solución fundamental en modelos de MEC.

INTRODUCCIÓN

Los materiales Magneto-electro-elásticos (MEE) se emplean en aplicaciones de estructuras inteligentes debido a su habilidad para convertir la energía entre mecánica, eléctrica y magnética. A pesar de que los materiales MEE pueden ser encontrados en la naturaleza en una única fase, en la actualidad, las aplicaciones se realizan combinando fases piezoeléctricas y piezomagnéticas, generando un acoplamiento electromagnético que puede ser varios órdenes de magnitud mayor que el observado en los MEE monofásicos. Una de las claves para la explotación de las propiedades de estos materiales inteligentes es conocer su desempeño en servicio bajo cargas combinadas.

Las soluciones fundamentales juegan un rol fundamental en la resolución de problemas de ingeniería. Por ejemplo, para implementar una formulación directa del Método de Elementos de Contorno (MEC) es necesario disponer de la solución fundamental del problema acoplado y su derivada. En este trabajo se implementa por primera vez una implementación del MEC que utiliza las soluciones fundamentales para materiales MEE recientemente derivadas por Buroni & Saez (2010). Las mismas son explícitas en función de los autovalores de Stroh y válidas para sólidos infinitos 3-D con comportamiento totalmente anisótropo y acoplado. En particular se pueden modelar materiales elásticos, piezoeléctricos, piezomagnéticos y magnetoeléctricos. Las soluciones contemplan también posibles casos de degeneración matemática cuando existe algún autovalor de Stroh repetido.

La implementación del MEC se realiza utilizando el Application Frameworks (AF) “SolverGP”. Este AF se desarrolló en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Mar del Plata y ha sido testeado con implementaciones del Método de Elementos Finitos en varias aplicaciones, además de la implementación del MEC para problemas de potencial en 2-D (Dondero et al., 2009; Urquiza & Venere, 2002). Los AF son similares a librerías de programas en cuanto a la reusabilidad del código, como en una API (Application Programming Interface), pero a diferencia de las librerías, el control del flujo de la información global del programa lo dicta el Framework.

Resultados preliminares de este trabajo mostraron que una parte significativa del costo computacional de la implementación del MEC está asociado a la evaluación de las soluciones fundamentales. Con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo se implementó para este trabajo un esquema de interpolación de la solución fundamental y sus derivadas (Wilson & Cruse, 1978). Estas funciones pueden ser expresadas por el producto de dos términos. Mientras uno depende de la longitud del vector posición, el otro, llamado de modulación, depende sólo de su dirección, y se expresa en función de los ángulos azimutal y polar. La evaluación de este último, que involucra el mayor tiempo de cálculo, es llevada a cabo en puntos del dominio formando una grilla. El esquema empleado consiste en calcular el valor de la solución fundamental y sus derivadas en el punto deseado a partir de la interpolación entre puntos de la grilla previamente obtenida. Cada punto de la grilla sólo contiene los valores de los términos de modulación.

1 MATERIALES MAGNETO-ELECTRO-ELÁSTICOS

1.1 Ecuaciones básicas

Siguiendo la nomenclatura presentada en el trabajo Buroni & Saez (2010), se considera $\{x_i\}$ ($i=1,2,3$) un sistema de coordenadas en 3-dimensiones. El comportamiento de los materiales MEE se define a partir de las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de Maxwell que surgen de considerar un campo elástico estático. Las mismas se expresan a continuación

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1)$$

$$d_{i,i} = f^e \quad (2)$$

$$b_{i,i} = f^m \quad (3)$$

donde σ_{ij} , d_i y b_i son el tensor de tensiones de Cauchy, el desplazamiento eléctrico y la inducción magnética respectivamente, y f_i , f^e y f^m son las tres componentes de la fuerzas de volumen, la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente eléctrica respectivamente. El tensor de deformaciones infinitesimal, el campo eléctrico E_i y el campo magnético H_i se definen como

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (5)$$

$$H_i = -\vartheta_{,i} \quad (6)$$

donde u_i son las componentes del campo de desplazamiento, y φ y ϑ son los potenciales eléctricos y magnéticos respectivamente. Las ecuaciones (1)-(3) están relacionadas a partir de las ecuaciones constitutivas (Alshits et al., 1992; Soh, 2005).

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{lij}E_l - q_{lij}H_l \quad (7)$$

$$d_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \epsilon_{il}E_l + \lambda_{il}H_l \quad (8)$$

$$b_i = q_{ikl}\gamma_{kl} + \lambda_{il}E_l + \mu_{il}H_l \quad (9)$$

siendo c_{ijkl} , ϵ_{il} y μ_{il} las componentes del tensor de rigidez, el tensor de permitividad dieléctrica y el tensor de permeabilidad magnética respectivamente, y e_{ikl} , q_{lij} y λ_{il} son los coeficientes de acoplamiento piezoeléctrico, piezomagnético y magneto-eléctrico respectivamente.

