

## SIMULACIÓN NUMÉRICA SIN MALLA PARA LA ECUACIÓN REGULARIZADA DE ONDAS LARGAS (RLW)

Luis C. Pérez<sup>a</sup> y Rodrigo J. Meneses<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile, luis.perez@usm.cl*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile, rodrigo.meneses@usm.cl*

**Palabras Clave:** Ecuación regularizada de ondas largas, métodos sin malla, puntos finitos.

**Resumen.** El objetivo de este trabajo es simular y analizar soluciones numéricas de problemas de valor inicial descritos por medio de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) semilineales conocidas como Ecuación Regularizada de Ondas Largas (RLW) la cual es utilizada para caracterizar una cantidad importante de fenómenos físicos de distinta naturaleza, tales como modelación de olas bajas, burbujas de mezclas líquidas, ondas en plasmas calientes, colisión de ondas hidromagnéticas, entre muchos otros.

Para la implementación numérica se considera una discretización equiespaciada en la variable  $x$  y en la variable  $t$ . Para la obtención del esquema numérico los criterios son los siguientes:

- Uso de diferencias finitas en la derivación temporal.
- Uso del método sin malla de Puntos Finitos (FPM) en la variable espacial.
- Linealización de las ecuaciones en el sistema no lineal que se genera a partir la discretización.

El FPM es un método sin malla de formulación fuerte. La aproximación de la función solución se realiza de manera local en cada uno de los puntos  $x_j$  considerados en la discretización, se emplea la técnica de mínimos cuadrados ponderados y un procedimiento de colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales. Si en la discretización espacial se consideran  $n$  nodos, para cada estado  $t_k$  se genera un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables. Las incógnitas en estos sistemas corresponden a los valores  $u(x_j, t_k)$  con  $u(x, t)$  solución exacta del problema de Cauchy.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Por medio de las leyes físicas correspondientes al fenómeno que se quiere modelar, muchos problemas en mecánica de fluidos o en mecánica de sólidos (elasticidad o plasticidad) se formulan en términos de ecuaciones integrales o bien diferenciales junto con condiciones propias del modelo considerado.

A partir de ciertos supuestos y simplificaciones en los modelos matemáticos se pueden obtener resultados para el uso directo. Para problemas más generales en donde las simplificaciones no entregan los datos requeridos, por medio de resultados matemáticos teóricos y simulaciones numéricas se pueden obtener la información y aproximaciones del evento modelado.

El objetivo de este trabajo es simular y analizar soluciones numéricas de problemas de valor inicial (problemas de Cauchy) descritos por medio de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) semilineales. Estos problemas tienen una justificación física puntual pero pueden ser utilizados para la modelación de diversos eventos.

Bajo ciertas condiciones específicas, en este trabajo se estudian numéricamente problemas de valor inicial para la ecuación

$$\partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u - \partial_{xxt} u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times ]0, \infty[, \quad (1)$$

sujeto a una condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  en  $\mathbb{R}$ , apropiadamente regular.

El interés central en este trabajo es validar un esquema numérico alternativo a los que se han presentado en otros artículos (Shokri y Dehghan (2010), Kutluay y Esen (2006), etc). Para esto se consideran  $u_0$  tal que el problema anterior tiene solución clásica explícita y de este modo utilizarla en la comparación con la aproximación numérica. Por medio del estudio del tipo de error en las aproximaciones se tiene una validación o bien un control sobre el esquema propuesto.

Mencionamos que la ecuación (1) comunmente es llamada ecuación regularizada de ondas largas (RLW) y en sistemas físicos particulares tiene la misma justificación formal que la ecuación de Korteweg-de Vries (KDV)

$$\partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R} \times ]0, \infty[. \quad (2)$$

Estas ecuaciones son utilizadas para modelar una cantidad importante de fenómenos físicos de distinta naturales tales como: modelación de olas bajas; burbujas de mezclas líquidas; ondas en plasmas calientes; colisión de ondas hidromagnéticas, entre muchos otros. Ver Lamb (1980) para la deducción y aplicaciones de este tipo de ecuaciones y Lax (1968), Rosenau y Hyman (1993), Miura (1968) como referencias adicionales.

Dentro de las particularidades cualitativas de las ecuaciones (1), (2) se encuentra la existencia de soluciones explícitas llamadas *solitones*. Este tipo de soluciones tienen propiedades de gran interés y se utilizan para el estudio de ciertos comportamientos cualitativos límites de soluciones más generales satisfaciendo condiciones iniciales en cierto espacio de funciones.

Por otra parte, si estudiamos los problemas anteriores en la clase de funciones no periódicas definidas para todo  $-\infty < x < \infty$ , en la formulación del esquema numérico se debe considerar un criterio de selección de un dominio acotado para la variable espacial  $x \in \mathbb{R}$ , junto con condiciones de borde. Este tipo de condiciones no tienen una interpretación física directa y por

lo general generan errores en las aproximaciones numérica. En relación a lo anterior remarcamos que las soluciones de (1) dependen continuamente de los datos iniciales, mientras que en la ecuación (2) no se tiene necesariamente este tipo de estabilidad. Por lo tanto los resultados numéricos para (2), como aproximaciones, son de menor precisión. Ver Benjamin et al. (1972) para mayor detalles de los aspectos teóricos de los problemas anteriores.

En la simulación numérica se considera una discretización equiespaciada en la variable espacial  $x$  y en la variable temporal  $t$ . Para la formulación del esquema numérico los criterios son los siguientes:

- Definición del intervalo para la variable espacial en relación a la forma de la condición inicial.
- Para todo tiempo  $t > 0$  en la simulación, condiciones tipo Dirichlet en los extremos del intervalo de la variable espacial.
- Uso de diferencias finitas en la derivación temporal.
- Uso del método sin malla de Puntos Finitos (FPM) en la variable espacial Onate et al. (1996), Pérez Pozo et al. (2009).
- Linealización de las ecuaciones en el sistema no lineal que se genera a partir la discretización.

