

## UN NUEVO MODELO CONTINUO-DISCRETO PARA EL ESTUDIO DEL TRÁFICO URBANO CON AUTOPISTAS.

Patricia N. Dominguez<sup>a</sup>, Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur. Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

<sup>b</sup> *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

<sup>c</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, (CONICET), Argentina*

**Palabras clave:** Difusión Anisótropa no lineal, Asignación de Tráfico, Modelo Continuo-Discreto.

**Resumen.** La modelación del tráfico urbano, que permite predecir el flujo vehicular en cada tramo de la red de transporte y el tiempo de viaje entre puntos de la ciudad, se ha realizado tradicionalmente, según un enfoque discreto, a partir del conocimiento de las características de la red y de la cantidad esperada de viajes entre distintos puntos. Este enfoque brinda información detallada del sistema y lleva a un problema de optimización en gran escala. Un enfoque diferente y menos estudiado es la formulación continua, basada en la idea fundamental de que la variación de las características del tráfico en áreas cercanas es pequeña cuando se la compara a las diferencias del sistema entero y de esta manera se pueden utilizar funciones continuas para representar las características de la red tales como el costo de viaje y el flujo vehicular.

En una gran ciudad, la circulación vehicular se realiza por dos tipos de arterias bien definidas, las autopistas y las calles comunes. Las autopistas se caracterizan por tener largos tramos de vías de circulación en sentidos contrarios separadas, ausencia de cruces a nivel y accesos espaciados y especialmente diseñados. Estas características facilitan la circulación de vehículos a altas velocidades. Por el contrario, las calles comunes, permiten rápidos cambios de dirección y sentido, y los vehículos que circulan por ellas deben variar constantemente su velocidad por la presencia de cruces con otras arterias, pasos a nivel y circulación peatonal.

Basado en este diferente comportamiento del tráfico de acuerdo al tipo de arteria, se presenta un enfoque combinado continuo-discreto. Se asume que los usuarios de la red de transporte se encuentran distribuidos en la ciudad y pueden optar por viajar hacia su destino a través de la red de calles o acceder a las autopistas en determinados puntos de la ciudad, de acuerdo a un criterio de costo mínimo de viaje. Se utiliza un nuevo enfoque continuo que conduce a ecuaciones diferenciales de difusión anisótropa no lineal para modelar las calles de la ciudad y un enfoque discreto que lleva a un conjunto de ecuaciones algebraicas de continuidad para modelar las autopistas. Ambos sistemas interactúan en los puntos de acceso a las autopistas. El modelo se resuelve por el método de elementos finitos.

## 1 INTRODUCCIÓN

La congestión del tráfico urbano es un aspecto preocupante para los habitantes de las grandes ciudades. El tráfico urbano es la principal fuente de contaminación tanto acústica como atmosférica, y la congestión aumenta los niveles de contaminación, además de provocar incrementos considerables en los tiempos de viaje, que son causa de incomodidad y estrés en los conductores. Las ciudades, en constante crecimiento, requieren modificaciones periódicas de la red de transporte. Poder predecir las consecuencias de los cambios que se planea introducir en una red antes de ejecutarlos es fundamental para los diseñadores de dicha red. Para tal fin se utilizan modelos matemáticos capaces de proporcionar los valores de los flujos vehiculares esperados en cada tramo de la red y los tiempos de viaje entre distintos puntos de la ciudad a partir de una matriz de viajes origen-destino y de las características viales. Este problema denominado de “asignación de viajes” se puede resolver mediante un programa de optimización equivalente. En este enfoque la red de transporte se modela como un conjunto discreto de nodos (intersecciones de rutas y puntos de origen y/o destino de viajes) y arcos (tramos de calles entre nodos). Una exposición detallada de esta formulación discreta, tanto para problemas de asignación, como para problemas de distribución-modo-asignación y algoritmos de resolución del problema pueden encontrarse en [Sheffi \(1984\)](#). Éste y enfoques similares han sido ampliamente utilizados por diferentes autores en los problemas de diseño y gestión de redes de transporte ([Poorzahedy y Rouhani, 2007](#); [Ying et al. 2007](#), [Chiou, 2009](#), [Dominguez et al. 2009](#)). La ventaja fundamental del enfoque discreto es que permite una representación muy detallada de la red y por lo tanto, el mismo detalle se obtiene en la determinación del flujo vehicular y del tiempo de recorrido de los tramos. Esta misma ventaja se convierte en una desventaja cuando las redes son muy grandes, ya que tanto el incremento de nodos y arcos, como el de puntos de origen y destino aumentan exponencialmente el tiempo de cálculo.

Un enfoque diferente y menos explorado es la formulación continua, donde la idea fundamental es que la variación de las características del tráfico en áreas cercanas es pequeña cuando se la compara a las diferencias del sistema entero y de esta manera se pueden utilizar funciones continuas para representar las características de la red tales como el costo de viaje y el flujo vehicular. El enfoque continuo tiene algunas ventajas en redes densas ([Sasaki et al. 1990](#)) ya que requiere menor cantidad de información. En principio puede aplicarse sin la necesidad de una construcción detallada del grafo de la red, utiliza menos recursos computacionales y aún así, puede brindar una visión rápida del impacto que se produce ante un cambio en la red. Existen diferentes estudios basados en este enfoque tanto para resolver problemas de asignación, como problemas combinados de distribución-asignación ([Wong y Sun, 2001](#); [Ho et al. 2006](#); [Cortínez y Dominguez, 2009](#); [Dominguez y Cortínez, 2009](#)). Una detallada reseña de la literatura y las posibilidades de aplicación se puede ver en [Ho y Wong \(2006\)](#). En todos los trabajos mencionados que usan la formulación continua, el modelo es isótropo, es decir que asume que las características de las calles y las condiciones de circulación son independientes de la dirección considerada. Asimismo, hacen uso de funciones que expresan los tiempos de recorrido por unidad de longitud (si bien relacionadas con las características de las vías de circulación tales como la capacidad y la velocidad a flujo libre) sin detallar cómo pueden obtenerse experimentalmente. De hecho, no están explícitamente vinculadas a las funciones de tiempos de recorrido de arco usadas habitualmente en el enfoque discreto. Una tercera cuestión no especificada en dichos modelos es cómo determinar el flujo y el tiempo de recorrido en cada calle a partir de los resultados

obtenidos sobre el dominio espacial. Es decir que solo permiten la determinación de flujos promediados por zonas.

En este trabajo se utiliza un modelo continuo diferente, desarrollado a partir del enfoque discreto, que considera la anisotropía de la red (diferentes particularidades de circulación de acuerdo a la dirección) y tiene una precisión comparable a la de dicho enfoque. Una característica importante del modelo presentado es que permite, una vez resuelto, obtener los flujos en cada calle y los tiempos de recorrido de los mismos (Cortínez y Domínguez, 2010).

En una gran ciudad, coexisten dos tipos de arterias bien definidas, las autopistas y las calles comunes. Las autopistas se caracterizan por tener vías de circulación en sentidos contrarios separadas, ausencia de cruces a nivel y accesos espaciados y especialmente diseñados. Estas características facilitan la circulación de vehículos a altas velocidades. Por el contrario, las calles comunes, permiten rápidos cambios de dirección y sentido, y los vehículos que circulan por ellas deben variar constantemente su velocidad por la presencia de cruces con otras arterias, pasos a nivel y circulación peatonal.

Basado en este diferente comportamiento del tráfico de acuerdo al tipo de arteria, el objetivo del presente trabajo es presentar un enfoque combinado continuo-discreto donde las autopistas se modelan mediante un enfoque discreto y las calles comunes mediante el enfoque continuo ya mencionado, interactuando ambos sistemas en los puntos de acceso a las autopistas. El modelo continuo conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de difusión anisótropa no lineal y el discreto a un conjunto de ecuaciones algebraicas de continuidad. Ambos sistemas se resuelven simultáneamente por el método de elementos finitos. Tal enfoque se implementa en el software FlexPDE. Un enfoque similar continuo-discreto fue utilizado por los autores con anterioridad (Domínguez y Cortínez, 2011), pero en ese caso, la resolución se efectuó por un método iterativo, resolviendo el problema continuo de la forma antes mencionada y el problema discreto con el tradicional método de Frank-Wolfe (Frank y Wolfe, 1956) en ambiente Matlab.