El problema MEE lineal puede ser formulado de manera análoga al elástico, haciendo uso de la notación extendida propuesta por Barnett y Lothe (1975) para materiales piezoeléctricos. De esta forma se introduce el vector de desplazamientos extendido como (Alshits et al., 1992)

$$u_J = \begin{cases} u_J & J \leq 3 \\ \varphi & J = 4 \\ \vartheta & J = 5 \end{cases} \quad (10)$$

De la misma forma se define el vector de tensiones extendidas como

$$\sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & J \leq 3 \\ d_i & J = 4 \\ b_i & J = 5 \end{cases} \quad (11)$$

y las correspondientes tracciones extendidas, asociadas a una superficie con normal unitaria η como

$$t_J = \begin{cases} t_j = \sigma_{ji}\eta_i & J \leq 3 \\ D = d_i\eta_i & J = 4 \\ B = b_i\eta_i & J = 5 \end{cases} \quad (12)$$

Considerando el carácter extendido se puede escribir la ley constitutiva a partir de la ecuación

$$\sigma_{ij} = C_{iJKm} u_{K,m} \quad (13)$$

donde C_{iJKm} es el tensor de elasticidad extendido. Los subíndices en minúscula toman los valores 1, 2, 3 y los subíndices en mayúscula, valores de 1 a 5. Esta nomenclatura es válida en todo el trabajo. Análogamente, la ecuación de equilibrio de Navier extendida se define como

$$C_{iJKm} U_{K,mi} + f_j = 0 \quad (14)$$

2 ECUACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO EXTENDIDA

Consideremos un medio continuo y homogéneo con propiedades MEE completamente anisótropas ocupando la región $\Omega \in \mathbb{R}^3$ cuyo contorno es Γ en un sistema de coordenadas cartesianas $\{x_i\}$ ($i=1,2,3$). La ecuación integral de contorno para desplazamientos cuando no hay fuerzas de volumen actuando puede expresarse como (Aliabadi & Wrobel, 2002):

$$C_{JK}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T_{JK}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{JK}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') t_j d\Gamma, \quad (15)$$

donde u_j y t_j son las componentes de desplazamiento y tracción respectivamente; C_{JK} depende de la geometría local del contorno Γ en el punto de colocación \mathbf{x}' ; $U_{JK}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ y $T_{JK}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ son las soluciones fundamentales de desplazamiento y tracción en el punto \mathbf{x} debido a una fuerza unitaria aplicada en el punto \mathbf{x}' .

La solución fundamental en desplazamientos para materiales MEE es definida como un tensor de segundo orden en un espacio de cinco dimensiones con componentes U_{JK} tal que satisfacen las ecuaciones diferenciales equilibrio extendido de Navier (Eq.(14)) cuando se considera una carga puntual unitaria $f_j = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{jK}$ en el punto \mathbf{x}' siendo $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ la función delta de Dirac y δ_{jK} el delta de Kronecker en cinco dimensiones. Físicamente $U_{KP}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ representa el desplazamiento en la dirección K (considerando el carácter extendido del problema) en un sólido infinito en el punto $\mathbf{x} \neq 0$, debido a una fuerza puntual unitaria aplicada en el punto \mathbf{x}' en la dirección P (también en el sentido extendido). De la misma forma, $T_{KP}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ representa la componente K del vector tracción extendido que actúa sobre un determinado plano producido por una fuerza puntual unitaria (en el sentido extendido) aplicada en el punto \mathbf{x}' .

2.1 Solución fundamental MEE en desplazamientos

Siguiendo el trabajo de Buroni & Saez (2010), se considera por simplicidad que el sistema de coordenadas Cartesiano $\{x_i\}$ tiene su origen en el punto de colocación \mathbf{x}' . Así, la solución fundamental se puede escribir como un término singular multiplicado por una función de modulación H_{JK} (Wilson & Cruse, 1978)

$$U_{JK}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} H_{JK}(\hat{\mathbf{e}}), \quad (16)$$

donde $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{e}}$ siendo $r = |\mathbf{x}|$. Note que la función de modulación H_{JK} depende de la dirección de \mathbf{x} pero no de su módulo. Como se presentará luego en el Sección 4, esta característica permite acelerar el proceso de evaluación de U_{JK} al momento de implementar una formulación directa del Método de Elementos de Contorno, a través de la incorporación de un esquema de interpolación para H_{JK} .

Se define la matriz simétrica (Ting, 1996)

$$\Gamma_{JK}(p) = Q_{JK} + (R_{JK} + R_{KJ})p + T_{JK}p^2 \tag{17}$$

siendo

$$Q_{JK} = C_{iJKm}n_in_m; R_{JK} = C_{iJKm}n_im_m; T_{JK} = C_{iJKm}m_im_m \tag{18}$$

donde n_i y m_i son las componentes de dos vectores unitarios mutuamente ortogonales que se encuentran en un plano con normal coincidente con \hat{e} , de tal forma que $\{n, m, \hat{e}\}$ forman una terna dextrógira. Haciendo el determinante

$$|\Gamma(p)| = 0 \tag{19}$$

se llega a una ecuación polinómica de grado diez cuyas raíces con parte imaginaria positiva son conocidas como los autovalores de Stroh, p_α ($\alpha = 1, \dots, 5$) y las otras cinco raíces son sus complejas conjugadas (Ting, 1996).