La estructura del esquema anterior es similar a la presentadas en otros artículos del tema. La diferencia es el método utilizado en la aproximación para cada uno de los instantes de la discretización considerada. Mencionamos que el FPM es un método sin malla de formulación fuerte. La aproximación de la función solución se realiza de manera local en cada uno de los puntos  $x_j$  considerados en la discretización espacial, empleando la técnica de mínimos cuadrados ponderados y un procedimiento de colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones algebraicas.

Si en la discretización espacial se consideran  $n$  nodos, para cada estado  $t_k$  se genera un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables. Las incógnitas en estos sistemas corresponden a los valores  $u(x_j, t_k)$  con  $u(x, t)$  solución exacta del problema de Cauchy. A partir de estos valores aproximados ( $u(x_j, t_k)$ ) se construye la aproximación local definidas en las cercanías del nodo  $x_j$  para la iteración  $t_k$ .

Dado que las EDPs (1),(2) son semilineales, los sistemas algebraicos generados por medio de la discretización (del esquema numérico) son no lineales. Previo a la resolución se considera una aproximación lineal para estos sistemas.

## 2. PRELIMINARES

Comenzamos aclarando las notaciones utilizadas en la formulación de las EDPs.

Utilizamos  $\partial_i u$  para la derivada parcial de la función  $u(x, t)$  con respecto a la variable  $i$ , con  $i = t$  o bien  $i = x$ . Similar para las derivadas de orden superior.  $\mathbb{R}^+$  denota el conjunto  $]0, \infty[$ . Seguimos trabajando con  $x \in \mathbb{R}$  variable espacial y  $t \in [0, \infty[$  variable temporal. Utilizamos la notación  $\mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$  y  $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[$ .

En este trabajo se estudia principalmente la ecuación (1). Con respecto al marco teórico, utilizamos la noción de solución clásica, es decir funciones  $u(x, t)$  suficientemente regular de tal modo que la EDP se cumpla en cada uno de los puntos del dominio de definición.

Para la regularidad de la condición inicial  $u_0$  consideramos el espacio de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces continuamente diferenciable en todo  $\mathbb{R}$ , denotado por  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ .

Seguimos trabajando con  $u_0(x)$  de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} (u_0)^2 + (u_0')^2 dx < \infty$ . De este modo, el problema de Cauchy para (1) tiene única solución clásica global, es decir existe  $u(x, t)$  definida en todo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$  tal que la EDP se satisface puntualmente para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , cumpliéndose  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

Además, la solución  $u(x, t)$  depende continuamente del dato inicial, i.e. para pequeñas variaciones en la condición inicial se tienen pequeñas variaciones en los valores de la función (en todo su dominio).

Además, se tiene  $u$ ,  $\partial_x u$  y todas las derivadas con respecto a  $t$  son asintóticas a cero para  $|x| \rightarrow \infty$ . Ver Teorema 1 en Benjamin et al. (1972).

Como se menciona en la introducción, las ecuaciones (1), (2) poseen varias propiedades cualitativas que pueden utilizarse para el control de las aproximaciones de las soluciones numéricas. Utilizando la EDP se prueba la conservación de las siguientes cantidades.

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \\ E_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, t))^2 + (\partial_{xx} u(x, t))^2 dx \\ E_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} 3(u(x, t))^2 + (u(x, t))^3 dx \end{aligned} \quad (3)$$

Tomando sólo el dato inicial (suficientemente regular) se calculan  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ . Luego, los errores de las aproximaciones numéricas se pueden estudiar desde (3).

Este tipo de cantidades integrales se utilizan para obtener resultados cualitativos sobre las soluciones de (1). Los resultados cualitativos que remarcamos son los siguientes: teoremas de existencia de soluciones; unicidad de soluciones; continuidad con respecto al dato inicial. Ver Benjamin et al. (1972) para más detalle.

### 3. ESQUEMA NUMÉRICO

Los problemas se estudian numéricamente en dominios acotados de la forma  $[a, b] \times [0, T] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , por lo tanto, se deben considerar condiciones de frontera en la variable espacial. En este trabajo se consideran condiciones de frontera tipo Dirichlet.

Para el problema

$$\partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u - \partial_{xx} u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

bajo las condiciones sobre  $u_0(x)$ , consideremos problemas mixtos de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u - \partial_{xx} u = 0 & \text{en } ]a, b[ \times ]0, T]. \\ u(a, t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(b, t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } [a, b] \end{cases} \quad (4)$$

con  $g(x)$  de tal modo que se relacione con  $u_0(x)$  según algún criterio. Las condiciones de regularidad sobre  $u_0$  se imponen de tal modo que sean válidos los resultados teóricos indicados en la Sección 2.

La función  $g(x)$  en (4) la consideramos continua tal que  $g(a) = g(b)$  y para  $x \in [a', b'] \subset ]a, b[$  se cumple  $g(x) = u_0(x)$ , con  $a', b'$  parámetros escogidos en cada una de las simulaciones.

Las aproximaciones numéricas se realizan en los puntos  $(x_j, t_k)$  con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$t_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \text{donde } h = \frac{T}{m}, \quad \text{con } T > 0 \text{ fijo.}$$

En lo que sigue del trabajo, las aproximaciones que se obtienen en el instante de tiempo  $t_k$  serán llamadas aproximaciones en la iteración  $k$ -ésima.