En el apartado 2 se expone el modelo continuo-discreto, en el 3 se detalla la resolución computacional del modelo propuesto, en el punto 4 se presenta un ejemplo de aplicación y finalmente en el apartado 5 se exponen las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

## 2 MODELO CONTINUO-DISCRETO

El modelo consiste básicamente en la utilización de un modelo continuo para representar el tráfico en las calles de la ciudad y un modelo discreto para estudiar el tráfico en las autopistas. Ambos modelos interactúan en los puntos de acceso a las autopistas. En estos puntos, los usuarios pueden optar por realizar sus viajes a través de las calles de la ciudad o acceder a las autopistas, siempre de acuerdo a un criterio de mínimo tiempo de viaje o primer principio de Wardrop (1952). Cuando el sistema está en equilibrio, este costo por cualquiera de las rutas es el mismo (el mínimo). El modelo continuo fue desarrollado con anterioridad por los autores (Cortínez y Domínguez, 2010), por lo cual se exponen a continuación brevemente los conceptos fundamentales, introduciéndose luego la modificación para considerar los puntos de acceso a las autopistas.

En el problema discreto tradicional la red de transporte se representa por un conjunto de nodos y arcos dirigidos  $G(N, A)$ , donde los nodos representan las intersecciones de arterias y puntos de origen y destino de viajes y los arcos los tramos de calles entre dichos nodos. Los arcos tienen asociadas funciones de costo que usualmente representan el tiempo requerido para recorrerlos, aunque pueden representar un costo monetario. Éstas son funciones crecientes del flujo en el arco  $t_a = t_a(x_a)$  que tienen un valor mínimo denominado tiempo a

flujo libre  $t_{a_0}$  que corresponde al tiempo requerido para recorrer el arco cuando no existe congestión y que se calcula como la longitud del arco sobre la velocidad máxima permitida. La existencia de tal función es verificada experimentalmente, y su expresión empírica depende de varios parámetros que consideran características específicas del arco, tales como el tipo de calle, la cantidad de carriles, la pendiente, tipo de semaforización, capacidad máxima, etc.

El problema conocido como “asignación de viajes”, consiste en obtener las rutas seguidas por los usuarios desde sus puntos de origen hacia sus destinos, conociendo la cantidad de viajes entre tales pares origen-destino, así como las características de la red de transporte. En otras palabras, la solución de tal problema permite determinar los flujos horarios en cada arco de la red y los tiempos de viaje. Para completar la formulación discreta, se acepta que la elección de rutas por parte de los viajeros se realiza de acuerdo al primer principio de [Wardrop \(1952\)](#), según el cual los usuarios eligen las rutas de tiempo mínimo (o, más generalmente, de costo mínimo). Como ha demostrado [Beckmann \(1956\)](#), este problema, denominado de “equilibrio de usuario”, puede ser formulado mediante un problema de optimización, sujeto a restricciones donde las incógnitas del problema son los flujos en los arcos. En correspondencia con este problema se puede formular asimismo un problema dual que maximiza una función objetivo  $\omega$  que depende de una función potencial de costo  $u$  que representa el tiempo de viaje desde un determinado punto de la ciudad hasta un punto de destino  $s$ . El tiempo de recorrido, medido por los usuarios, correspondiente al arco  $a$  dirigido desde el nodo  $i$  hacia el nodo  $j$  ([Figura 1](#)), puede expresarse en la forma

$$t_a^s = u_i^s - u_j^s \quad (1)$$

Luego, el problema dual del “equilibrio de usuario” puede ser expresado en la forma ([Sasaki et al. 1990](#), [Robusté et al. 1990](#))

$$\max \omega(u) = \sum_r \sum_s u_r^s Q_r^s - \sum_a \int_{t_{a_0}}^{t_a} t_a^{-1}(z) dz \quad (2a)$$

s.a.

$$u_j^s + t_a^s \geq u_i^s \quad \forall i, j, s, a \quad (2b)$$

$$t_a^s \geq t_{a_0}^s \quad \forall a \quad (2c)$$

donde  $Q_r^s$  es la cantidad de viajes entre puntos de origen  $r$  y de destino  $s$ ,  $t_a^{-1}$  es la inversa de la función de costo de viaje en el arco y los extremos de la integral  $t_a$  y  $t_{a_0}$  representan el tiempo de recorrido y el tiempo de recorrido a flujo libre del arco  $a$  respectivamente. La restricción (2b) debe cumplirse para todo valor admisible de  $u_i^s$  aunque la relación de igualdad solo se verificará para la solución del problema, es decir, para los valores que minimicen (2a). La restricción (2c) asegura que el tiempo de viaje en el arco  $a$  sea mayor o igual al correspondiente a la velocidad máxima de circulación.

Se adopta como función de costo de viaje en el arco  $a$ , una de las más utilizadas, la propuesta en el Manual de Asignación de Tráfico de la [U.S. Bureau of Public Roads \(1964\)](#), conocida como función BPR:  $t_a = t_{a_0} \left(1 + \alpha_a (x_a / C_a)^{\varphi_a}\right)$ . En esta función  $C_a$  representa la capacidad del arco, medida en vehículos por hora,  $\alpha_a$  y  $\varphi_a$  son coeficientes que tienen en cuenta las características específicas de la arteria considerada y  $x_a$  es el flujo en el arco. Para cada punto de destino  $s$  esta función puede reescribirse de la siguiente manera:

$$t_a^s = t_{a_0}^s \left( 1 + \frac{\alpha_a}{C_a^{\phi_a}} \left( x_a^s + \left( \sum_{i \neq s} x_a^i + x_{Ra} \right) \right) \right)^{\phi_a} \quad (3)$$

En la expresión (3) el flujo total en el arco, se considera como la superposición de dos términos, uno que describe el flujo de usuarios  $x_a^s$  que viajan hacia el centro  $s$  y que se comportan según el primer principio de Wardrop (1952), y otro que describe flujos residuales  $x_{Ra}$  (tales como los correspondientes a transporte público) que no cumplen tal principio y flujos hacia otros centros. Tal agrupación facilita la resolución iterativa por centros, considerando en cada paso solo como flujos activos los correspondientes al centro que se analiza, tal como se explica en el apartado 3.

Para desarrollar el modelo continuo, se considera la ciudad como una región  $\Omega$  delimitada por un borde exterior  $\Gamma_0$  a través del cual no ingresan ni egresan vehículos (Figura 1) o donde se conoce el flujo vehicular.

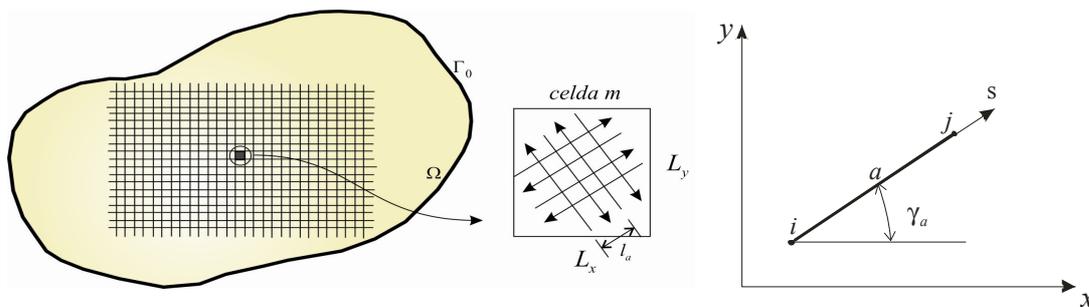


Figura 1: Discretización de la ciudad, sistema de calles en las celdas y tramo de calle entre nodos con dirección y sentido de circulación.

