

DESCOMPOSICIÓN PROXIMAL APLICADA AL ESTUDIO DE LA GENERACIÓN-TRANSMISIÓN ELÉCTRICA EN UN SECTOR DEL SISTEMA INTERCONECTADO ARGENTINO

Pablo A. Lotito^{a,b}, Lisandro A. Parente^{a,c} y Aldo J. Rubiales^{a,b}

^aCONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas), Argentina,
<http://www.conicet.gob.ar>

^bPLADEMA - Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro, Paraje Arroyo Seco s/n,
7000 Tandil, Argentina, plotito@exa.unicen.edu.ar, arubiales@exa.unicen.edu.ar,
<http://www.pladema.net>

^cCIFASIS (Centro Internacional Franco Argentino de Ciencias de la Información y de Sistemas), 27 de
Febrero 210 bis, 2000 Rosario, Argentina, <http://www.cifasis-conicet.gob.ar>

Palabras Clave: Equilibrio de Nash-Cournot, Inclusiones variacionales, Métodos de Punto Proximal, Descomposición.

Resumen. En este trabajo estudiamos un problema de planeamiento a corto plazo de la generación eléctrica hidrotérmica en un sector del Sistema Interconectado Argentino. Consideramos un modelo de corriente continua (DC) para las restricciones de la red de transmisión e incorporamos la posibilidad de bombeo en las centrales hidroeléctricas. A partir de la teoría de equilibrio de Nash-Cournot, obtenemos una inclusión variacional monótona con un operador de estructura separable que permite aplicar un esquema proximal de descomposición. Describimos la implementación y presentamos resultados numéricos.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas del siglo pasado se inició un proceso de desregulación de los mercados de producción de energía eléctrica que, comenzando en Estados Unidos, se extendió a en diferentes grados a la mayoría de los países. Esto cambió significativamente el comportamiento de las empresas generadoras y, en consecuencia, la forma de estimar el precio de la energía provista por éstas. Entre los distintos tipos de mercados se distinguen dos: los mercados con despachos auditados y los mercados oligopólicos.

En la literatura específica, entre los modelos frecuentemente utilizados para representar el comportamiento de los productores en mercados eléctricos oligopólicos, encontramos los de tipo Nash-Cournot. Uno de los primeros trabajos en este campo fue [Scott y Read \(1996\)](#), que combina Programación Dinámica Dual con un modelo de equilibrio de Nash-Cournot, aplicado al mercado eléctrico de Nueva Zelanda. En [Rivier et al. \(2001\)](#) se establecen condiciones de equilibrio que derivan en un problema de complementariedad mixta con una estructura que permite su aplicación a problemas de escala real. Restricciones asociadas a la red de transmisión fueron consideradas en [Baldick \(2002\)](#). La importancia de considerar estas restricciones reside en la necesidad de asegurar que la producción de las unidades generadoras sea factible de ser transmitido en la red existente. En [Moitre et al. \(2005\)](#) se presenta un problema de coordinación hidrotérmica formulado como un problema de optimización binivel, considerando unidades hidráulicas de *almacenamiento de bombeo*. Estas centrales poseen dos reservorios a diferentes niveles, con la capacidad de generar electricidad en períodos de alta demanda o bombear agua cuando la demanda es baja, aumentando la capacidad de generación en períodos de alto consumo. El problema de planeamiento a corto plazo de un sistema de este tipo fue estudiado en [Parente et al. \(2011\)](#) sin considerar restricciones de red.

En el presente trabajo se considera un sistema de producción de energía en un mercado competitivo oligopólico, compuesto por unidades térmicas e hidráulicas de almacenamiento de bombeo, siguiendo el modelo de [Parente et al. \(2011\)](#), e incorporando las restricciones físicas de la red de transmisión a través de un modelo de corriente continua. La siguiente sección describe la nomenclatura utilizada. En la sección 3 se presenta el modelo analítico del problema de equilibrio, expresado como una inclusión variacional monótona. La sección 4 está dedicada a la descripción del método proximal de descomposición utilizado en la resolución numérica del problema. En la sección 5 se muestra la eficiencia del esquema utilizado en un ejemplo basado en un sector del sistema interconectado argentino, modificado para admitir unidades de almacenamiento de bombeo. Finalmente, se presentan algunas conclusiones.

2. NOMENCLATURA

- t cada período de tiempo, $t = 1, \dots, T$.
- i cada unidad térmica, $i = 1, \dots, \mathcal{I}$.
- j cada unidad hidroeléctrica, $j = 1, \dots, \mathcal{J}$.
- b cada barra, $b = 1, \dots, \mathcal{B}$.
- m cada compañía térmica, $m = 1, \dots, M$.
- n cada compañía hidroeléctrica, $n = 1, \dots, N$.
- \mathcal{C}_m^{Th} conjunto de índices de las unidades térmicas de la compañía m .
- \mathcal{C}_n^H iconjunto de índices de las unidades hidroeléctricas de la compañía n .
- \mathcal{S}_k^{Th} conjunto de índices de las unidades térmicas conectadas a la barra b .