Si suponemos que conocemos la función solución en la iteración  $k$ -ésima, la aproximación de la función solución  $u(x, t)$  en el punto  $x_i$  en la iteración  $k + 1$  se obtiene a partir del siguiente esquema

$$\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + (u(x_i, t_{k+1})) \partial_x u(x_i, t_{k+1}) + \frac{\partial_{xx} u(x_i, t_{k+1}) - \partial_{xx} u(x_i, t_k)}{\Delta t} = 0$$

Por simplicidad notacional consideramos en lo que sigue del trabajo  $u_i^k = u(t_k, x_i)$ , es decir, el superíndice indica la iteración, y el subíndice indica el nodo considerado en el espacio. Similar para las derivadas parciales.

Consideremos la siguiente aproximación, [Islam et al. \(2009\)](#),

$$u_i^{k+1} \partial_x u_i^{k+1} \approx u_i^{k+1} \partial_x u_i^k + u_i^k \partial_x u_i^{k+1} - u_i^k \partial_x u_i^k$$

y un esquema  $\theta$ -ponderado en la derivación espacial de orden 1. Para mayor claridad omitimos el subíndice  $i$ . Para cada uno de los nodos  $x_i \in ]a, b[$ , el esquema numérico en la  $n$ -ésima iteración es el siguiente

$$\begin{aligned} u^{k+1} + \Delta t \cdot \theta \left( \partial_x u^{k+1} + [u^k \partial_x u^{k+1} + u^{k+1} \partial_x u^k] \right) - \partial_{xx} u^{k+1} = \\ = u^k + \Delta t \left( (2\theta - 1) u^k \partial_x u^k - (1 - \theta) \partial_x u^k \right) - \partial_{xx} u^k \end{aligned} \quad (5)$$

Para cada uno de los  $x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  y cada iteración  $t_{k+1}$ , por medio del FPM obtenemos una aproximación local de la función  $u(x, t_{k+1})$  en el punto  $x_i$ . Denotemos por  $\tilde{u}_{i,k+1}(x)$  a esta aproximación en las cercanías de  $x_i$ .

Reemplazando en (5) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,k+1} + \Delta t \cdot \theta \left( \tilde{u}'_{i,k+1} + \left[ \tilde{u}_{i,k} \tilde{u}'_{i,k+1} + \tilde{u}_{i,k+1} \tilde{u}'_{i,k} \right] \right) - \tilde{u}''_{i,k+1} = \\ = \tilde{u}_{i,k} + \Delta t \left( (2\theta - 1) \tilde{u}_{i,k} \tilde{u}'_{i,k} - (1 - \theta) \tilde{u}'_{i,k} \right) - \tilde{u}''_{i,k} \end{aligned} \quad (6)$$

De manera similar se obtiene el esquema numérico para (2).

#### 4. MÉTODO NUMÉRICO. APLICACIÓN DEL MPF

Como se indica en la Sección anterior, por medio del FPM se obtiene una aproximación local de la función incógnita para cada uno de los nodos  $x_j$  de la discretización. Por medio de la minimización de errores cuadráticos ponderados se formula el criterio para la obtención de la aproximación local. A continuación detallamos el método.

Por simplicidad notacional, el método se presenta sólo para funciones en variable  $x$  remarcando que este proceso se debe repetir en cada una de las iteraciones  $t_k$  de la discretización temporal considerada en el esquema numérico de la sección anterior.

Dado  $x_j$ , consideremos un subintervalo  $I_j \subset [a, b]$  donde se realiza la aproximación local. Se debe cumplir  $x_j \in I_j$ .

Sean  $\{x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}\}$  nodos de la discretización contenidos en  $I_j$ . Aquí  $n_j$  denota la cantidad de nodos vecinos (incluyendo al nodo  $x_j$ ). El primer subíndice (de izquierda a derecha) denota el nodo que fue considerado y a partir del cual se desarrolla la elección del resto mientras que la segunda etiqueta se utiliza para diferenciar entre los nodos vecinos (vecinos al nodo  $x_j$ ). El conjunto  $\{x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}\}$  es llamado *nube* asociada a  $x_j$  mientras que  $x_j$  es llamado *nodo estrella*.

Para la definición de la forma de la función aproximación se consideran  $p_{j,1}(x), \dots, p_{j,m_j}(x)$  funciones linealmente independientes en  $I_j$ . Por lo general la cantidad de funciones l.i consideradas es la misma para cada uno de los subintervalos. En este trabajo se consideran  $m_j = 4$  con  $p_{j,1}(x) = 1$ ,  $p_{j,2}(x) = x$ ,  $p_{j,3}(x) = x^2$ ,  $p_{j,4}(x) = x^3$ .

Para la correcta implementación del FPM, se debe imponer la condición  $n_j > m_j = 4$ .

Tomando  $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,m_j}$ , la aproximación de  $u(x)$  en  $I_j$  es la forma

$$\tilde{u}_j(x) = \alpha_{j,1}1 + \alpha_{j,2}x + \alpha_{j,3}x^2 + \alpha_{j,4}x^3 \quad (7)$$

Para  $w_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  por determinar, se escogen los  $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,4}$  tal que se minimice el valor

$$\sum_{k=1}^{n_j} w(x_{j,k}) (u(x_{j,k}) - \tilde{u}_j(x_{j,k}))^2 \quad (8)$$

Por lo general, la función  $w_j$  recibe el nombre de *función peso*, y las funciones  $1, x, x^2, x^3$  las llamaremos *polinomios de la base de interpolación*.

Sea  $h_{j,k}$  distancia entre el nodo  $x_{j,k}$  con el nodo estrella. En la formulación del MPF la selección común en la función de peso es la que sigue:

$$w(x_{j,k}) = \begin{cases} \frac{\exp\{-(h_{j,k}/\lambda_j)\} - \exp\{-(r_j/\lambda_j)\}}{1 - \exp\{-(r_j/\lambda_j)\}} & \text{si } h_{j,k} \leq r_j \\ 0 & \text{si } h_{j,k} > r_j \end{cases}$$

siendo  $r_k = q \cdot h_{\text{máx}}$ , con  $h_{\text{máx}} = \text{máx}\{h_{j,1}, \dots, h_{j,n_j}\}$ , y  $\lambda = \beta \cdot r_j$ , siendo  $q, \beta$  parámetros positivos escogidos según algún criterio.