Se divide el dominio completo de la ciudad  $\Omega$  en  $M$  celdas de área  $L_x L_y$ , donde las longitudes  $L_x$  y  $L_y$  son pequeñas con respecto a las dimensiones de la ciudad. Se supone que en el área que se examina existe un sistema de calles paralelas de tal manera que para cada calle en una dirección y sentido, existe otra en igual dirección y sentido contrario. De esta manera, los arcos que se suman en la expresión (2a) corresponden a la mitad de los arcos y las longitudes  $l_a$  de los tramos a tener en cuenta serán las distancias entre dos calles de igual dirección y sentido. Se considera que el sentido de circulación en el arco  $a$ , en la dirección “s”, que forma un ángulo  $\gamma_a$  con el eje  $x$ , es desde el nodo  $i$  hacia el nodo  $j$  de acuerdo a la Figura 1.

El tiempo mínimo de recorrido del arco hacia el centro  $s$  se puede expresar como  $t_a^s = u_i^s - u_j^s$  y esta diferencia de potencial entre los dos nodos del arco puede aproximarse mediante:

$$t_a^s = \Delta u^s \approx -\frac{\partial u^s}{\partial s} l_a = -l_a \left( \frac{\partial u^s}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial u^s}{\partial y} \text{sen} \gamma \right) \quad (4)$$

Se asume implícitamente que  $u$  puede representarse como una función continua bidimensional que adopta los valores adecuados en cada uno de los nodos a los cuales se los

identifica por sus coordenadas cartesianas  $(x,y)$ . En consecuencia  $u^s(x,y)$  representa el tiempo de viaje desde el nodo ubicado en  $(x,y)$  hasta el destino  $s$ .

Invirtiéndolo la expresión (3) se puede obtener el flujo en el arco  $a$  que se dirige hacia el centro  $s$ :

$$x_a^s = \left( \frac{t_a^s - t_{a_0}}{t_{a_0}} \frac{C_a^{\varphi_a}}{\alpha_a} \right)^{\frac{1}{\varphi_a}} - \left( \sum_{i \neq s} x_a^i + x_{Ra} \right) \tag{5}$$

Aplicando cálculo variacional sobre la formulación (2a), tomando el límite, cuando el área  $L_x L_y$  tiende a un diferencial de área  $d\Omega$  y asumiendo la demanda de viajes distribuida continuamente en el área:  $q^s$  (número de viajes por unidad de área hacia el centro  $s$ ), se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que rigen el problema considerado:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x^s \frac{\partial u^s}{\partial x} + k_{xy}^s \frac{\partial u^s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{xy}^s \frac{\partial u^s}{\partial x} + k_y^s \frac{\partial u^s}{\partial y} \right) + q^s = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega, \quad s = 1, 2, \dots, S \tag{6}$$

donde:

$$\begin{aligned} k_x^s &= \sum_{a \in m} p_a^s(t_a^s) \frac{l_a^2 \cos^2 \gamma_a}{L_x L_y} & k_y^s &= \sum_{a \in m} p_a^s(t_a^s) \frac{l_a^2 \sin^2 \gamma_a}{L_x L_y} \\ k_{xy}^s &= \sum_{a \in m} p_a^s(t_a^s) \frac{l_a^2 \cos \gamma_a \sin \gamma_a}{L_x L_y} & p_a^s &= \frac{x_a^s}{t_a^s} \end{aligned} \tag{7}$$

En esta última expresión  $x_a^s$  viene dada por (5) y  $t_a^s$  por (4). Obviamente una vez resuelto el problema se verifica que  $t_a = t_a^s \quad \forall s$ .

La condición a cumplir en el borde de la ciudad es:

$$f_x^s n_x + f_y^s n_y = 0 \quad \forall (x,y) \in \Gamma_0 \quad s = 1, 2, \dots, S \tag{8}$$

donde

$$f_x^s = - \left( k_x^s \frac{\partial u^s}{\partial x} + k_{xy}^s \frac{\partial u^s}{\partial y} \right) \quad f_y^s = - \left( k_{xy}^s \frac{\partial u^s}{\partial x} + k_y^s \frac{\partial u^s}{\partial y} \right) \tag{9}$$

mientras que  $n_x, n_y$  son las componentes del vector normal a la curva que define el contorno de la misma. Por otro lado, en el punto de destino  $(x_s, y_s)$ , el tiempo de viaje debe ser nulo, y entonces,

$$u^s(x_s, y_s) = 0 \tag{10}$$

Si este sistema continuo se acopla a un sistema discreto que modela las autopistas, en cada  $r$ -ésimo punto de interacción, el acceso a la autopista actúa como un “sumidero” para el sistema continuo y entonces, la ecuación diferencial se modifica de la siguiente manera:

$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x^s \frac{\partial u^s}{\partial x} + k_{xy}^s \frac{\partial u^s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{xy}^s \frac{\partial u^s}{\partial x} + k_y^s \frac{\partial u^s}{\partial y} \right) + q^s - \sum_{r=1}^N Q_r^s \delta(x - x_r^s) = 0$	$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \Omega & \tag{11} \\ \forall r \in R \quad s = 1, 2, \dots, S & \end{aligned}$
--	---

donde  $\delta(x - x_r^s)$  es la distribución delta de Dirac y  $Q_r^s$  la cantidad de viajes que, en el acceso  $r$  ingresan a la autopista con destino  $s$ .  $R$  es el conjunto de puntos de acceso a las autopistas.

Para el estudio del tráfico en las autopistas se parte de la misma formulación dual (2) aplicada a los tramos de las autopistas. Llamamos  $l$  a los arcos correspondientes a dichos tramos entre los nodos  $I$  y  $J$ , siendo  $t_l$  el tiempo de recorrido desde el nodo  $I$  hasta el nodo  $J$ . Aplicando cálculo variacional se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \sum_r \sum_s \delta U_r^s Q_r^s - \sum_l \delta \int_{t_0}^{t_l} t_a^{-1}(z) dz = \sum_r \sum_s \delta U_r^s Q_r^s - \sum_l \delta \int_{t_0}^{t_l} x_l(z) dz \\ \delta\omega &= \sum_r \sum_s \delta U_r^s Q_r^s - \sum_l x_l(t_l) \delta t_l \end{aligned} \tag{12}$$

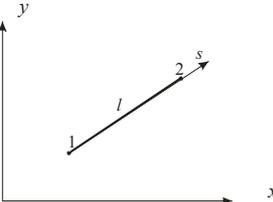
Llamando  $p_l = x_l(t_l)/t_l$  y asumiendo que en todos los nodos de la red discreta pueden ingresar vehículos ( $r=I$ ), para cada destino  $s$ ,

$$\delta\omega = \sum_I \delta U_I Q_I - \sum_I p_I (U_I - U_J) \delta (U_I - U_J) \tag{13}$$

Esto puede expresarse en forma general como:

$$\delta\omega = \sum_I \delta U_I Q_I - \sum_I \sum_J \left( \sum_l \bar{K}_{IJ}^l U_J \right) \delta U_I \tag{14}$$

donde  $\bar{K}_{IJ}^l = \begin{cases} p_l & \text{si } l_1=I \text{ y } l_2=J \\ -p_l & \text{si } l_1=J \text{ y } l_2=I \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$



En un punto estacionario  $\delta\omega = 0$ , y por lo tanto:

$$Q_I = \sum_J K_{IJ} U_J \tag{15}$$

donde  $K_{IJ} = \sum_l \bar{K}_{IJ}^l$

Cuando la red está en equilibrio, el tiempo mínimo de viaje desde cualquier punto de la ciudad hacia cada destino  $s$  es único, entonces, particularmente, en los puntos de acceso a las autopistas el tiempo de viaje a través de las mismas o por las calles comunes que forman el sistema continuo es el mismo y en consecuencia se debe cumplir:

$$U_I = u(x_I, y_I) \tag{16}$$

En los puntos que no se generan viajes (puntos de paso), igualmente se debe cumplir la ecuación (15), siendo  $Q_I = 0$ . En este caso,  $U_I$  es independiente del sistema continuo, es decir no cumple la condición (16).