La matriz H es uno de los tres tensores extendidos de Barnett-Lothe (Barnett & Lothe, 1975), cuya expresión explícita en función de los autovalores de Stroh, considerando posibles multiplicidades de dichos autovalores, ha sido presentada por Buroni & Saez (2010) como

$$H_{JK}(\hat{e}) = \frac{2i}{|T|} \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{(m_\alpha - 1)!} \times \left[\frac{d^{m_\alpha-1}}{dp^{m_\alpha-1}} \left\{ \frac{\hat{\Gamma}_{JK}(p)}{(p - \bar{p}_\alpha)^{m_\alpha} \prod_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq \alpha}}^N [(p - p_\xi)(p - \bar{p}_\xi)]^{m_\alpha}} \right\} \right]_{en p=p_\alpha} \tag{20}$$

donde N es la cantidad de autovalores p_α de Stroh de multiplicidad m_α , $i = \sqrt{-1}$, la barra $\bar{\cdot}$ denota el complejo conjugado y $\hat{\Gamma}$ la matriz adjunta de Γ .

2.2 Solución fundamental MEE en tracciones

Como se menciona en la sección previa, en aplicaciones de MEC, es necesario evaluar la solución fundamental de tracciones T_{KJ} . Siguiendo el trabajo de Buroni & Saez (2010), su expresión es fácil de obtener a partir de las derivadas de la solución fundamental para desplazamientos

$$T_{JK} = C_{iJPq}U_{PK,q}\eta_i \tag{21}$$

donde η_i son las componentes del vector normal unitario externo del contorno Γ en el punto x y C_{iKPq} las componentes del tensor elástico de cuarto orden que verifica la simetría $C_{iKPq} = C_{qPKi}$. La derivada de la solución fundamental puede ser escrita como

$$U_{PK,q}(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \tilde{U}_{PK,q}(\hat{e}) \tag{22}$$

La función de modulación $\tilde{U}_{PJ,q}(\hat{e})$ puede ser expresada (Buroni & Saez 2009)

$$\tilde{U}_{PK,q}(\hat{e}) = -\hat{e}_q H_{PK} + \frac{C_{rJMs}}{\pi} (M_{qsPJMK}\hat{e}_r + M_{qrPJMK}\hat{e}_s) \tag{23}$$

que sólo depende de la orientación x (o \hat{e}) pero no de su módulo r . Como se mencionó anteriormente para la solución fundamental de desplazamientos, la separación de los términos de T_{JK} permitirá disminuir el tiempo de evaluación en la implementación del MEC.

En la ecuación anterior, M_{qSPJMK} es obtenido a partir de aplicar la teoría de residuos de Cauchy, llegando a la ecuación (Buroni & Saez, 2010)

$$M_{ijPKMN}(\hat{e}) = \frac{2\pi i}{|T|^2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{(2m_\alpha - 1)!} \times \left[\frac{d^{2m_\alpha-1}}{dp^{2m_\alpha-1}} \left\{ \frac{\phi_{ijPKMN}(p)}{\prod_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq \alpha}}^N [(p - p_\xi)]^{2m_\alpha}} \right\} \right]_{en p=p_\alpha} \quad (24)$$

donde $\phi_{ijPKMN}(p)$ se define como

$$\phi_{ijPKMN}(p) := \frac{B_{ij} \hat{\Gamma}_{PK}(p) \hat{\Gamma}_{MN}(p)}{(p - \bar{p}_1)^2 (p - \bar{p}_2)^2 (p - \bar{p}_3)^2 (p - \bar{p}_4)^2 (p - \bar{p}_5)^2} \quad (25)$$

siendo

$$B_{ij} := n_i n_j + (n_i m_j + m_i n_j) p + m_i m_j p^2 \quad (26)$$

Las componentes de M_{ijPKMN} satisfacen las siguientes condiciones de simetrías

$$M_{qSPJMK} = M_{qSMKPJ} = M_{qSJPMK} = M_{qSPJKM} \quad (27)$$

Dado que la matriz B_{ij} es también simétrica, también se cumple la simetría

$$M_{qSPJMK} = M_{sqPJMK} \quad (28)$$

Estas simetrías permiten reducir considerablemente el número de componentes M_{qSPJMK} calculados, siendo esto considerado en la implementación numérica. En el problema completamente acoplado, M_{qSPJMK} representa 5625 componentes, donde sólo 720 son distintas.

A partir de las ecuaciones (20) y (24) y a través de las ecuaciones (22) y (23) es posible computar las derivadas $U_{PK,q}$. Finalmente mediante la ecuación (21) se obtiene la solución fundamental de tracciones.

3 IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL MEE EN EL AF

3.1 Formulación directa de MEC

Para la formulación directa del MEC, el problema MEE es tratado análogo al problema elástico. La estrategia adoptada por MEC para resolver (15) consiste en discretizar el contorno del problema utilizando n elementos de contorno (Γ_e) definidos por N_e nodos. Ahora, la ecuación (15) puede expresarse como

$$C_{JK}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma_e} T_{JK}(y_0, \xi) u_j d\Gamma = \int_{\Gamma_e} U_{JK}(y_0, \xi) t_j d\Gamma. \quad (29)$$

El cálculo de los valores u_j o t_j en los nodos del contorno, requiere armar un sistema de ecuaciones que surge de considerar todos los nodos del modelo (N_T) como puntos de colocación e integrar sobre los Γ_e elementos en cada caso. Este proceso se realiza para los grados de libertad (*Dof*) de cada nodo, siendo *Dof*=5 para el caso MEE (3 *Dof* del problema elástico, 1 *Dof* del problema eléctrico y 1 *Dof* del problema magnético).