Para el control de la estabilidad numérica que se detalla más adelante, se continua trabajando con

$$p_{j,1}(x) = 1, \quad p_{j,2}(x) = \left(\frac{x - x_j}{h_{\text{máx}}}\right), \quad p_{j,3}(x) = \left(\frac{x - x_j}{h_{\text{máx}}}\right)^2, \quad p_{j,4}(x) = \left(\frac{x - x_j}{h_{\text{máx}}}\right)^3$$

siendo  $x_{j,3} = x_j$ .

El criterio de selección de nodos en la nube es el siguiente: Para cada iteración y en caso de existir, dado un nodo estrella  $x_j$  los dos nodos más cercanos por la derecha y por la izquierda en la discretización.

Sean

$$\mathbf{p}_j(x) = [p_{j,1}(x) \dots p_{j,4}(x)]$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j,1} \\ \vdots \\ \alpha_{j,4} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_j = \begin{pmatrix} u(x_{j,1}) \\ \vdots \\ u(x_{j,n_j}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_j(x_{j,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j(x_{j,n_j}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Sea  $J_j(\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n_j})$  función definida por medio de la cantidad dada en (8). Directamente de la definición, el valor mínimo de  $J_j$  se alcanza en el punto crítico. Por lo anterior, se escogen los  $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n_j}$  tal que  $\nabla J_j = \mathbf{0}$ .

Utilizando (9) se obtiene la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\alpha}_j = A_j^{-1} B_j \mathbf{U}_j \quad (10)$$

donde

$$A_j = \mathbf{P}_j \mathbf{W}_j \mathbf{P}_j^t \quad B_j = \mathbf{P}_j \mathbf{W}_j$$

siendo  $\mathbf{W}_j$  la matriz diagonal de orden  $n_j \times n_j$  con término  $(\mathbf{W}_j)_{i,i} = w_j(x_{j,i})$ . De este modo, reemplazando (10) en (7) se obtiene

$$\tilde{u}_j(x) = \boldsymbol{\Phi}_j(x) \mathbf{U}_j$$

con

$$\boldsymbol{\Phi}_j(x) = \mathbf{p}_j(x) A_j^{-1} B_j$$

Consideremos las siguientes notaciones

$$\mathbf{U}_j^k = \begin{pmatrix} u(x_{j,1}, t_k) \\ \vdots \\ u(x_{j,n_j}, t_k) \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_j^{k+1} = \begin{pmatrix} u(x_{j,1}, t_{k+1}) \\ \vdots \\ u(x_{j,n_j}, t_{k+1}) \end{pmatrix}$$

De este modo

$$\tilde{u}_j(x, t_k) = \boldsymbol{\Phi}_j(x) \mathbf{U}_j^k \quad \tilde{u}_j(x, t_{k+1}) = \boldsymbol{\Phi}_j(x) \mathbf{U}_j^{k+1}.$$

Reemplazando en (6) se obtienen los sistemas algebraicos.

En lo que sigue del trabajo se consideran 5 nodos en cada una de las nubes. En caso de no existir esta cantidad de nodos vecinos, se considera el número mayor de vecinos (de la discretización) hacia la izquierda y hacia la derecha (nunca excediendo la cantidad de dos en ambos

casos), ejemplo, para  $x_0 = a$  la nube corresponde ser  $\{x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}\}$ , con  $x_{0,1} = x_0$ ,  $x_{0,2} = x_1$ ,  $x_{0,3} = x_2$ . Similar para  $x_1, x_{n-1}, x_n$ .

**Remarcamos:** Para cada  $j$  los parámetros para la función de ponderación  $w_j$  son fijos dados por:  $q = 1,1$ ,  $\beta = 0,25$  y el número de puntos en la discretización igual a 300.

## 5. SIMULACIONES NUMÉRICAS.

A partir de las indicaciones dadas en las secciones anteriores, en esta sección presentamos los resultados de simulaciones para cierta clase de problemas de Cauchy donde la solución se conoce explícitamente. Ocupamos estos resultados como problemas test para validar los resultados numéricos como también para estudiar la propagación de errores (propias de todo esquema numérico) y la sensibilidad con respecto a las condiciones de borde artificiales.

Las simulaciones numéricas para cada problema de Cauchy las presentamos en subsecciones para mayor claridad.

En cada uno de los casos utilizamos integración numérica en la aproximación de las siguientes integrales

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_a^b u(x, t) dx \\ C_2 &= \int_a^b (u(x, t))^2 + (\partial_{xx} u(x, t))^2 dx \\ C_3 &= \int_a^b 3(u(x, t))^2 + (u(x, t))^3 dx \end{aligned} \quad (11)$$

Estas integrales se relacionan con las cantidades  $E_1, E_2, E_3$  en (3). Aquí  $a, b$  corresponden a los extremos del intervalo para la variable espacial considerado en cada uno de los problemas.

Utilizamos suma de Riemann para la aproximación numérica de las integrales en (11).

Sea  $h$  máximo ancho de los subintervalos generados de la discretización espacial (fija para toda iteración  $t_k$ ). Por medio de las cantidades

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^{N_p} |u(x_j, t_k) - \hat{u}(x_j, t_k)|^2} \quad (12)$$

y

$$L_\infty = \max_j |u(x_j, t_k) - \hat{u}(x_j, t_k)| \quad (13)$$

tenemos una noción del error global,  $L_2$ , y el nodo donde la aproximación se aleja en mayor cantidad del valor real,  $L_\infty$ .