\mathcal{S}_b^H	conjunto de índices de las unidades hidroeléctricas conectadas a la barra b .
\mathcal{S}_b^B	conjunto de índices de las barras conectadas con la barra b .
x_{it}	producción el unidad i para el período t , componente de $x \in \mathbb{R}^{IT}$.
y_{jt}	producción el unidad j para el período t (o consumo, si $y_{jt} < 0$), componente de $y \in \mathbb{R}^{JT}$.
d_{bt}	demanda en la barra b en el tiempo t , componente de $d \in \mathbb{R}^{BT}$.
$w_{\ell t}$	apotencia en la línea ℓ en el tiempo t , componente de $w \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}T}$.
x_i^{Low}, x_i^{Up}	cotas de producción de la unidad i , componentes de $x^{Low}, x^{Up} \in \mathbb{R}^I$.
y_j^{Low}, y_j^{Up}	cotas de producción de la unidad j , componentes de $y^{Low}, y^{Up} \in \mathbb{R}^J$.
y_j^{Tot}	generación total de la unidad hidroeléctrica j , componente de $y^{Tot} \in \mathbb{R}^J$.
α_j	coeficiente de eficiencia de la unidad hidroeléctrica j .
w_ℓ^{Cap}	capacidad de la línea ℓ , componente de $w^{Cap} \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$.
a_t, D_t	coeficientes de la función de demanda inversa en el tiempo t .
Ben_m^T	beneficio de la compañía térmica m .
Ben_n^H	beneficio de la compañía hidroeléctrica n .
p_t	precio de mercado en el tiempo t , componente de $p \in \mathbb{R}^T$.
$f_j(\cdot)$	función no diferenciable que representa el salto de eficiencia entre bombeo y generación en la unidad j .
$c_i^T(\cdot)$	costo de producción de la unidad i .
\mathcal{K}_m^{Th}	conjunto factible para la compañía m .
\mathcal{K}_n^H	conjunto factible para la compañía n .

3. PROBLEMA DE EQUILIBRIO HIDROTÉRMICO CON RESTRICCIONES DE RED

Consideramos un sistema de producción eléctrica compuesto por \mathcal{I} centrales térmicas distribuidas en M compañías y \mathcal{J} centrales hidráulicas distribuidas en N compañías. La unidad térmica i pertenece a la compañía m si i pertenece al conjunto de índices \mathcal{C}_m^{Th} y respectivamente $j \in \mathcal{C}_n^H$ indica que la unidad hidráulica j pertenece a la compañía n . Las centrales y los centros de consumo están interconectados mediante una red compuesta por \mathcal{B} barras (nodos) y \mathcal{L} líneas (arcos) con restricciones en la capacidad de transporte de energía. Algunos pares de barras (digamos b y k) están conectadas por una línea $\ell = (b, k)$, y la potencia entre esas barras en el período de tiempo t se denota por $w_{\ell t} = w_{bkt} = -w_{kbt}$. En un horizonte discreto de T períodos estudiamos el equilibrio de Nash-Cournot derivado de querer maximizar el beneficio individual de cada compañía. Las variables son la producción térmica $x = (x_{it})$, con restricciones de caja, y la producción hidroeléctrica $y = (y_{jt})$, que además presenta la restricción de igualdad

$$\sum_t y_{jt} = y_j^{TOT}, \quad (1)$$

que expresa el monto total de agua a ser utilizado en el horizonte de planeamiento. En este trabajo, siguiendo una de las metodologías descriptas en Wood y Wollenberg (1996), se considera conocido este volumen como producto de un estudio previo a largo plazo que considera otros aspectos del modelado (incertidumbre en el clima, la demanda, etc). Como variable auxiliar, consideramos la potencia en las líneas $w = (w_{\ell t})$, con restricciones de caja.

Los beneficios de las compañías térmicas e hidráulicas en cada período están dados por el producto de las respectivas producciones por el precio de mercado,

$$Ben_m^{Th} = \sum_{i \in \mathcal{C}_m^{Th}} \sum_{t=1}^T (x_{it} p_t - c_i^{Th}(x_{it})), \quad m = 1, \dots, M, \tag{2}$$

donde $c_i^{Th}(x_{it})$ es un costo de generación cuadrático y

$$Ben_n^H = \sum_{j \in \mathcal{C}_n^H} \sum_{t=1}^T f_j(y_{jt}) p_t, \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{con } f_j(s) = \begin{cases} s, & \text{if } s \geq 0, \\ \alpha_j s, & \text{if } s < 0, \end{cases} \tag{3}$$

donde la función seccionalmente lineal f_j es usada para representar la diferencia entre bombear ($y_{jt} < 0$) y generar ($y_{jt} > 0$). El coeficiente de eficiencia $\alpha_j > 1$ indica que la energía utilizada para bombear agua es mayor que la energía generada por el mismo volumen de agua.

Las variables están acopladas a su vez por la restricción lineal

$$\sum_{i \in \mathcal{S}_b^{Th}} x_{it} + \sum_{j \in \mathcal{S}_b^H} y_{jt} - d_{bt} = \sum_{k \in \mathcal{S}_b^B} w_{bkt}, \quad \forall b, t, \tag{4}$$