Las integrales de la ecuación (29) se resuelven por integración numérica de Gauss. A través de la parametrización, las coordenadas globales x_i pasan a locales ψ . Dicho cambio de variables puede ser representado como

$$x_i = \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\psi) x_{i(m)}, \quad (30)$$

donde x_i son las coordenadas globales de un punto de la superficie de integración y $N_m(\psi)$ las funciones de interpolación asociadas a los N_e nodos del elemento Γ_e .

El sistema de ecuaciones resultante es de la forma

$$Hu = Gt, \quad (31)$$

siendo u es el vector de desplazamientos nodales extendidos, de longitud $N_T \cdot Dof$, t es el vector que contiene las N_e tracciones nodales de los n elementos, y H y G son las matrices de coeficientes de u y t . Aplicando las condiciones de contorno, se llega al sistema

$$Ax = b \quad (32)$$

En la ecuación (32) la matriz A es cuadrada de dimensión $N_T \cdot Dof$, y los vectores x y b son de longitud $N_T \cdot Dof$. El vector x contiene todas las incógnitas del problema. (Aliabadi & Wrobel, 2002)

3.2 Implementación del MEC usando un AF

Para la implementación del MEC en el “SolverGP” se utilizó la estrategia de ensamble presentada en el trabajo de Dondero et al (2009). La misma consiste en utilizar elementos arquetípicos “i-j” de ensamble. Cada elemento arquetípico de ensamble tiene en cuenta la contribución de pares de elementos i-j (siendo i el elemento que contiene los puntos de colocación y j el elemento de campo) al sistema de ecuaciones del MEC. Esta estrategia requiere que cada nodo esté vinculado a uno de los elementos que compone, definiendo así los puntos de colocación del elemento arquetípico que contribuirán a la matriz global. Por ejemplo, en la Figura 1 los puntos de colocación son los nodos locales 2 y 3 del elemento j y los nodos 2 y 4 del elemento i . Los nodos restantes del elemento j , nodos 1 y 4 serán considerados puntos de colocación al evaluar los elementos vecinos que los comporten.

Finalmente, el modelo discretizado con n elementos tendrá una cantidad de elementos arquetípicos igual a $n + C_N^P$, siendo C_N^P la combinatoria sin repetición con $P = 2$. Luego cada elemento arquetípico podrá contener de cero a ocho puntos de colocación.

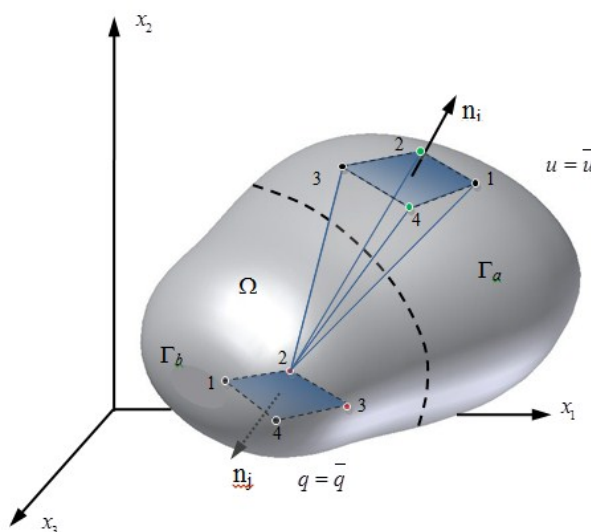


Figura 1: Esquema de un elemento arquetípico

Definiendo los términos

$$f_{JK} = \int_{\Gamma_e} T_{JK}(y_0, \xi(\psi)) N_m(\psi) d\Gamma, \tag{33}$$

$$g_{JK} = \int_{\Gamma_e} U_{JK}(y_0, \xi(\psi)) N_m(\psi) d\Gamma, \tag{34}$$

las contribuciones de los elementos arquetípicos a las matrices según $i \neq j$ o $i = j$ se describen a partir de las ecuaciones (35) y (36) respectivamente:

		Elemento i				Elemento j						
		Nodo1	Nodo2	Nodo3	Nodo4	Nodo1	Nodo2	Nodo3	Nodo4	u _j	t _j	
Elemento i	Nodo1	0	0	0	0	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$
	Nodo2	0	0	0	0	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	
	Nodo3	0	0	0	0	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	
	Nodo4	0	0	0	0	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	
Elemento j	Nodo1	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	0	0	
	Nodo2	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	0	0	
	Nodo3	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	0	0	
	Nodo4	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	0	0	

		Elemento i						
		Nodo1	Nodo2	Nodo3	Nodo4	u _j	t _j	
Elemento i	Nodo1	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{36}$
	Nodo2	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	
	Nodo3	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	
	Nodo4	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	f_{JK}	g_{JK}	

Los elementos arquetípicos usan la información de los elementos de contorno i y j (conectividad de los elementos y coordenadas de los nodos), por lo que las f_{JK} y g_{JK} pueden ser evaluadas. Las matrices elementales contribuyen al sistema de MEC ensamblando sus contribuciones en la matriz global a partir de un ciclo sobre los elementos arquetípicos.