### 5.0.1. Propagación de una onda solitaria. Simulación de un Solitón.

Para el problema (18) consideremos la condición inicial

$$u_0(x) = 3c \operatorname{sech}^2[kx], \quad (14)$$



con  $k$  parámetro positivo por determinar. La solución exacta viene dada por

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 [k(x - vt)], \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \infty[. \quad (15)$$

Esta función puede representa una onda solitaria de amplitud  $3c$ , rapidez  $v = 1 + c$ . El parámetro  $k = \sqrt{c/v}/2$  se relaciona con la forma de esta onda (*Solitón*).

En la simulación numérica utilizamos  $c = 0.01, 0.055, 0.1$ .

En el esquema los parámetros son  $\Delta t = 0,1, T = 20$  y el intervalo  $[a, b] = [-40, 60]$ . La discretización espacial es equiespaciada con  $x_j = -40 + j \cdot h$  para  $h = (60 + 40)/300$ .

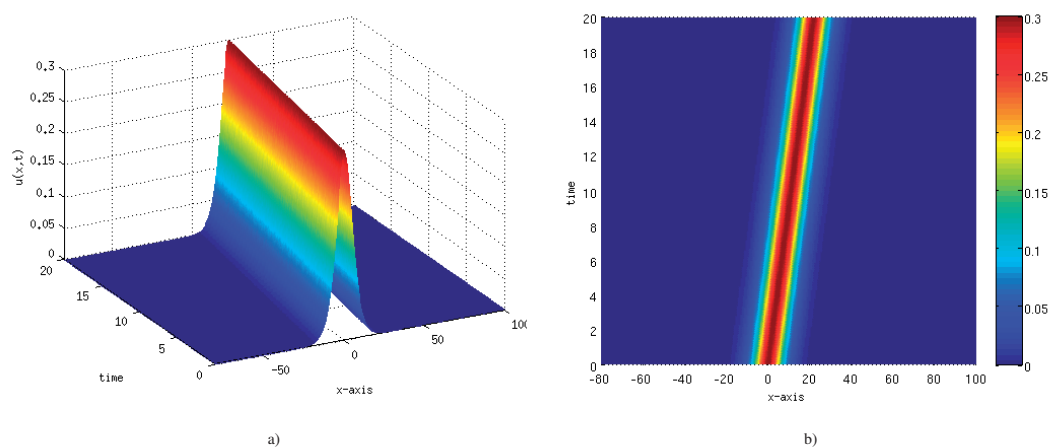


Figura 1: a) Perspectiva y b) vista superior de la gráfica de la solución numérica para  $c = 0,1$ .

Para los distintos valores del parámetro  $c$  las cantidades  $L_2, L_\infty$  y las aproximaciones de  $C_1, C_2$  y  $C_3$  son presentadas en las siguientes tablas

Tabla 1: Estimativos de errores y aproximaciones de  $C_1, C_2, C_3$  para  $c = 0,01$ .

$t$	$L_2$	$L_\infty$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0,000039	0,000041	1,205460	0,024167	0,072938
5	0,000060	0,000030	1,205479	0,024167	0,072938
10	0,000077	0,000030	1,205406	0,024167	0,072938
15	0,000083	0,000030	1,205303	0,024167	0,072938
20	0,000089	0,000043	1,205127	0,024167	0,072938

### 5.0.2. Interacción entre dos ondas solitarias. Colisión entre dos solitones positivos.

Para  $k_1, k_2$  parámetros por determinar y  $c_j = 4k_j^2/(1 - 4k_j^2)$  consideremos (18) con condición inicial

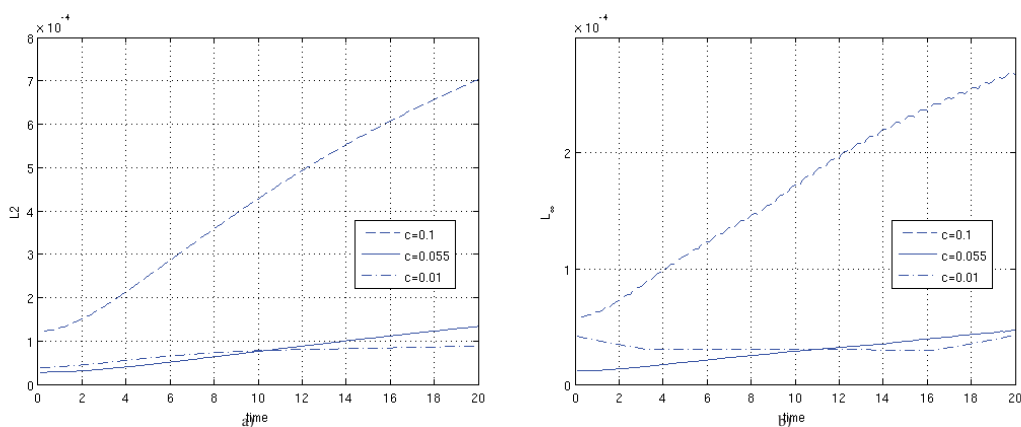
$$u_0(x) = \sum_{j=1}^2 3c_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - x_j)), \quad (16)$$

Tabla 2: Estimativos de errores y aproximaciones de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  para  $c = 0,055$ .

$t$	$L_2$	$L_\infty$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0,000028	0,000012	2,890605	0,321290	0,995896
5	0,000045	0,000019	2,890605	0,321290	0,995896
10	0,000076	0,000028	2,890605	0,321290	0,995896
15	0,000106	0,000037	2,890605	0,321290	0,995896
20	0,000133	0,000047	2,890605	0,321290	0,995896

Tabla 3: Estimativos de errores y aproximaciones de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  para  $c = 0,1$ .