que responde a las restricciones físicas de un modelo de red de corriente continua, siendo respectivamente $\mathcal{S}_b^{Th}, \mathcal{S}_b^H, \mathcal{S}_b^B$ los conjuntos de plantas térmicas, plantas hidráulicas y barras conectadas con la barra b , y d_{bt} la demanda en la barra b en el período t . Las demandas se relacionan con el precio de mercado p a través de una función de demanda afín $d_{bt}(p) = D_{bt} - a_{bt}p$, para ciertos coeficientes D_{bt}, a_{bt} , con lo cual el precio está dado por la función de demanda inversa $p_t(d_{bt}) = \frac{1}{a_{bt}}(d_{bt} - d_{bt})$, o bien $p_t(d) = \frac{1}{a_t}(D_t - d_t)$, siendo $D_t = \sum_b d_{bt}$, $a_t = \sum_b a_{bt}$ y $d_t = \sum_b d_{bt}$. Como la demanda total es suplida por todos los jugadores, coincide con la producción total, es decir $\sum_{j=1} y_{jt} + \sum_{i=1} x_{it} = d_t$ y entonces el precio de mercado es $p_t = \frac{1}{a_t} \left(D_t - \sum_{j=1} y_{jt} - \sum_{i=1} x_{it} \right)$, los beneficios (2) y (3) son cuadráticos y la restricción (4) resulta

$$\sum_{i \in \mathcal{S}_b^{Th}} x_{it} + \sum_{j \in \mathcal{S}_b^H} y_{jt} - d_{bt} + \frac{a_{bt}}{a_t} \left(D_t - \sum_{j=1} y_{jt} - \sum_{i=1} x_{it} \right) = \sum_{\ell \in \mathcal{S}_b^B} w_{bkt}. \tag{5}$$

Dado que $w_{\ell t} = w_{bkt} = -w_{kbt}$, las ecuaciones (5) pueden formularse sólo en función de las variables $w_{\ell t}$, introduciendo apropiados signos. Luego, definiendo adecuadas matrices de incidencia A, B y C , y un apropiado vector v , las restricciones (5) toman la forma

$$Aw + Bx + Cy = v. \tag{6}$$

Siendo \mathcal{K}_m^{Th} y \mathcal{K}_n^H los conjuntos factibles de las compañías térmicas m e hidroeléctricas n , respectivamente, el problema de equilibrio de Nash-Cournot con restricciones de red consiste en determinar la terna (w^*, x^*, y^*) a fin de satisfacer

$$Ben_m^{Th}(x^*, y^*) = \max_{x_m \in \mathcal{K}_m^{Th}} Ben_m^{Th}(x_m, x_{/m}^*, y^*), \quad m = 1, \dots, M, \tag{7}$$

$$Ben_n^H(x^*, y^*) = \max_{y_n \in \mathcal{K}_n^H} Ben_n^H(x^*, y_n, y_{/n}^*), \quad n = 1, \dots, N, \tag{8}$$

y la restricción (6), donde $x_m = (x_{it})_{i \in C_m^{Th}}$, $x_{/m} = (x_{it})_{i \notin C_m^{Th}}$, $y_n = (y_{jt})_{j \in C_n^H}$ and $y_{/n} = (y_{jt})_{j \notin C_n^H}$.

Llos problemas (7) no presentan mayor dificultad pues son problemas diferenciables cuadráticos con restricciones de caja, pero las funciones f_j hacen que los problemas (8) no sean diferenciables en el origen, y además presentan restricciones de igualdad. La falta de diferenciability en cero es fácilmente abordable mediante la descomposición $y = y_+ - y_-$, donde

$$(y^+)_{jt} = \begin{cases} y_{jt}, & \text{si } y_{jt} \geq 0, \\ 0, & \text{si } y_{jt} < 0, \end{cases} \quad (y^-)_{jt} = \begin{cases} 0, & \text{si } y_{jt} \geq 0, \\ -y_{jt}, & \text{si } y_{jt} < 0, \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, \mathcal{J}$ and $t = 1, \dots, T$. Tomando $z = (y_+^T, y_-^T)^T$, la complementariedad entre y_+ e y_- introduce una restricción no lineal, pero puede demostrarse que los puntos de equilibrio del problema relajado, sin considerar esta restricción, verifican la complementariedad (véase (Lotito et al., 2011, Proposition 1)), con lo cual no es necesario introducirla en la formulación. De esta manera, los problemas (8) expresados en z resultan diferenciables cuadráticos con restricciones de caja e igualdad. Asimismo, definiendo adecuadamente las matrices S y \hat{C} , las restricciones (1) y (6) pueden reescribirse respectivamente como

$$Sz = y^{Tot}, \quad \text{y} \quad Aw + Bx + \hat{C}z = v.$$

Además, los gradientes de las funciones de beneficio, tanto térmicas como hidráulicas, resultan funciones lineales.

Considerando las condiciones de optimalidad y siguiendo a (Facchinei y Pang (2003)), el problema de equilibrio de Nash-Cournot puede formularse como una inecuación variacional de la forma

$$\text{hallar } \xi^* \in \Omega \text{ tal que } \langle \Psi(\xi^*), \xi - \xi^* \rangle \geq 0, \quad \forall \xi \in \Omega, \tag{9}$$

donde

$$\Omega = \{(w, x, z) \in \mathcal{K}^N \times \mathcal{K}^{Th} \times \mathcal{K}^H \mid Ax + Bw + \hat{C}z = 0, Sz = y^{Tot}\}$$

y

$$\Psi \begin{pmatrix} w \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\nabla_{x_m} Ben_m^{Th}(x_m, x_{/m}, z))_{m=1, \dots, M} \\ (\nabla_{z_n} Ben_n^H(x, z_n, z_{/n}))_{n=1, \dots, N} \end{pmatrix},$$

siendo \mathcal{K}^N , \mathcal{K}^{Th} y \mathcal{K}^H los conjuntos de las restricciones de caja de las potencias de las líneas y las producciones de las compañías térmicas e hidroeléctricas, respectivamente. Siendo los gradientes lineales, se obtiene

$$\Psi \begin{pmatrix} w \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{Th}x + \Gamma z + \gamma \\ M^H z + \Theta x + \theta \end{pmatrix},$$

para adecuadas matrices M^{Th} , M^H , Γ , Θ y vectores γ , θ . Una descripción precisa de las matrices y vectores involucrados puede hallarse en (Parente et al. (2011)). En particular, M^{Th} es simétrica pero M^H no lo es. Una cuestión esencial es que resulta semidefinida positiva la matriz

$$\begin{pmatrix} M^{Th} & \Gamma \\ \Theta & M^H \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Asociando un multiplicador de Lagrange a las restricciones de igualdad en la definición de Ω , se puede reemplazar (9) por la siguiente inecuación variacional (véase, por ejemplo, (Facchinei y Pang, 2003, Proposition 1.3.4)):