En definitiva, el problema continuo-discreto consiste en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (11) con sus correspondientes condiciones de borde (8), (9), (10), conjuntamente con el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$Q_I^s = \sum_J K_{IJ}^s U_J^s \quad \forall I \in R, s = 1, 2, \dots, S \quad (17)$$

### 3 SOLUCIÓN COMPUTACIONAL MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El sistema gobernante de ecuaciones diferenciales (11) con sus correspondientes condiciones de contorno y el sistema de ecuaciones algebraicas (17) pueden ser resueltos por varios enfoques numéricos apropiados. En este trabajo se hace uso del método de elementos finitos a través del software comercial FlexPDE.

En tal programa el problema se define a través de la escritura de las ecuaciones diferenciales gobernantes y de sus correspondientes condiciones de contorno en un archivo de textos denominado descriptor utilizando una notación muy sencilla, similar a la usada comúnmente en matemática.

Internamente, dicho programa se encarga de obtener las correspondientes ecuaciones variacionales, a través de un proceso tipo Galerkin, así como de la correspondiente discretización efectuando un mallado automático. Además posee varias estrategias que el usuario puede seleccionar para la resolución de problemas no lineales de contorno y/o de valores iniciales.

Entonces, para este problema, el descriptor deberá contener las definiciones de las características de la red tales como velocidad de circulación, capacidad de las calles, orientación, etc. y las expresiones de los coeficientes de difusión (7), como así también las ecuaciones algebraicas de continuidad (17) para todos los nodos de la red discreta.

A partir de estos datos pueden implementarse las ecuaciones (11). Asimismo debe definirse la geometría, las correspondientes condiciones de borde, y las particularidades del post-proceso deseado.

Por otra parte deben seleccionarse las alternativas algorítmicas adecuadas. En este trabajo se resuelven inicialmente las correspondientes ecuaciones para valores constantes de los coeficientes de difusión, asumiendo congestión despreciable. Para el caso de un solo centro, a partir de esta solución inicial, el problema se puede resolver aplicando el método de Newton-Raphson. En el caso de dos o más centros, como el ejemplo que se muestra en el apartado 5, se implementa un procedimiento iterativo en el cual se trabaja sobre un centro y se mantienen constantes los valores de los flujos correspondientes a los otros centros, alternándose el centro activo, cada vez. Para evitar singularidades, los puntos de acceso se definen como áreas pequeñas.

Una vez resuelto el problema se reportan directamente los valores de tiempo de recorrido de cada arco y flujo en el mismo, tanto de los tramos de autopistas como de las calles comunes.

### 4 VALIDACIÓN DEL MODELO

El modelo continuo fue validado por los autores con anterioridad (Cortínez y Domínguez, 2010). En este punto se compara el nuevo enfoque continuo-discreto con el utilizado anteriormente por los autores (Domínguez y Cortínez, 2011) donde la solución del problema continuo se realizó con el mencionado enfoque y el discreto fue resuelto con el conocido

método de Frank-Wolfe (Frank y Wolfe, 1956), utilizando en método iterativo hasta lograr el equilibrio en los puntos de acceso (igual tiempo de viaje por las autopistas o las calles). En ese caso, la solución del problema continuo proporciona la demanda en los puntos de acceso a las autopistas (matriz origen-destino) del problema discreto y a su vez, la solución del problema discreto proporciona las condiciones de borde en los puntos de acceso del problema continuo.

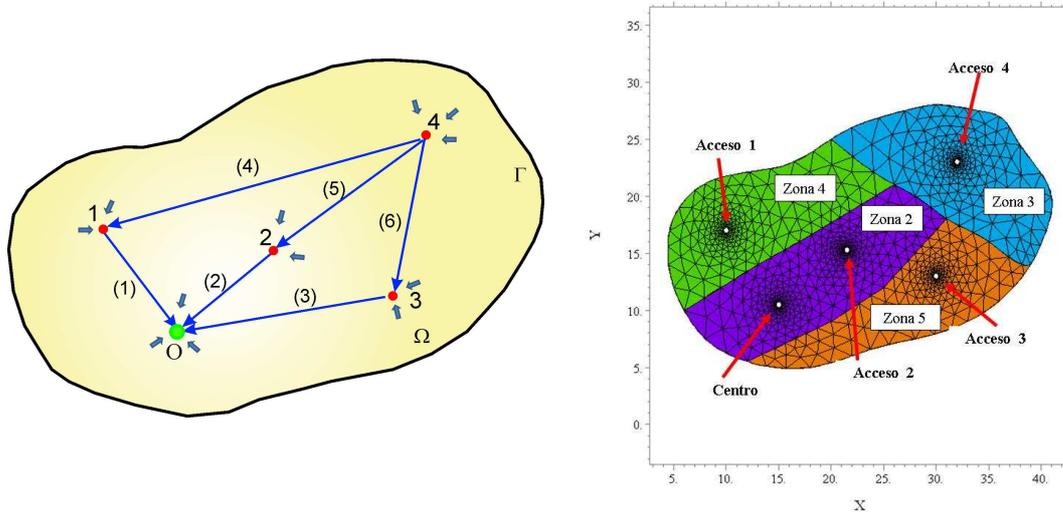


Figura 2: Esquema de la red de autopistas y zonas de la ciudad.

Se modela una ciudad como la mostrada en la Figura 2, donde todos los viajes se dirigen al centro O. Las cantidades de viajes generados en las diferentes zonas por kilómetro cuadrado y por hora son:  $q_2 = 100$ ,  $q_3 = 80$ ,  $q_4 = 130$ ,  $q_5 = 70$ . En el sistema discreto (autopistas) se adopta como función de tiempo de viaje  $t_l = t_{l_0} (1 + 0,85(x_l / C_l)^5)$  y en las calles del sistema continuo  $t_a = t_{a_0} (1 + 0,15(x_a / C_a)^4)$ . Los tiempos a flujo libre se calculan para una velocidad máxima en autopistas de 100 km/h y en las calles de 60 km/h. Las capacidades de los tramos 1, 2 y 3 se fijan en 10000 veh/h, las de los tramos 4, 5 y 6, en 6000 veh/h y las de las calles en 600 veh/h. Los valores adoptados no corresponden a un caso real pero son razonables para el tamaño de la ciudad propuesta. Las funciones de tiempo de viaje son las utilizadas habitualmente en la literatura y están basadas en el Manual de Capacidad de Carreteras (Transportation Research Board). Las calles forman  $0^\circ$  y  $90^\circ$  con respecto a los ejes coordenados y la longitud de las mismas entre intersecciones es de 100 metros. En la determinación de los coeficientes  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_{xy}$ , se suman 16 tramos de calles en cada dirección en cada celda.

En las Figuras 3 y 4 se puede apreciar la muy buena correspondencia entre ambos métodos. La ventaja del nuevo enfoque propuesto es la posibilidad de solución conjunta utilizando un solo software. El tiempo de resolución con el nuevo enfoque es de 26 segundos y con el enfoque anterior 2,4 minutos.

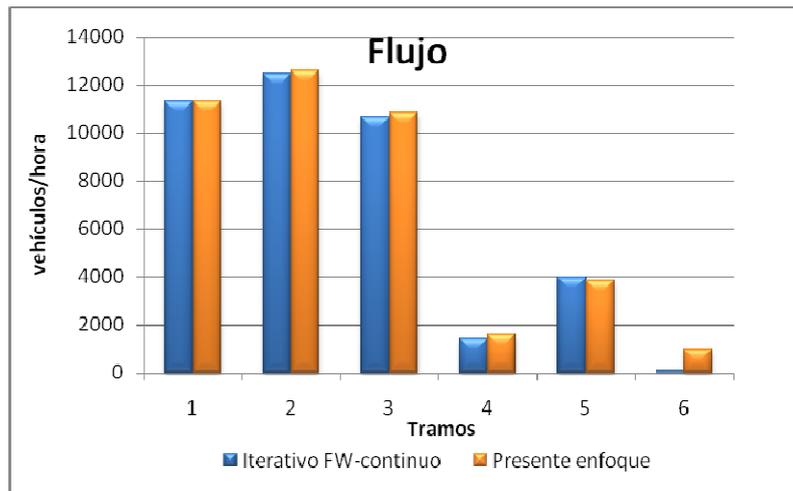


Figura 3: flujo en los tramos de las autopistas.