4 IMPLEMENTACIÓN DEL ESQUEMA DE INTERPOLACIÓN PARA LA EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL MEE EN AF

Como se mencionó en la sección 2.1, la evaluación repetida de la solución fundamental presentada en la sección 2, tiene un costo computacional elevado. Una manera eficiente de acelerar la integración de la solución fundamental dentro de la formulación de MEC es a partir del esquema propuesto por Wilson & Cruse (1978). Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones (16) y (22) pueden expresarse a partir de producto entre un término que depende la distancia entre el punto fuente y el punto de colocación, y una función de

modulación que depende de la posición relativa entre ellos pero no de su módulo. A partir de los valores de la función de modulación precalculados en puntos de una grilla es posible obtener el valor de la solución fundamental U_{JK} y sus derivadas $U_{PK,q}$ usando interpolación Lagrangiana. El término de modulación puede expresarse en función de θ_1 y θ_2 como se observa en la Figura 2. Los valores posibles de los ángulos se son $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. El espacio por ellos definidos se puede representar por un área rectangular en el plano θ_1 - θ_2 .

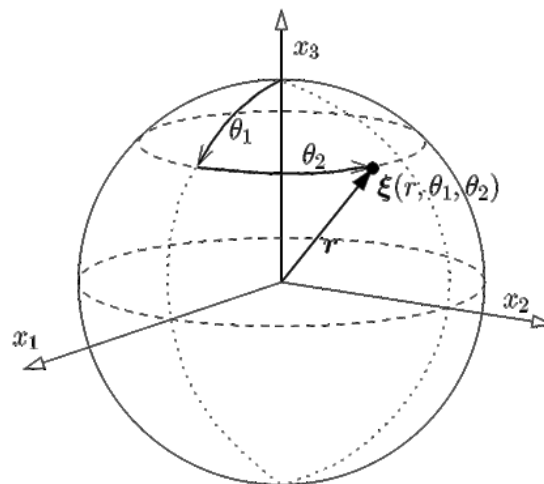


Figura 2: Definición de ángulo polar y azimutal

Como se muestra en la Figura 3, dividimos el área en una grilla rectangular y almacenamos los valores de la función de modulación en los puntos correspondientes al arreglo de la grilla. De esta forma, es posible obtener cualquier valor de dicha función a partir de la interpolación (ver Wilson & Cruse, 1978). Finalmente, los valores de la solución fundamental y sus derivadas son obtenidos multiplicando este término por los factores que contienen las singularidades $1/r$ y $1/r^2$.

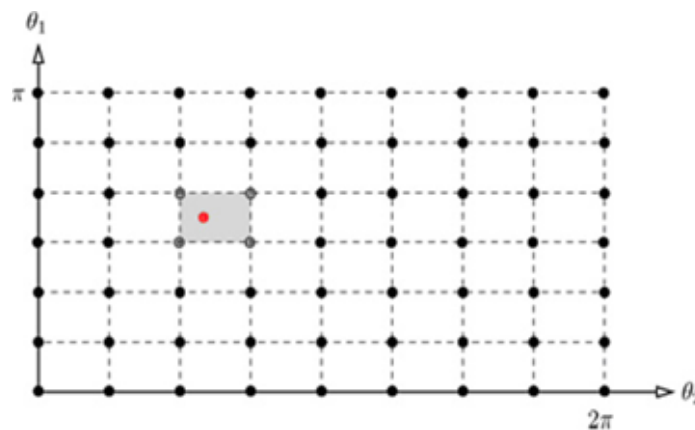


Figura 3: Esquema de la grilla para la interpolación de la solución fundamental

Este esquema fue originalmente presentado con interpolación cúbica (Wilson & Cruse, 1978). El uso de interpolación lineal, aumenta la velocidad en la ejecución pero a costas de un alto costo de almacenamiento para obtener una precisión comparable.

La cantidad de puntos dentro de la grilla dependerá del grado de precisión deseada y del grado de anisotropía, necesitando una mayor cantidad de puntos a medida que la anisotropía

aumenta.