Hallar $(w^*, x^*, z^*, \mu^*) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}^N \times \mathcal{K}^{Th} \times \mathcal{K}^H \times \mathbb{R}^{BT+\mathcal{J}}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^\top \mu^* \\ M^{Th} x^* + \Gamma z^* + \gamma + B^\top \mu^* \\ \Theta x^* + M^H z^* + \theta + \bar{C}^\top \mu^* \\ \bar{v} - \bar{A} w^* - \bar{B} x^* - \bar{C} z^* \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} w - w^* \\ x - x^* \\ z - z^* \\ \mu - \mu^* \end{pmatrix} \geq 0, \quad (11)$$

para todo $(w, x, z, \mu) \in \mathcal{K}$, donde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(BT+\mathcal{J}) \times \mathcal{L}T}, & \bar{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(BT+\mathcal{J}) \times \mathcal{I}T}, \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} \hat{C} \\ S \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(BT+\mathcal{J}) \times 2\mathcal{J}T}, & \text{y } \bar{v} &= \begin{bmatrix} v \\ y^{Tot} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{BT+\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

En la siguiente sección se muestra cómo esta inecuación variacional puede ser resuelta numéricamente mediante un algoritmo proximal de descomposición.

4. EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN

Siguiendo (Lotito et al., 2009, section4.2), la inecuación variacional (11) resulta equivalente a la inclusión variacional

$$0 \in (\Phi + N_{\mathcal{K}})(w^*, x^*, z^*, \mu^*), \quad (12)$$

donde

$$\Phi(w, x, z, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{A}^\top \mu \\ M^{Th} x + \Gamma z + \gamma + \bar{B}^\top \mu \\ \Theta x + M^H z + \theta + \bar{C}^\top \mu \\ \bar{v} - \bar{A} w - \bar{B} x - \bar{C} z \end{pmatrix}$$

y $N_{\mathcal{K}}(w, x, z, \mu)$ es el cono normal al convexo \mathcal{K} en el punto (w, x, z, μ) . El operador multivaluado $\Phi + N_{\mathcal{K}}$ posee una estructura separable que resulta adecuada para la aplicación del método de descomposición proximal híbrido con métrica variable (VMHPDM) desarrollado en Lotito et al. (2009), en particular,

$$(\Phi + N_{\mathcal{K}})(w, x, z, \mu) = F(w, x, z, \mu) \times (G(w, x, z, \mu) + H(z, \mu))$$

donde $F : \mathbb{R}^{(\mathcal{L}+\mathcal{I})T} \times \mathbb{R}^{(2\mathcal{J}+\mathcal{B})T+\mathcal{J}} \rightrightarrows \mathbb{R}^{(\mathcal{L}+\mathcal{I})T}$ es el operador multivaluado dado por

$$F(w, x, z, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{A}^\top \mu + N_{\mathcal{K}^N}(w) \\ M^{Th} x + \Gamma z + \gamma + \bar{B}^\top \mu + N_{\mathcal{K}^{Th}}(x) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$G : \mathbb{R}^{(\mathcal{L}+\mathcal{I})T} \times \mathbb{R}^{(2\mathcal{J}+\mathcal{B})T+\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}^{(2\mathcal{J}+\mathcal{B})T+\mathcal{J}}$ es la función continua definida por,

$$G(w, x, z, \mu) = \begin{pmatrix} \Theta x + M^H z + \theta + \bar{C}^\top \mu \\ \bar{v} - \bar{A} w - \bar{B} x - \bar{C} z \end{pmatrix} \quad (14)$$

y $H : \mathbb{R}^{(2\mathcal{J}+\mathcal{B})T+\mathcal{J}} \rightrightarrows \mathbb{R}^{(2\mathcal{J}+\mathcal{B})T+\mathcal{J}}$ es el operador maximal monótono

$$H(z, \mu) = \begin{pmatrix} N_{\mathcal{K}^H}(z) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Siendo la matriz (10) semidefinida positiva, es fácil ver que las hipótesis de monotonía y regularidad (Lotito et al., 2009, Assumptions A1-A5) son satisfechas. Dicho esquema se basa en los procedimientos proximales de métrica variable desarrollados en Parente et al. (2008), que poseen condiciones de convergencia de naturaleza constructiva y de verificación computacional factible. El método descompone el problema en las variables (w, x) y (z, μ) , separando en un primer paso vez la suma $G + H$ en (z, μ) mediante un procedimiento de tipo *avance-retroceso*, y procediendo luego a un paso proximal para (w, x) . En nuestro caso la ejecución del paso de separación resulta equivalente a calcular, para cierto $c_k > 0$,

$$\hat{z}^k = \text{Proj}_{\mathcal{K}^H} \{z^k - c_k (\Theta x^k + M^H z^k + \theta + \bar{C}^\top \mu^k)\} \tag{16}$$

$$\hat{\mu}^k = \mu^k - c_k (\bar{v} - \bar{A} w^k - \bar{B} x^k - \bar{C} z^k) \tag{17}$$