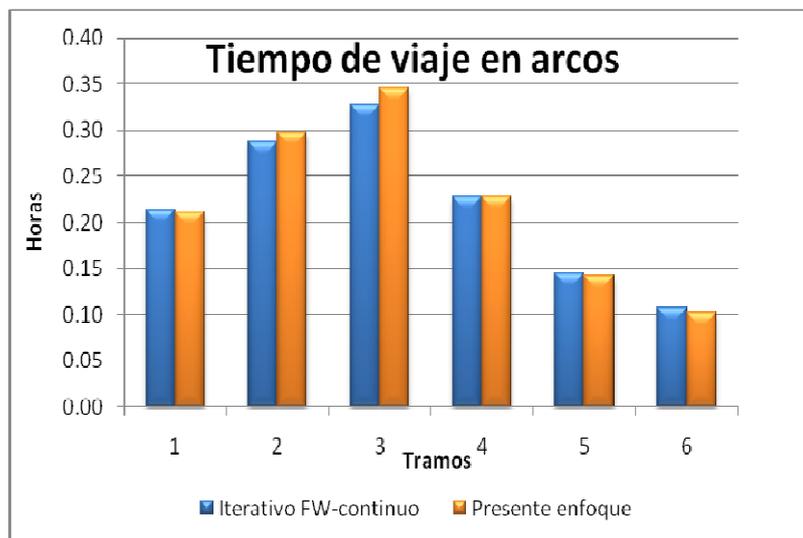


Figura 4: Tiempo de recorrido de los tramos de las autopistas.

## 5 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se presenta una ciudad en determinada hora pico donde el tráfico originado en los hogares (distribuidos de manera uniforme en la superficie) se dirige hacia dos centros, 10 y 4 (Figura 5). La demanda de viajes hacia el centro 10 es de 80 viajes/hora/km<sup>2</sup> y hacia el centro 4 de 40 viajes/hora/km<sup>2</sup>. La capacidad de las calles comunes es de 600 vehículos/hora y se adopta una velocidad máxima de circulación en las mismas de 60 km/h. En las autopistas, la velocidad máxima se fija en 120 km/h, la capacidad de los tramos 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15 y 17 en 3500 veh/h y en el resto de los tramos en 6000 veh/h. Para el cálculo en el sistema continuo se adoptan celdas de 0,8x0,8 km<sup>2</sup>, con una separación de 200 m entre calles de igual dirección y sentido de circulación. Las calles forman 0° y 90° con respecto a los ejes coordenados. En la determinación de los coeficientes  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_{xy}$ , se suman 16 tramos de calles en cada dirección en cada celda. Se delimita una zona que atraviesa la ciudad, que puede corresponder, por ejemplo, a una zona con un sistema de vías ferroviarias, donde se reducen a 8 los tramos según la dirección de 0° y a 4 los correspondientes a 90°.

Como función de tiempo de viaje en las calles se adopta  $t_a = t_{a_0} (1 + 0,15(x_a / C_a)^4)$  y en las autopistas  $t_l = t_{l_0} (1 + 0,85(x_l / C_l)^5)$ . Con estos datos se define la situación original de la red de transporte. Se fija como valor de convergencia del sistema  $\sqrt{\sum_l (x_l^{n+1} - x_l^n)^2} / \sum_l x_l^n \leq 0,001$  aplicado a los tramos de las autopistas.

Se analizan, a modo de ejemplo, tres modificaciones posibles. En el primer caso, se aplica al tramo 8 de autopistas una demora adicional del 50% del tiempo de viaje a flujo libre, independiente de la congestión de tráfico. Esta demora puede corresponder, por ejemplo, estableciendo la relación entre costo monetario y tiempo, a un pago de peaje. En el segundo caso se modifican las capacidades de los tramos de autopista de la siguiente manera: 5000 veh/h en los tramos 1, 2, 3, 4 y 10; 10000 veh/h en el tramo 11, 12000 veh/h en el tramo 12 y 7000 veh/h en los restantes. Finalmente, en el tercer caso se modifican las condiciones de circulación en una zona de la ciudad alemana a los centros 5, 6 y 10 (Figura 8). En esta zona se baja la velocidad máxima de circulación a 40 km/h y se disminuye la capacidad a 400 veh/h.

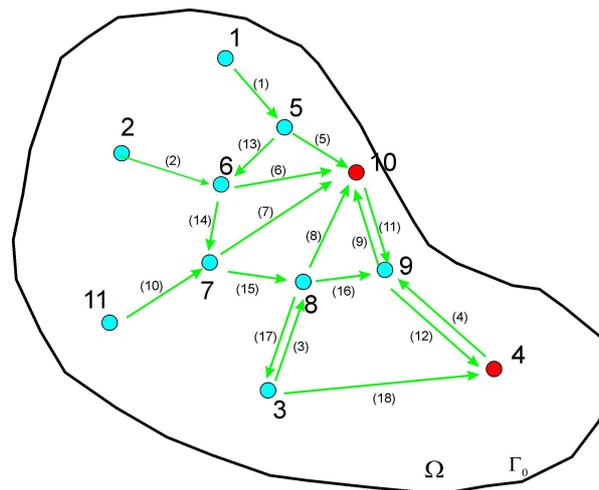


Figura 5: Esquema de la red de autopistas en el dominio de la ciudad.

En la situación original, el 55% de los conductores que llegan al centro 10 lo hacen utilizando las autopistas, mientras que para llegar al centro 4 solo el 37% de los viajeros las eligen. Esto se puede deber a que si bien las autopistas permiten mayor velocidad de circulación, también es mayor el recorrido a través de las mismas que por las calles del sistema continuo, por lo cual se estaría priorizando el uso de éstas. Cuando se aumenta la capacidad de las autopistas (caso 2), el porcentaje de conductores que las eligen aumenta al 60% hacia el centro 10 y al 46% hacia el centro 4. En el caso 3, donde la circulación se dificulta en una zona de la ciudad cercana al centro 10, el 64% de los viajes generados llega a dicho centro por las autopistas y para llegar al centro 4 solo el 38% las utiliza.

En la Figura 6 se muestra el flujo vehicular hacia el centro 10 en las calles del sistema continuo y en la Figura 7 el tiempo de viaje desde cualquier punto de la ciudad hasta ese destino, ambos en el estado original de la red. En las Figuras 9 y 10 se pueden ver dichas distribuciones para el caso 3.

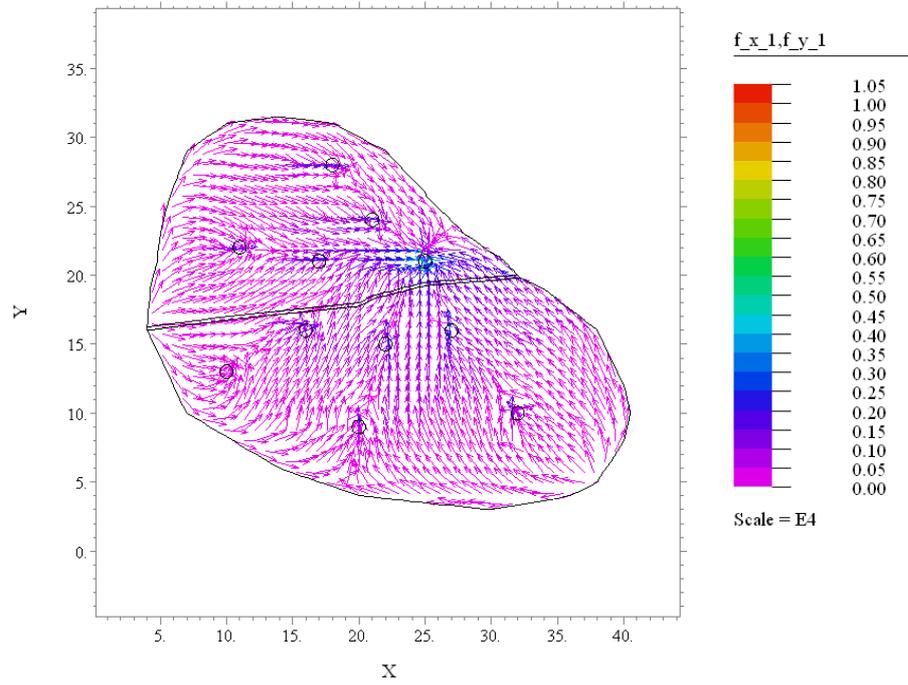


Figura 6: Flujo hacia el centro 10 en las calles de la ciudad en la situación original.