5 EJEMPLOS DE IMPLEMENTACIÓN

Para mostrar el desempeño de la solución fundamental MEE en una implementación de la formulación directa de MEC se muestran tres ejemplos que evalúan distintos acoplamientos a partir de la variación de las condiciones de contorno. Se consideró para los ejemplos un material transversalmente isótropo cuyas propiedades se encuentran en la Tabla 1.

propiedad	componente	valor
constantes elásticas ($\times 10^9$ N/m ²)	C ₁₁₁₁	166
	C ₁₁₂₂	78
	C ₁₁₃₃	162
	C ₃₃₃₃	77
	C ₂₃₂₃	43
constantes piezoelectricas (C/m ²)	e ₃₁₁	-4,4
	e ₃₃₃	18,6
	e ₁₁₃	11,6
constantes piezomagnetic (N/Am)	q ₁₁₃	550
	q ₃₃₃	699,7
	q ₃₂₂	580,3
coeficientes Magneto-electricas(Ns/Am)	λ_{11}	0
	λ_{33}	0
coeficientes de permitividad dieléctrica ($\times 10^{-9}$ C/Vm)	ϵ_{11}	11,2
	ϵ_{33}	12,6
coeficientes de permeabilidad magnética ($\times 10^{-6}$ Ns ² /C ²)	μ_{11}	5
	μ_{33}	10

Tabla 1. Propiedades del material

La geometría es la misma en todos los ejemplos y está representada por un cubo unitario (Figura 4). La discretización se hizo con elementos 3D cuadriláteros lineales, donde cada cara del cubo comprende un elemento, pudiendo, de esta forma alcanzar la solución en coherencia con los estados de carga correspondientes. Los resultados numéricos alcanzados se comparan con la solución analítica obtenida a partir de la ley constitutiva lineal para materiales MEE (Eq. (7)-(9)).

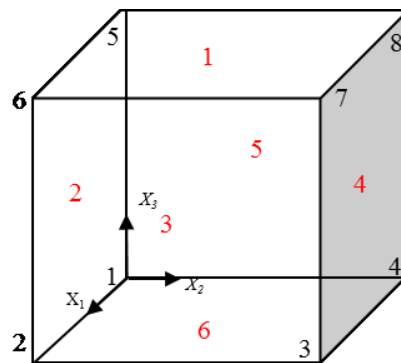


Figura 4: Modelo para la simulación

5.1 Deformación uniaxial

En este problema se verifica el desempeño de la solución fundamental MEE y su implementación mediante el análisis del comportamiento elástico y su efecto piezoeléctrico y piezomagnético directo.

Un cubo unitario (Figura 4) de material transversalmente isótropo (Tabla 1) es sometido a un desplazamiento uniforme, $\bar{u}_1 = 0,001m$ entre los elementos 3 y 5. En las direcciones x_2 y x_3 el cuerpo es libre de deformarse. El cuerpo se encuentra a potencial eléctrico y magnético neutro, $\varphi = 0V$ y $\vartheta = 0A$, por lo que sólo aparecerán desplazamiento eléctrico (B) e inducción magnética (D) como resultado de la carga. La solución analítica según las condiciones de contorno aplicadas se presenta en la Tabla 2,

Solución Analítica	
t_{xx}	1,1633E+08 Pa
u_{yy}	-3,0709E-04 m
u_{zz}	-3,3362E-04 m
D_z	-9,2542E-03 C/m ²
B_z	1,6866E-01 Wb/m ²

Tabla 2: Solución analítica. Ejemplo 1

mientras que los restantes valores son iguales a cero.

Para resolver el ejemplo, se definió el número de puntos de gauss usados en la integración numérica a partir del máximo error admisible en los resultados alcanzados, adoptando para este caso un valor umbral de 0,5%. Teniendo en cuenta las dimensiones del modelo y la discretización empleada, la singularidad en el integrando representa un caso límite desfavorable en los problemas de MEC. Por lo tanto, se analizó T_{11} como magnitud representativa del error global de los resultados, en función de la cantidad de puntos de gauss (ver Figura 5). En función de este análisis el número de puntos de gauss empleados en el esquema de integración es 144 es decir, 12 puntos de gauss por cada dirección.

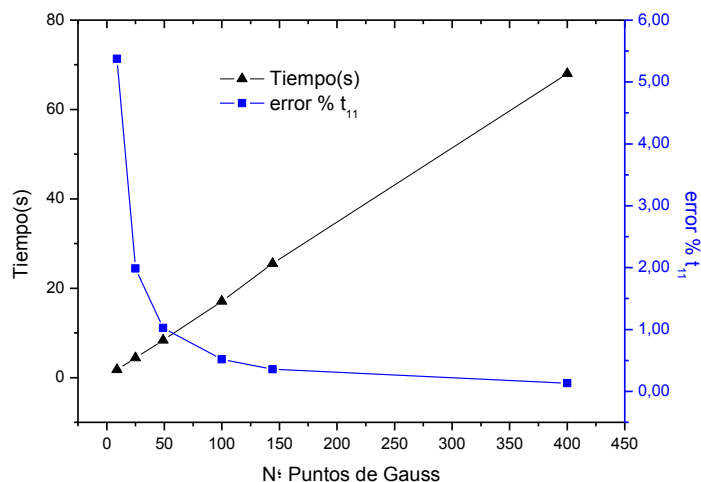


Figura 5: Gráfico de performance vs. puntos de gauss

El resultado de la implementación se comparó con la solución analítica del problema (Tabla 2) en los puntos del contorno. En la Tabla 3 se encuentran los valores tracción (t), desplazamiento eléctrico (D) e inducción magnética (B) en cada elemento, donde se pudo observar una diferencia entre los valores de los nodos de un mismo elemento del orden de 10^{-6} %.