A continuación, la ejecución del paso proximal en su forma exacta, para cierto escalar $\beta > 0$ y cierta matriz simétrica positiva definida U , adquiere la forma

$$\hat{w}^k = \text{Proj}_{\mathcal{K}^N} \{w^k - c_k \bar{A}^\top \mu^k\} \tag{18}$$

$$\hat{x}^k = \text{Proj}_{\mathcal{K}^{Th}} \left\{ \frac{1}{\beta} (U x^k - (\Gamma \hat{z}^k + \gamma + \bar{B}^\top \hat{\mu}^k)) \right\} \tag{19}$$

Siendo \mathcal{K}^N , \mathcal{K}^{Th} y \mathcal{K}^H conjuntos de caja, las proyecciones ortogonales (16), (18) y (19) pueden calcularse mediante fórmulas explícitas de la forma

$$\hat{z}^k = \min \{ \max \{ z^k - c_k (\Theta x^k + M^H z^k + \theta + \bar{C}^\top \mu^k), 0 \}, Z^{Up} \}, \tag{20}$$

$$\hat{w}^k = \min \{ \max \{ w^k - c_k \bar{A}^\top \mu^k, -W^{Cap} \}, W^{Cap} \} \tag{21}$$

y

$$\hat{x}^k = \min \left\{ \max \left\{ \frac{1}{\beta} (U x^k - (\Gamma \hat{z}^k + \gamma + \bar{B}^\top \hat{\mu}^k)), X^{Low} \right\}, X^{Up} \right\}. \tag{22}$$

Además, eligiendo parámetros adecuados, se pueden satisfacer las condiciones suficientes (véase (Parente et al., 2008, Proposition 3.1))

$$\|s^k\|^2 \leq \sigma_k^2 (\|\hat{w}^k - w^k\|^2 + c_k \|\hat{x}^k - x^k\|_U^2 + \|\hat{z}^k - z^k\|^2 + \|\hat{\mu}^k - \mu^k\|^2), \tag{23}$$

con

$$s^k = (s_z^k, s_\mu^k) = c_k (G(\hat{w}^k, \hat{x}^k, \hat{z}^k, \hat{\mu}^k) - G(w^k, x^k, z^k, \mu^k)) \tag{24}$$

para que las nuevas iteraciones resulten

$$\begin{aligned} w^{k+1} &= \hat{w}^k \\ x^{k+1} &= \hat{x}^k \\ z^{k+1} &= \hat{z}^k - s_z^k \\ \mu^{k+1} &= \hat{\mu}^k - s_\mu^k. \end{aligned} \tag{25}$$

Bajo condiciones standard, este algoritmo converge globalmente con velocidad de convergencia lineal (véase (Lotito et al., 2009, Theorem 2)).

En la siguiente sección presentamos algunos resultados numéricos preliminares para un ejemplo basado en un sector del sistema interconectado argentino.

5. APLICACIÓN EN EL SISTEMA MEDIANO TRANSCOMAHUE

Se presenta aquí una aplicación del algoritmo realizada sobre una sección del Sistema Interconectado Nacional de Argentina cuyo sector de transporte es operado por Transcomahue. Esta red se encuentra en la zona del Alto Valle y comprende las provincias de Neuquén y Río Negro. La extensión de la misma se considera de tamaño medio y cuenta con 23 centrales térmicas, 6 hidráulicas, 87 barras y 89 líneas. Un esquema del mismo se presenta en la figura 1.