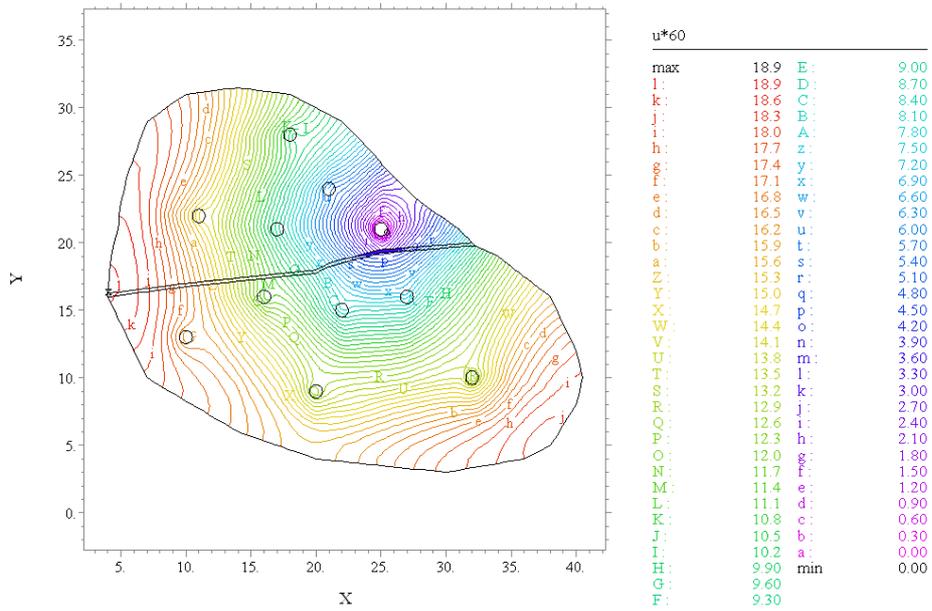


Figura 7: Tiempo de viaje en minutos hasta el centro 10 en la situación original.

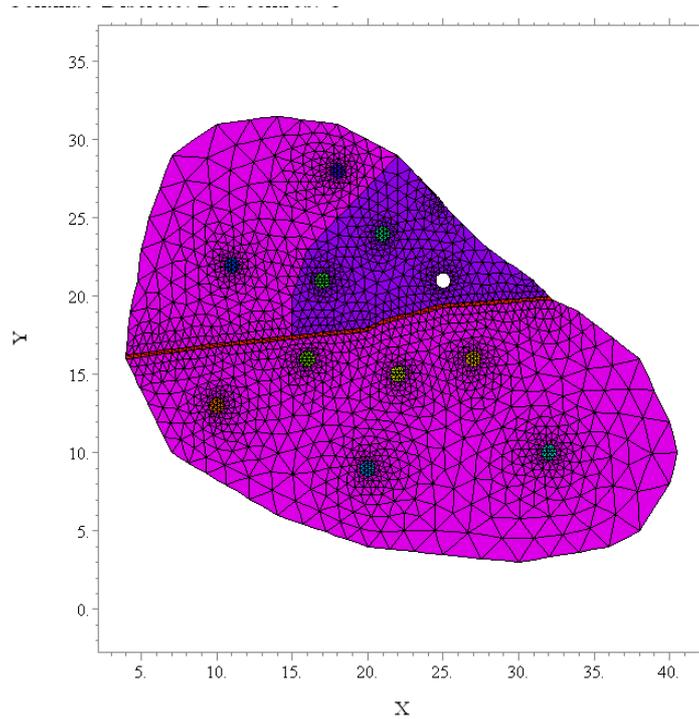


Figura 8: Malla de elementos finitos correspondiente al caso 3 (zona con diferente configuración).

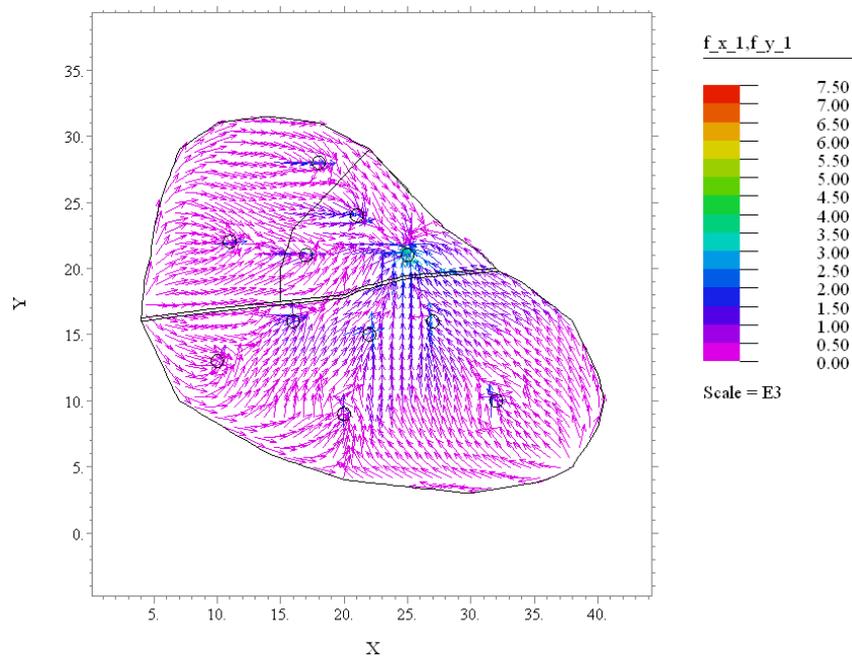


Figura 9: Flujo hacia el centro 10 en las calles de la ciudad para el caso 3.

En las Figuras 11 y 12 se muestra la cantidad de vehículos que ingresan en cada acceso hacia los centros 10 y 4 en la situación original y para el caso 3 respectivamente. Se puede observar que en la situación original, en todos los accesos a las autopistas ingresan vehículos con destino al centro 10, mientras que para llegar al centro 4, solo se usan las autopistas desde

los ingresos más cercanos. En la **Figura 12** se evidencia que en el caso 3, al congestionarse el sistema continuo más cantidad de vehículos ingresan a las autopistas en todos los accesos hacia el centro 10.

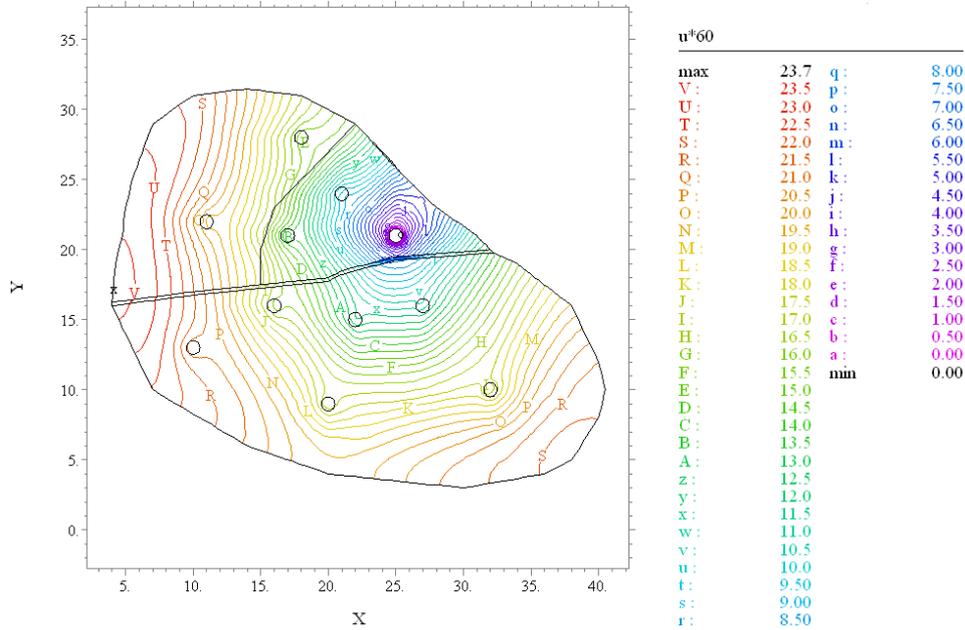


Figura 10: Tiempo de viaje en minutos hasta el centro 10 para el caso 3.