$t$	$L_2$	$L_\infty$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	0,000123	0,000058	3,979950	0,810520	2,579202
5	0,000249	0,000111	3,979950	0,810520	2,579202
10	0,000428	0,000172	3,979950	0,810521	2,579202
15	0,000580	0,000230	3,979950	0,810521	2,579202
20	0,000702	0,000268	3,979950	0,810521	2,579202

Figura 2: a)  $L_2$  y b)  $L_\infty$  estimativos de errores.

Los parámetros en esta simulación son los siguientes:  $k_1 = 0,4$ ,  $k_2 = 0,3$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 35$ , para la discretización temporal consideramos  $\Delta t = 0,01$ ,  $T = 30$  y el intervalo espacial  $[a, b] = [0, 120]$ . La discretización espacial es equiespacia donde  $x_j = 0 + j \cdot h$  con  $h = 120/300$ .

Las soluciones numéricas para distintos tiempos se presentan en Fig. 3 y 4.

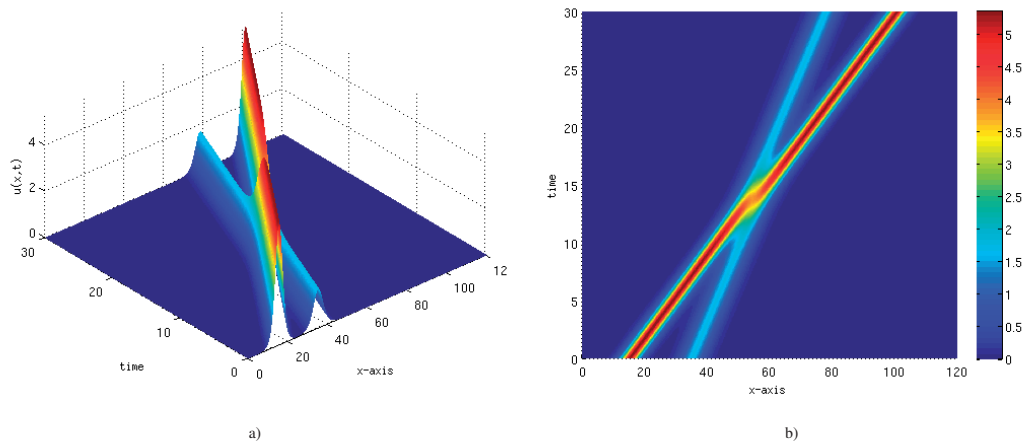


Figura 3: a) Perspectiva y b) vista superior de la interacción entre dos solitones.

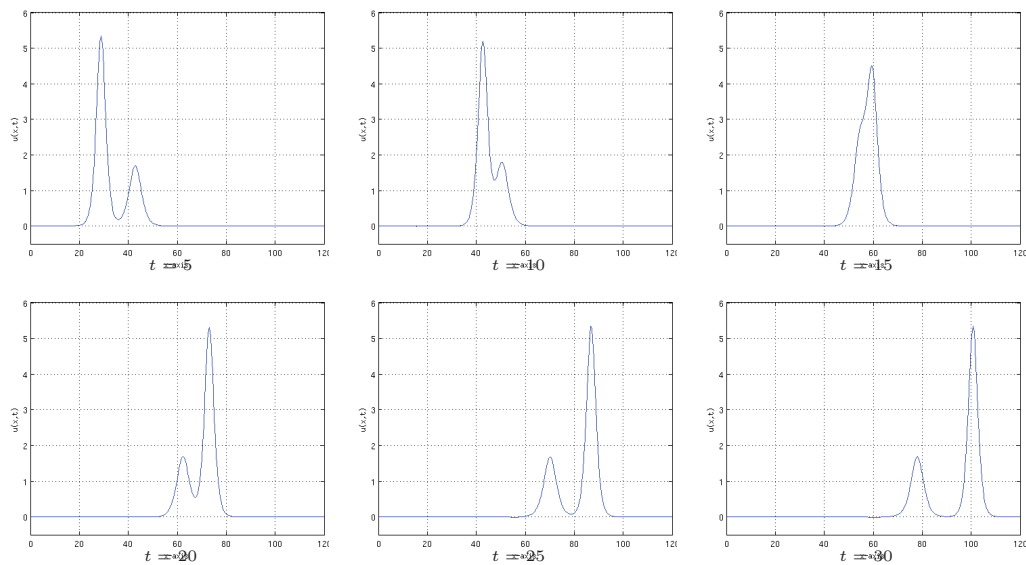


Figura 4: Detalle de la interacción para distintos tiempos.

Tabla 4: Aproximaciones numéricas de las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  para distintos tiempos (iteraciones  $t_k$ ).

$t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	37,916479	120,674902	745,391797
5	37,916674	120,676914	745,396694
10	37,916670	120,607313	744,749676
15	37,916673	120,409138	743,040480
20	37,916671	120,663186	745,265479
25	37,916672	120,678190	745,412442
30	37,916662	120,678701	745,417152

### 5.0.3. Interacción entre dos ondas solitarias. Colisión entre un solitón positivo y uno negativo.

Para  $k_1$ ,  $k_2$  parámetros por determinar y  $c_j = 4k_j^2/(1 - 4k_j^2)$  consideremos (18) con condición inicial

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^2 3c_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - x_j)), \quad (17)$$

Los parámetros utilizados en esta simulación son los siguientes  $k_1 = 0,4$ ,  $k_2 = 0,6$ ,  $x_1 = 23$ ,  $x_2 = 38$ , para la discretización temporal consideramos  $\Delta t = 0,1$ ,  $T = 20$  y el intervalo espacial  $[a, b] = [-10, 80]$ . La discretización espacial es equiespaciada con  $x_j = -10 + j \cdot h$  para  $h = (80 + 10)/300$ .

Por medio de este tipo de condición inicial modelamos la interacción entre dos ondas solitarias (*solitones*) con amplitudes de distinto signo. Ver Figura 6. Dado que las amplitudes de estas ondas son distinto signo diremos que corresponde a la colisión entre un solitón positivo y un solitón negativo.