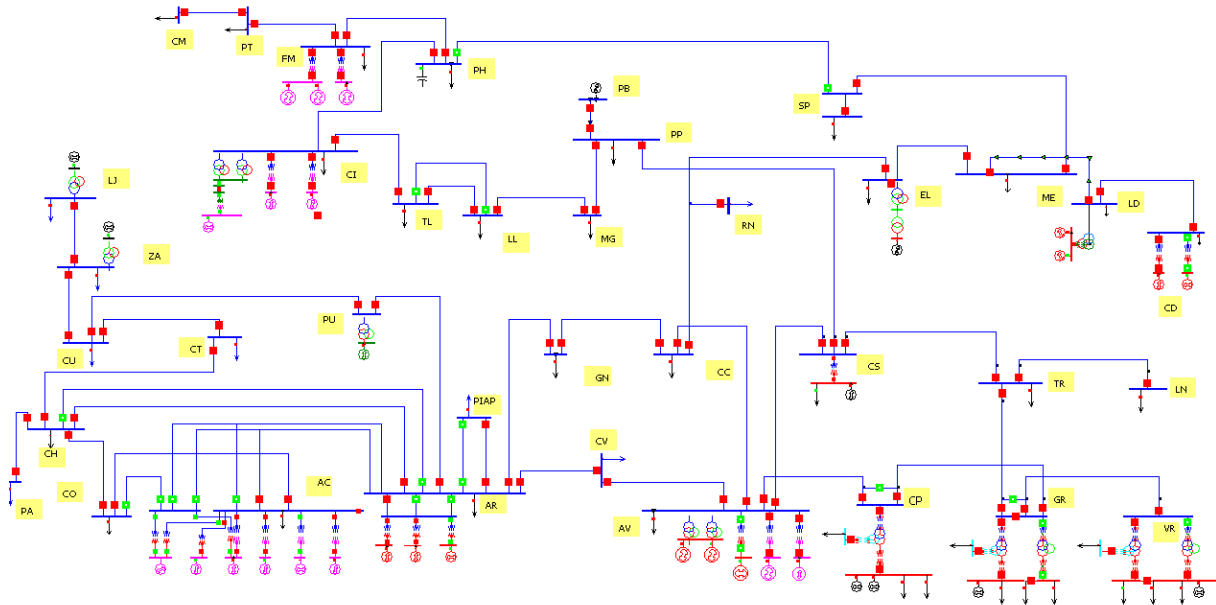


Figura 1: Diagrama unifilar de la red de Transcomahue

El horizonte de planeamiento utilizado, correspondiente a un problema de corto plazo, fue de un día con 24 períodos, es decir, un período por hora. Las unidades térmicas fueron asociadas en 6 compañías y las hidroeléctricas en 3, según su ubicación y características como se indica en las tablas 2 y 3. En particular, las hidroeléctricas son idénticas dentro de cada una de las compañías, ya que corresponden a distintos generadores de los mismos diques.

Tal como fue explicado en las secciones anteriores, el modelo utilizado para las ecuaciones de la red es un modelo de corriente continua, por lo cual no se considera la potencia reactiva del sistema. En función de ello, las características de las unidades generadoras se describen en las tablas 4 y 5.

Tabla 2: Compañías térmicas

Comp. T 1	Comp. T 2	Comp. T 3	Comp. T 4	Comp. T 5	Comp. T 6
P.BAND.	ACAJTG06	AVALTV	FILOTG	CHIUTG02	GR_13A
CS_13_1	ACAJTG01	AVALTG21	FILOTG3	CHIUTG01	VR_13B
	ACAJTG02	AVALTG22		HUINTG01	RI_33
	ACAJTG03	AVALTG23		CO_13	ELOM2 TG
	ACAJTG04				PHFICT
	ACAJTG05				

Tabla 3: Compañías térmicas

Comp. H 1	Comp. H 2	Comp. H 3
DIVIHI	ARROHI01	CDPIHI01
	ARROHI02	CDPIHI02
	ARROHI03	

Tabla 4: Potencias de las unidades térmicas

Nombre	Potencia		Costos		
	Mínima [MW]	Máxima [MW]	A [U/MWh^2]	B [U/MWh]	C [U]
P.BAND.	0	70	0.11	5	150
ACAJTG06	40	130	0.13	5.5	160
ACAJTG01	15	51	0.15	6	170
ACAJTG02	15	51	0.17	6.5	180
ACAJTG03	15	51	0.19	7	190
ACAJTG04	15	51	0.21	7.5	200
ACAJTG05	15	51	0.23	8	210
AVALTV	3	30	0.25	8.5	220
AVALTG21	0	17	0.27	9	230
AVALTG22	5	26	0.29	9.5	240
AVALTG23	5	26	0.31	10	250
FILOTG	7	23.6	0.35	11	270
CHIUTG02	5	19.4	0.37	11.5	280
CHIUTG01	5	19.4	0.39	12	290
HUINTG01	0	42.73	0.41	12.5	300
CP_13	0	10	0.45	13.5	320
GR_13A	0	5	0.47	14	330
VR_13B	0	5	0.49	14.5	340
CS_13_1	0	5	0.51	15	350
RI_33	0	25	0.53	15.5	360
ELOM2 TG	0	18	0.43	13	310
FILOTG3	7	23.6	0.33	10.5	260
PHFICT	0	70	0.11	5	150

Tabla 5: Potencias, eficiencia y producción total de las unidades hidráulicas

Nombre	Potencia		Coef. Efic.	Producción Total	
	Mínima [MW]	Máxima [MW]	α	Esc.1	Esc.2
DIVIHI	-1	5.0	1.1	50	50
ARROHI01	-20	42.5	1.1	350	500
ARROHI02	-20	42.5	1.1	350	500
ARROHI03	-20	42.5	1.1	350	500
CDPIHI01	0	30.0	1.0	350	400
CDPIHI02	0	30.0	1.0	350	400

Tabla 6: Demandas-precios de anclaje y coeficientes de la FDI

Período	Puntos de anclaje		Coeficientes FDI	
	Demanda [MW]	Precio [U/MW]	$D_t = \sum_b D_{b,t}$	$a_t = \sum_b a_{b,t}$
1	403.56	31.60	538.07	4.26
2	393.26	19.55	524.35	6.71
3	382.96	12.85	510.62	9.93
4	381.62	7.55	508.82	16.85
5	380.27	5.40	507.03	23.47
6	400.54	10.75	534.06	12.42
7	207.10	20.90	276.13	3.30
8	410.73	38.05	547.64	3.60
9	400.65	49.85	534.20	2.68
10	413.57	68.90	551.43	2.00
11	426.49	68.65	568.66	2.07
12	416.80	78.85	555.73	1.76
13	407.11	79.80	542.81	1.70
14	404.75	66.10	539.66	2.04
15	402.38	61.70	536.51	2.17
16	402.77	62.60	537.03	2.14
17	403.15	62.05	537.54	2.17
18	431.25	55.10	575.00	2.61
19	459.35	80.05	612.47	1.91
20	459.35	88.40	612.47	1.73
21	459.35	95.80	612.47	1.60
22	445.84	74.95	594.45	1.98
23	8892.87	69.90	11857.16	42.41
24	417.94	59.90	557.25	2.33