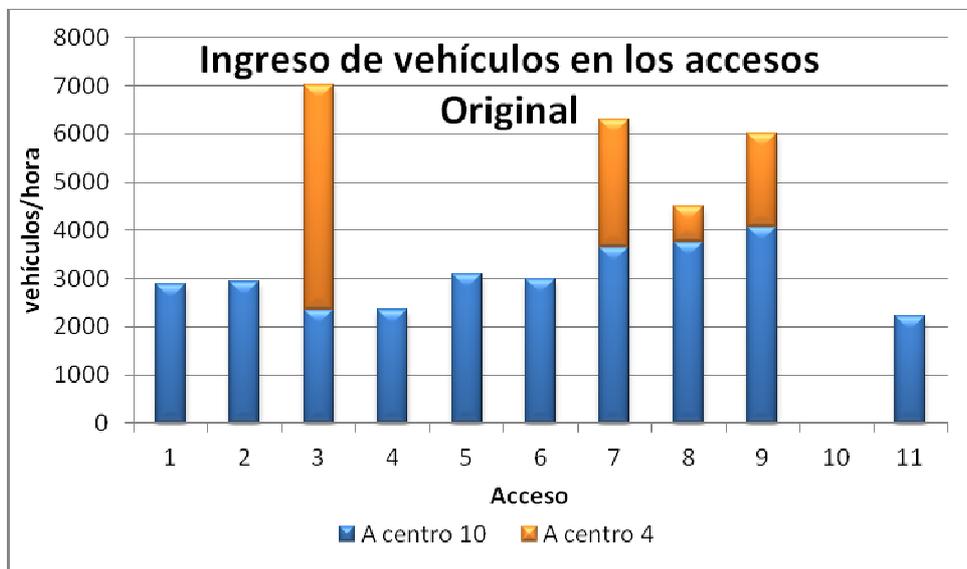


Figura 11: Ingreso de vehículos en los accesos hacia los centros 10 y 4. Situación original.

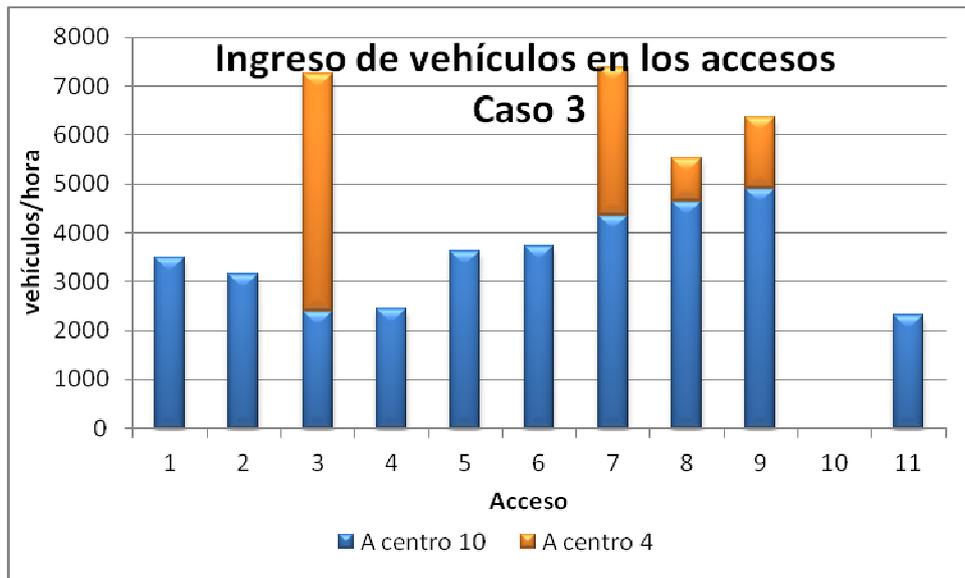


Figura 12: Ingreso de vehículos en los accesos hacia los centros 10 y 4. Caso 3.

En la [Figura 13](#) se muestra el flujo en cada tramo de la red de autopistas para los casos analizados. Se observa que la incorporación de una demora adicional en el tramo 8, solo produce una pequeña disminución (11,1%) en dicho tramo, sin afectar al resto de la red discreta. La diferencia de flujo es absorbida por el sistema continuo. En el caso 2, la ampliación de capacidad en los tramos hace que el flujo aumente, principalmente en el tramo 12 que llega directamente al centro 4. En el caso 3, el flujo se incrementa en las autopistas, fundamentalmente en los tramos que llegan directamente al centro 10, debido a las peores condiciones de circulación en el sistema continuo en la zona cercana a dicho centro.

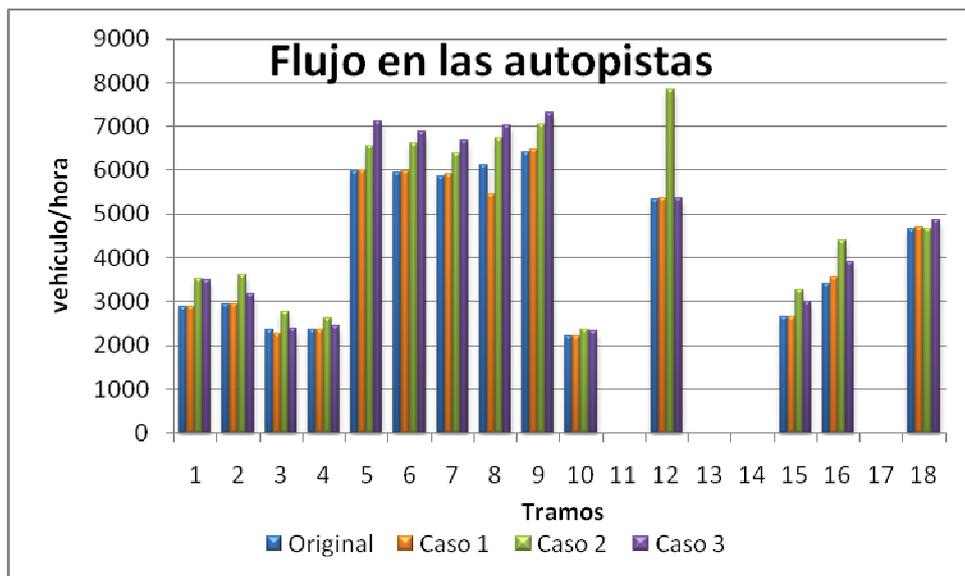


Figura 13: Flujo en los tramos de autopistas.

En la [Figura 14](#), se muestran las relaciones flujo/capacidad que son indicadores del grado de congestión. La reducción de esta relación en el caso 2 está señalando un tráfico más fluido,

mientras que en el caso 3, la mencionada relación aumenta por el aumento de flujo sin variación de capacidad. De acuerdo a estas relaciones en la [Figura 15](#) se pueden observar los incrementos de tiempo de recorrido de los distintos tramos con respecto al tiempo a flujo libre (sin congestión). Los mayores incrementos se producen en el caso 3, superando en todos los tramos que llegan al centro 10 el 100%. En el caso 2, se producen los menores incrementos. Cabe aclarar que el tiempo correspondiente al tramo 8 es el real de viaje, sin considerar el incremento por equivalencia de peaje.