Elemento	$t_x(\text{Pa})$	$t_y(\text{m})$	$t_z(\text{m})$	$D(\text{C/m}^2)$	$B(\text{Wb/m}^2)$
1	0	0	0	-9,2777E-03	1,6870E-01
2	0	-1,2712E+02	0	0	0
3	1,1675E+08	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	-1,1675E+08	0	0	0	0
6	0	0	-5,7744E+01	9,2777E-03	-1,6870E-01

Tabla 3: Resultado de la simulación. Ejemplo 1

Los resultados del modelo muestran el desempeño de la solución implementada en comparación con la solución analítica, alcanzando errores del 0,36% en la variable de referencia T_{11} . También se consideran como error de la implementación las tracciones normales que resultan en los elementos 2 y 6, siendo estas superficies libres de tracciones según el modelo analítico.

5.2 Potencial dieléctrico y magnético

Este segundo ejemplo verifica el desempeño de la solución fundamental y su implementación a través del análisis del comportamiento dieléctrico y magnético y su efecto mecánico directo. El cubo unitario (Figura 4) de material MEE (Tabla 1) está sometido a potencial magnético $\vartheta = 1A$ y eléctrico $\varphi = 100V$ en la dirección x_3 . Todas las caras se encuentran imposibilitadas de moverse en las direcciones normales y las tracciones tangenciales son nulas, apareciendo como consecuencia de los acoplamientos solamente tracciones normales sobre las caras del cubo. La solución analítica de este ejemplo se calculó

a través de las ecuaciones constitutivas del material (ecuaciones (7)-(9)) y los resultados se encuentran en la Tabla 4.

Como en el ejemplo anterior, la cantidad de puntos de gauss en cada integración es 144, es decir 12 por cada dirección, para lograr la precisión deseada.

Solución Analítica	
t_{xx}	5,7590E+04 Pa
t_{yy}	5,7590E+04 Pa
t_{zz}	7,1830E+04 Pa
D_z	-1,2600E-06 C/m ²
B_z	-1,0000E-03 Wb/m ²

Tabla 4: Solución analítica. Ejemplo 2

En la Tabla 5 se encuentran los resultados de la simulación, donde se presentan las tracciones normales sobre todos los elementos (t), el desplazamiento eléctrico (D) y la inducción magnética (B) debido al estado de carga aplicado.

Elemento	t_x (Pa)	t_y (Pa)	t_z (Pa)	D (C/m ²)	B (Wb/m ²)
1	0	0	7,1970E+04	-1,2579E-06	-1,0008E-03
2	0	-5,7813E+04	0	0	0
3	5,7813E+04	0	0	0	0
4	0	5,7813E+04	0	0	0
5	-5,7813E+04	0	0	0	0
6	0	0	-7,1970E+04	1,2579E-06	1,0008E-03

Tabla 5: Resultado de la simulación. Ejemplo 2

Los resultados muestran un buen desempeño de la solución fundamental y la implementación, resultando en todos los casos con errores menores al 0,5% respecto de la solución analítica.

5.3 Potencial eléctrico

El tercer caso permite evaluar la interacción de los campos magnético, eléctrico y mecánico a partir de someter al cubo unitario a un potencial eléctrico en la dirección x_2 , generando un campo magnético (ϑ) en la dirección x_2 y una distorsión en el plano x_2x_3 . Esta distorsión angular provoca en la geometría un desplazamiento de los nodos 4-7 en la dirección x_2 , representado por la magnitud u_y (Tabla 6)

Solución Analítica	
u_y	-1,1207E-08 m
D_z	-1,2500E-06 C/m ²
ϑ	1,2329E+00 A

Tabla 6: Solución analítica. Ejemplo 3

En la Tabla 7 se encuentran los resultados de la simulación para los valores de desplazamiento eléctrico (D). De acuerdo a la condiciones de contorno del problema, estos

valores son constantes sobre los elementos 2 y 4 (ver Figura 4).

Elemento	D(C/m ²)
1	0
2	1,2547E-06
3	0
4	-1,2547E-06
5	0
6	0

Tabla 7: Resultado de la simulación por elementos. Ejemplo 3

Debido a la variación lineal de los desplazamientos u_y en la dirección x_3 y del potencial magnético (ϑ) en la dirección x_2 los resultados de ambos campos se expresan para cada nodo en la Tabla 8.

Nodo	u_y (m)	ϑ (A)
1	0	0
2	0	0
3	0	-1,2273E+00
4	0	-1,2273E+00
5	-1,1172E-08	0
6	-1,1172E-08	0
7	-1,1172E-08	-1,2273E+00
8	-1,1172E-08	-1,2273E+00

Tabla 8: Resultado de la simulación por nodos. Ejemplo 3

Al igual que en los ejemplos anteriores, los errores en los resultados de la simulación se mantuvieron menores al 0,5%.