El sistema presenta 35 barras con demandas externas de energía. Para determinar los coeficientes de las funciones de demanda inversa en las barras donde existen demandas, se procedió de acuerdo al enfoque de Arellano (2004), tomando como datos puntos de anclaje demanda-precio en cada barra con demanda y una elasticidad de $-1/3$. Dado que los datos de demanda son demasiado extensos, no son presentados aquí en detalle, sólo se indican en la tabla 6 las demandas esperadas totales del sistema y los precios utilizados para los puntos de anclaje en cada período, junto con los coeficientes obtenidos para la función de demanda inversa de todo el sistema. Se identifican períodos bien diferenciados correspondientes a horas pico y horas valle. También por razones de brevedad, no se describen aquí las características de las líneas.

Cabe aclarar que gran parte de estos datos, si bien responden a un esquema factible, son ficticios ya que no fueron provistos por el operador. Por otro lado, las unidades hidráulicas del sistema no son unidades de almacenamiento de bombeo, siendo los datos introducidos tomados de unidades existentes en la literatura, con capacidades de producción similares a las de la red estudiada. El objetivo de la introducción de la capacidad de bombeo es estudiar la existencia de escenarios donde esta capacidad sea beneficiosa, y en qué medida puede serlo, a fin de poder evaluar las ventajas que implicaría contar con unidades de este tipo. En ese sentido, se realizaron distintas pruebas numéricas variando los escenarios de disponibilidad de agua en el horizonte de planeamiento como indica la tabla 5, y permitiendo o no el bombeo. El algoritmo fue codificado en SciLab 5.3.2 y ejecutado en una PC AMD Athlon X3 435 2.96 Ghz con 4 GB de RAM. El criterio de parada utilizado fue acotar la norma de la diferencia entre iteraciones sucesivas por una tolerancia que en este caso fue de 10^{-6} . Esto responde a que esta norma permite acotar la distancia de la iterada actual al conjunto solución del problema de equilibrio (véase Parente et al. (2011) y Lotito et al. (2011)). Presentamos a continuación algunos de los resultados obtenidos.