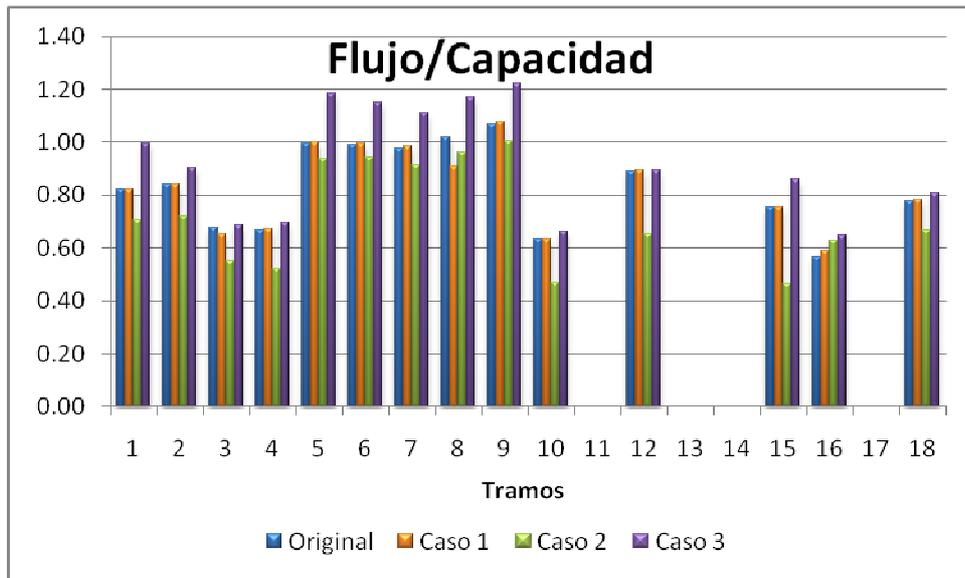


Figura 14: Flujo en los tramos de autopistas.

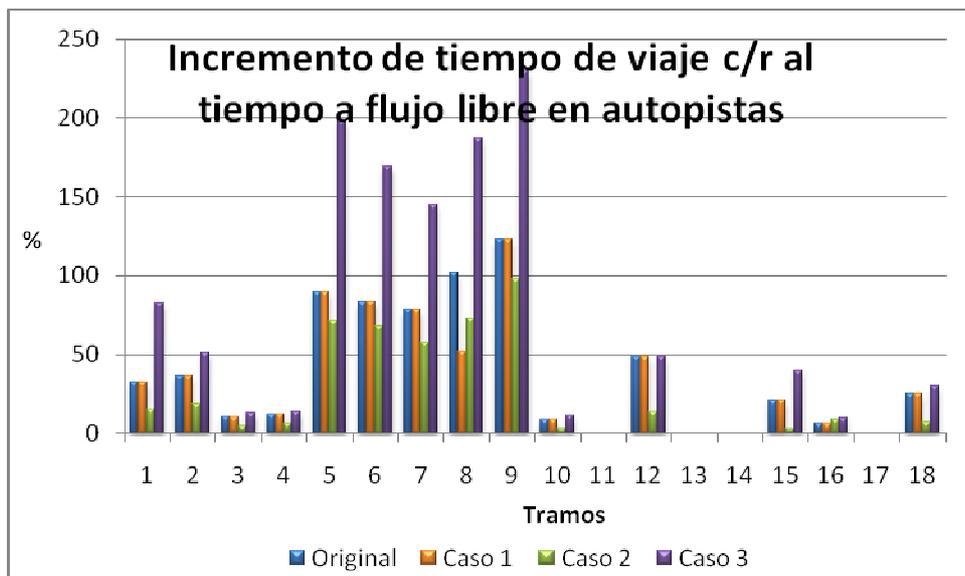


Figura 15: Incremento del tiempo de viaje en los tramos de autopistas con respecto al tiempo a flujo libre.

## 6 CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo continuo-discreto para el estudio del tráfico urbano con autopistas. Las autopistas se modelan en forma discreta y el resto de las calles de la ciudad en forma continua, interactuando ambos sistemas en los puntos de acceso a las autopistas. El modelo presentado contempla la anisotropía de la red y permite obtener en forma detallada el flujo vehicular y el tiempo de recorrido en cada tramo de las autopistas y en cada una de las calles de la ciudad. Esta característica permite acoplar el modelo de tráfico con modelos de contaminación urbana, acústica y atmosférica, temas que se desarrollarán en futuros trabajos. El modelo se formula mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de difusión anisótropa no lineal y un conjunto de ecuaciones algebraicas de continuidad que se resuelven adecuadamente, en forma simultánea, mediante el método de los elementos finitos. Futuros trabajos están orientados a la optimización de redes de tráfico urbano considerando los aspectos ambientales mencionados como objetivos y/o restricciones.

## 7 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es parte del proyecto “Modelos Matemáticos en Ingeniería Ambiental: Problemas Directos e Inversos” (Director: Dr. Víctor H. Cortínez, Secyt, Universidad Tecnológica Nacional). Asimismo forma parte del trabajo de tesis desarrollado por Patricia N. Domínguez, bajo la dirección de V. H. Cortínez, para obtener el título de Dr. en Ingeniería en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

## REFERENCIAS

- Beckmann, M. J., Mc Guire, C. B. y Weinstein C. B., *Studies in economics of transportation*. Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1956.
- Chiou, S., Simultaneously optimizing link tolls and signal settings in a road network. *Applied Mathematical Modelling* 33-5, 2311-2323, 2009.
- Cortínez, V., Domínguez, P., Un modelo continuo de asignación de tráfico para el estudio de ruido urbano. *Primeras Jornadas Regionales de Acústica Adaa 2009*, Rosario. ISBN 978-987-22880-8-2, 2009.
- Cortínez, V., Domínguez, P., Un modelo continuo anisótropo para el estudio del tráfico urbano congestionado. *Mecánica Computacional* Vol. XXIX, 2173-2197, 2010.
- Domínguez, P., Cortínez, V., Aplicación de un modelo continuo de distribución-asignación de tráfico urbano: Impacto ambiental. *II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, MACI (2)2009, p. 277-280, 2009.
- Domínguez, P.; Vidal, M. y Cortínez, V., Diseño óptimo de redes de transporte urbano considerando aspectos medioambientales. *Mecánica Computacional* Vol. XXVIII, 2599-2624, 2009.
- Domínguez, P., Cortínez, V., Un modelo combinado continuo-discreto para el diseño de autopistas. Impacto ambiental. *III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, MACI (3)2011, p. 347-350, 2011.
- Frank, M., y Wolfe, P., An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3:95-110, 1956.
- Ho, H.; Wong, S.; Loo, B., Combined distribution and assignment model for a continuum traffic equilibrium problem with multiple user classes. *Transportation Research, B* 40, 633-650, 2006.

- Ho, H.; Wong, S., Two dimensional continuum modeling approach to transportation problems. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology* 6, 53-72, 2006.
- Poorzahedy, H., Rouhani, O., Hybrid meta-heuristic algorithms for solving network design problem. *European Journal of Operational Research* 182:578-596, 2007.
- Robusté, F.; Oñate, E. y Ramos, J.M., Un modelo híbrido discreto-continuo para asignación de tráfico mediante Algoritmos Genéticos. *IX Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte*. La Habana, Cuba, 1996.
- Sasaki, T.; Iida, Y.; Yang, H., User equilibrium traffic assignment by continuum approximation of network flow. *11th International Symposium of Transportation and Traffic Theory*, Yokohama, Japan, 233-252, 1990.
- Sheffi, Y., *Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1984.
- Transportation Research Board, *Highway Capacity Manual*.  
<http://www.trb.org/Main/Home.aspx>.
- U.S. Bureau of Public Roads. *Traffic Assignment Manual*. U.S. Department of Commerce, Washington D.C., 1964.
- Wardrop, J. G., Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceeding, Institution of Civil Engineers* II (1):325-378, 1952.
- Wong, S.; Sun, S., A combined distribution and assignment model for continuous facility location problem. *Annals of Regional Science* 35, 267-281, 2001.
- Ying, J., Lu, H., Shi, J., An algorithm for local continuous optimization of traffic signals. *European Journal of Operational Research* 181, 1189-1197, 2007.