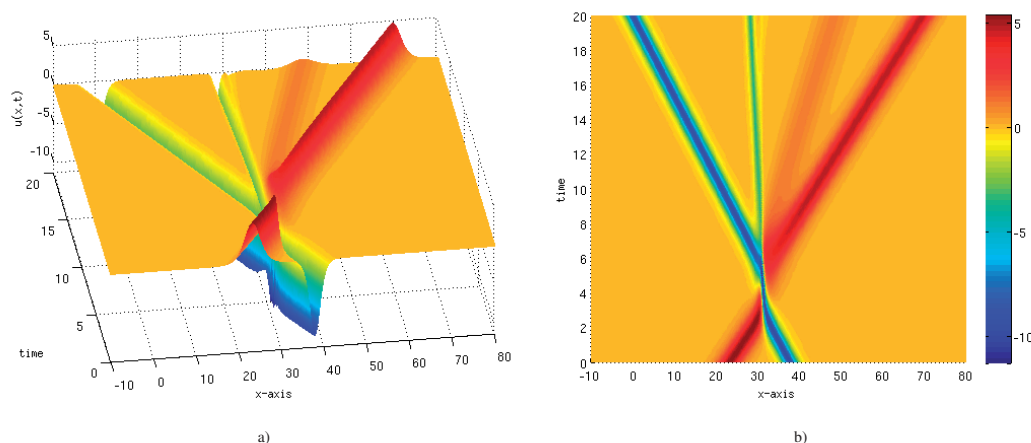


Figura 5: a) Perspectiva b) Vista superior de la interacción entre dos solitones.

A partir de los resultados numéricos presentados gráficamente en la Figura 6 notamos la formación de otras ondas luego de la interacción. Remarcamos la diferencia en los resultados obtenidos en la subsección anterior. Ver Figura 4. Utilizando los resultados presentados en las Tablas 4, 5 notamos distintas variaciones de las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Directamente de es-

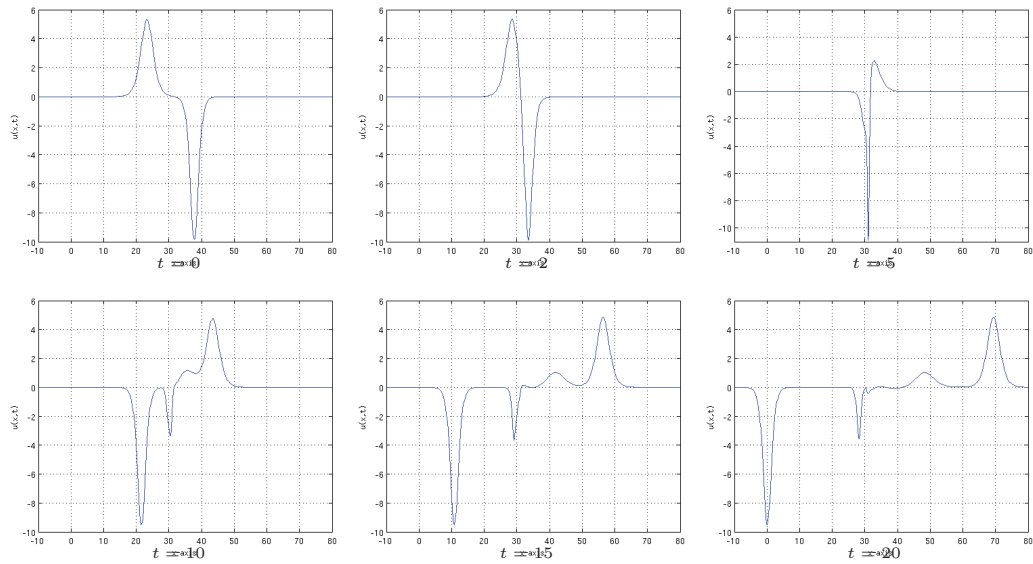


Figura 6: Aproximaciones numéricas de las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  para distintos tiempos (iteraciones  $t_k$ ).

Tabla 5: Aproximaciones numéricas de las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  para distintos tiempos (iteraciones  $t_k$ ).

$t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	-6,06072	383,42957	-354,233156
2	-6,06072	383,48023	-353,305989
5	-6,06072	406,31404	-379,084777
10	-6,06072	383,69552	-354,093811
15	-6,06072	383,64904	-353,883879
20	-6,07021	383,63883	-353,856241

tos resultados se tienen mejores aproximaciones numéricas para el problema de la subsección anterior donde se modelaba la interacción entre dos solitones positivos.

**5.0.4. Evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables. Generación de solitones.**

En esta parte consideramos problemas de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u - \mu \partial_{xxt} u = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \exp(-(x - 7)^2) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \quad (18)$$

Los parámetros en la simulación son los siguientes  $\mu = 0.1, 0.001, 0.01$  para la discretización temporal  $\Delta t = 0,01, T = 10$  y el intervalos  $[a, b] = [0, 30]$ . La discretización espacial la consideramos equiespaciada con  $x_j = j \cdot h$  para  $h = 30/300$ .

En esta onsiación inicial  $u_0(x) = \exp(-(x - 7)^2)$  se generan ondas solitarias (*solitones*). En la literatura del tema este tipo de condición inicial es llamado *pulso Maxwelliano*.

Las caraterísticas éstos se relacionana con el parámetro  $\mu$ .