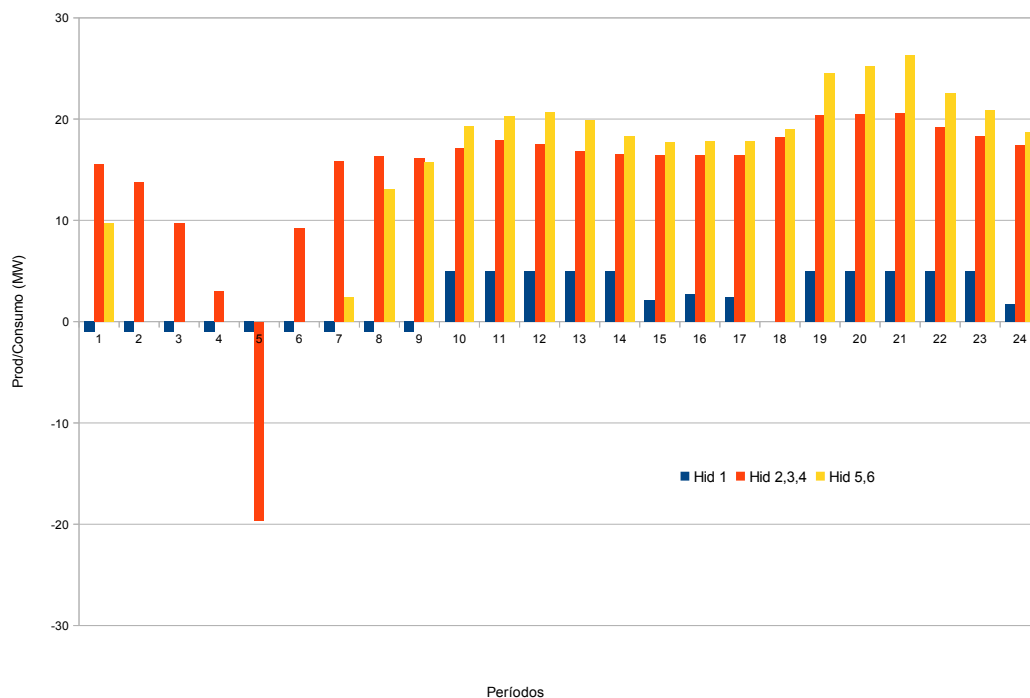


Figura 2: Actividad Hidroeléctrica con Bombeo en Escenario 1

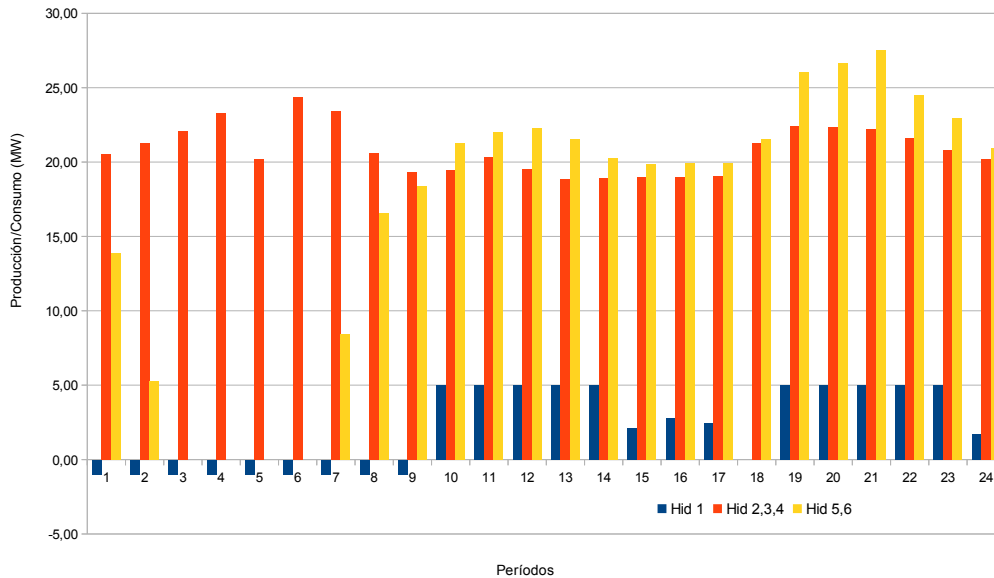


Figura 3: Actividad Hidroeléctrica con Bombeo en Escenario 2

Las figuras 2 y 3 presentan la producción-consumo promedio de las unidades de las compañías hidroeléctricas en cada período, para los dos escenarios considerados. En la tabla 7 se muestra el desempeño del algoritmo en cuanto a cantidad de iteraciones y tiempo computacional, como así también los beneficios obtenidos por las compañías hidroeléctricas en los diferentes escenarios.

Tabla 7: Desempeño y beneficios hidroeléctricos en los distintos escenarios.

Escenario	Bombeo	Iter.	$t(s)$	Ben H 1	Ben H 2	Ben H 3
1	Si	8193	532.31	2311.68	34374.90	24053.59
2	Si	6514	437.11	2228.99	39004.37	25817.57
1	No	7351	498.30	1900.97	33022.10	24188.08
2	No	6670	446.93	1831.86	39053.72	25849.62

Como era de esperar, en los escenarios con poca disponibilidad de agua las compañías tienden a bombear en períodos de baja demanda y precios bajos, a fin de poder generar energía en los períodos más rentables. El bombeo disminuye o desaparece a medida que la disponibilidad de agua es mayor. Por otro lado, si se consideran los mismos escenarios pero se impide la posibilidad de bombeo, los beneficios obtenidos por las compañías que recurrían al bombeo resultan significativamente menores que en los casos en que se admite el bombeo, mientras que no hay cambios significativos en los beneficios de las compañías que no recurrían al bombeo.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo matemático para el estudio del comportamiento de los productores de energía eléctrica en un mercado oligopólico, considerando un planeamiento en el corto plazo y restricciones en la red de transmisión. La metodología propuesta resultó ser efectiva para redes de mediano porte. En el ejemplo estudiado se verifica que para escenarios que presentan escasez de agua, la posibilidad de bombeo en las centrales hidroeléctricas permite obtener mejores beneficios. En los escenarios donde hay disponibilidad de agua, deja de ser necesario el bombeo. Los resultados numéricos son aún preliminares pero muestran que esta metodología puede ser utilizada tanto para el planeamiento de unidades de generación en redes heterogéneas de mediano porte, como para el análisis del mercado y de políticas de regulación por parte de agencias gubernamentales.

REFERENCIAS

- Arellano M.S. *Market Power in Mixed Hydro-Thermal Electric Systems*. In: Econometric Society 2004 Latin American Meetings, Econometric Society, 2004.
- Baldick R. Electricity market equilibrium models: the effect of parameterization. *IEEE Trans. Power Syst.*, 17:1170–1176, 2002.
- Facchinei F. y Pang J. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Springer Series in Operations Research, Springer, Berlin, 2003.
- Lotito P.A., Parente L.A., Rubiales A.J., y Solodov M.S. Solving net constrained hydrothermal Nash-Cournot equilibrium problems via proximal decomposition methods. *To appear*, 2011.
- Lotito P.A., Parente L.A., y Solodov M.V. A class of variable metric decomposition methods for monotone variational inclusions. *Journal on Convex Analysis (special issue, dedicated to Stephen Simons on the occasion of his 70th birthday)*, 16:857–880, 2009.
- Moitre D., Sauchelli V., y García G. Optimización dinámica binivel de centrales hidroeléctricas de bombeo en un pool competitivo - parte i: Modelo y algoritmo. *Revista IEEE América Latina*, 3:62–67, 2005.
- Parente L.A., Lotito P.A., Mayorano F.J., Rubiales A.J., y Solodov M.S. The hybrid proximal decomposition method applied to the computation of a Nash equilibrium for hydrothermal electricity markets. *Optimization and Engineering*, 12:277–302, 2011.
- Parente L.A., Lotito P.A., y Solodov M.S. A class of inexact variable metric proximal point algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 19:240–260, 2008.
- Rivier M., Ventosa M., y Ramos A. *A generation operation planning model in deregulated electricity markets based on the complementarity problem*. In: Ferris, M.C., Mangasarian, O.L., Pang, J.-S. (Eds.), *Applications and Algorithms of Complementarity*, pages 273–298, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- Scott T.J. y Read E.G. Modelling hydro reservoir operation in a deregulated electricity market. *International Transactions in Operational Research*, 3:243–253, 1996.
- Wood A.J. y Wollenberg B.F. *Power Generation, Operation, and Control (2nd Edition)*. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc, 1996.