6 RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ESQUEMA DE INTERPOLACIÓN PARA LA EVALUACIÓN DE LAS SOLUCIONES FUNDAMENTALES U Y T

Se presenta aquí un análisis del desempeño del esquema de interpolación presentado en la sección 4 para la evaluación de la solución fundamental magneto electro elástica. Para ello se consideraron las condiciones de contorno del ejemplo 5.1, tomando como parámetro representativo del error global el valor de la tracción normal T_{11} . Para la discretización se usaron 4 elementos por cara, por lo que el modelo está comprendido por 24 elementos cuadráticos lineales y un total de 26 nodos. Al igual que en los ejemplos de la sección 5, la cantidad de puntos de gauss para la integración es 144, es decir, 12 puntos de gauss por dirección.

Se calculó, para el modelo propuesto, el tiempo de cálculo de coeficientes de las matrices del sistema de MEC y el tiempo de ensamble utilizando el esquema de interpolación, y se comparó con el obtenido mediante la resolución del problema de autovalores y autovectores en cada punto de gauss. Los resultados mostraron una disminución del tiempo de 376 segundos a 3,57 segundos, lo que equivale un aceleración de aproximadamente 105x.

Se estudió la influencia del tamaño de la grilla sobre los resultados del modelo. Para esto,

la grilla se consideró homogénea en todo el plano $\theta_1-\theta_2$ y en ambas coordenadas el ángulo entre los puntos fue la misma. El ángulo entre los puntos fue tomado como parámetro representativo del tamaño de la misma, por lo que una disminución de la grilla es equivalente a aumentar la cantidad de puntos en ella.

Los resultados obtenidos se compararon con la solución analítica del problema, mostrando en la Figura 6 el error para distintos tamaños del paso de la grilla. En función de alcanzar resultados con un error menor al 0,2%, el tamaño de paso adoptado fue $3,5^\circ$.

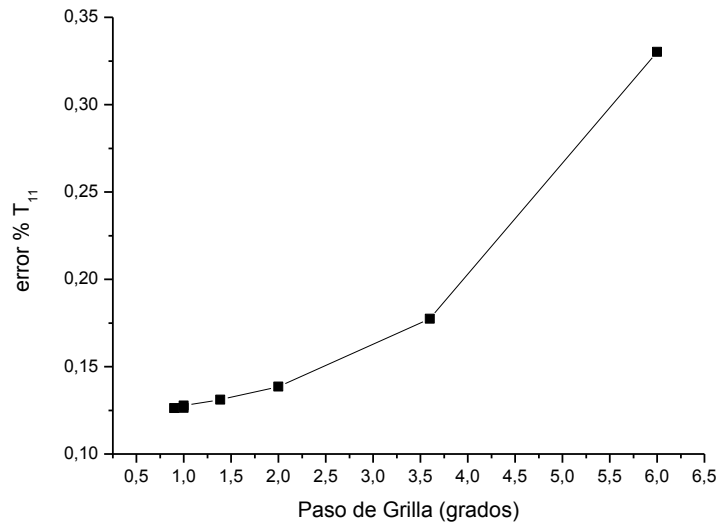


Figura 6: Gráfico error % de la solución vs. paso de grilla

7 CONCLUSIONES

Se implementó por primera vez la solución fundamental magneto electro elástica en una formulación directa del MEC. Dicha implementación se realizó en el Application Framework “SolverGP” desarrollado íntegramente en la Universidad Nacional de Mar del Plata, extendiendo la funcionalidad del programa para la resolución de problemas 3D.

La simulación de materiales MEE mediante el MEC evaluando de manera directa y repetida la solución fundamental tiene involucrado un alto costo computacional, lo que hace impracticable la resolución de modelos con geometrías complejas. Esta limitación se resolvió mediante la implementación del esquema de interpolación, el cual permite evaluar rápidamente la solución fundamental a partir de una grilla precalculada, obteniendo la precisión deseada en función del paso de la grilla.

Se obtuvieron resultados con errores menores al 0,5% usando 144 puntos de gauss por elemento y grillas homogéneas con un ángulo entre puntos de la grilla de $3,5^\circ$. Esto permitió una aceleración de 105x en el tiempo de cálculo y ensamble de las matrices del MEC.

REFERENCIAS

- Aliabadi, M.H. & Wrobel, L.C., 2002. *The Boundary Element Method* Wiley, ed., Chichister, UK.
- Alshits, V.I., Darinskii, A.N. & Lothe, J., 1992. On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties. *Wave Motion*, 16(3), pp.265–283.

- Barnett, D.M. & Lothe, J., 1975. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators. *physica status solidi (b)*, 67(1), pp.105–111.
- Buroni, F.C. & Saez, A., 2009. Three-dimensional Green's function and its derivative for materials with general anisotropic magneto-electro-elastic coupling. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2114), pp.515–537.
- Dondero, M. et al., 2009. Sparse BEM implementation using an application frameworks for discrete methods. *Mecánica Computacional*, XXVIII, pp.217–226.
- Soh, A.K., 2005. On the Constitutive Equations of Magnetoelastic Solids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(7-8), pp.597–602.
- Ting, T.C.T., 1996. *Anisotropic Elasticity* Oxford University Press, ed., Oxford, UK.
- Urquiza, S. & Venere, M., 2002. An application framework architecture for FEM and other related solvers. In *Mecánica Computacional*. pp. 3099–3109.
- Wilson, R.B. & Cruse, T.A., 1978. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(9), pp.1383–1397.