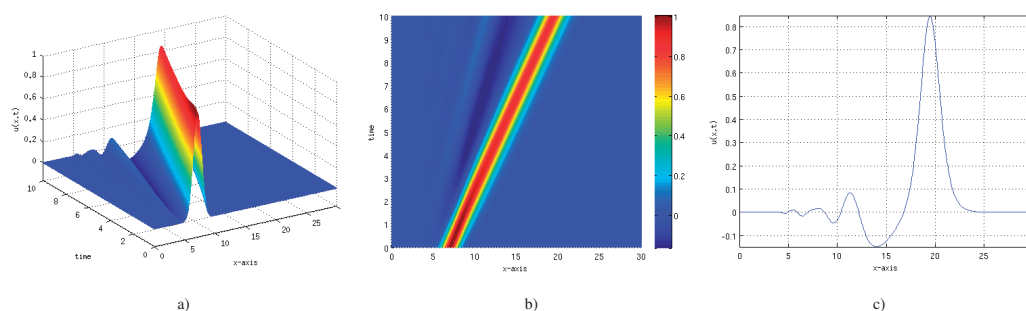


Figura 7: a) Perspectiva, b) vista superior y c) evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables para  $\mu = 0,1$ .

Tabla 6: Aproximaciones de  $C_1, C_2, C_3$  en la evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables para  $\mu = 0,1$ .

$t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	1,772454	1,378633	4,783269
1	1,772454	1,378617	4,783257
2	1,772454	1,378531	4,783179
3	1,772454	1,378455	4,783110
4	1,772454	1,378412	4,783069
5	1,772454	1,378389	4,783043
6	1,772454	1,378375	4,783026
7	1,772454	1,378367	4,783015
8	1,772454	1,378361	4,783006
9	1,772454	1,378357	4,783000
10	1,772454	1,378354	4,782995

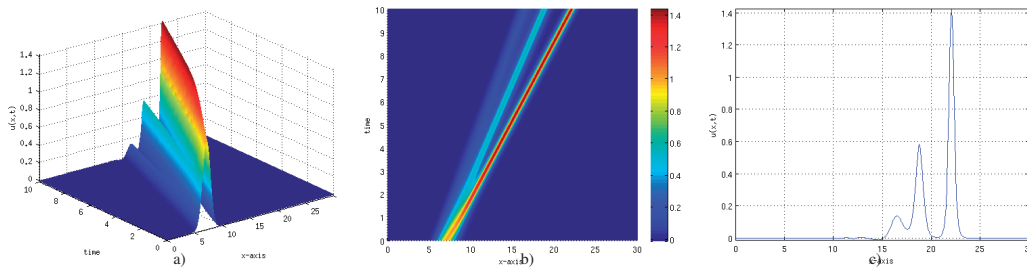


Figura 8: a) Perspectiva b) vista superior y c) evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables para  $\mu = 0,01$ .

Tabla 7: Aproximaciones de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  en la evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables para  $\mu = 0,01$ .

$t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	1,772454	1,265846	4,783269
1	1,772454	1,266067	4,784169
2	1,772454	1,267009	4,788193
3	1,772454	1,267889	4,792014
4	1,772454	1,268268	4,793725
5	1,772454	1,268398	4,794333
6	1,772454	1,268444	4,794551
7	1,772454	1,268463	4,794639
8	1,772454	1,268473	4,794680
9	1,772454	1,268479	4,794702
10	1,772454	1,268483	4,794716

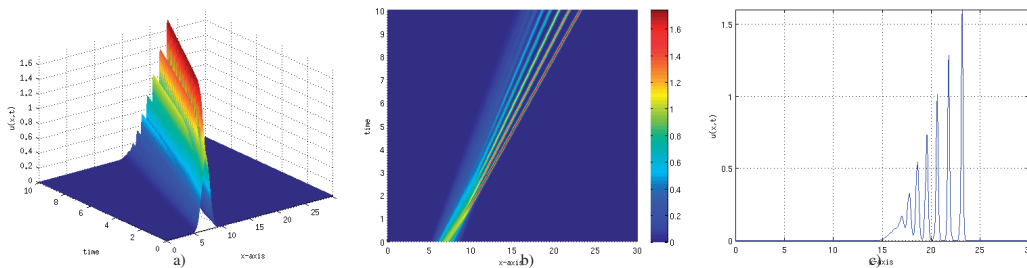


Figura 9: a) Perspectiva, b) vista superior y c) evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables para  $\mu = 0,001$ .

Tabla 8: Aproximaciones de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  en la evolución de un pulso Maxwelliano en ondas estables para  $\mu = 0,001$ .

$t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0	1,772454	1,254567	4,783269
1	1,772454	1,254850	4,785121
2	1,772454	1,265146	4,859827
3	1,772454	1,274927	4,929081
4	1,772454	1,278024	4,950083
5	1,772454	1,278888	4,954447
6	1,772454	1,279216	4,955791
7	1,772454	1,279563	4,958827
8	1,772454	1,279775	4,960823
9	1,772454	1,279696	4,959418
10	1,772454	1,279591	4,957822

## 6. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.

Para terminar este trabajo presentamos esta sección dividida en dos subsecciones: comentarios; conclusiones.

En la primera subsección presentamos una simulación numérica para la ecuación (2) con condición inicial tal que la solución se conoce explícitamente. Como mencionamos en la introducción y en la sección de preliminares, los problemas de Cauchy para la ecuación (2) no son necesariamente estables con respecto al dato inicial. Por medio de las condiciones artificiales (tipo Dirichlet) este tipo de inestabilidad puede manifestarse. Para la condición inicial considerada la solución exacta corresponde ser un solitón y justamente se presenta un alto grado de propagación de errores numéricos sobre todo en la dirección en la cual el solitón viaja.

En la segunda subsección presentamos las conclusiones de nuestro trabajo.

### 6.1. Comentarios

Comenzamos esta sección presentado simulaciones numéricas para el siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0 & \text{en } ] - 40, 80[ \times ] 0, 20[. \\ u(-40, t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(80, t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } [-40, 80] \end{cases} \quad (19)$$

La función  $g(x)$  es de la forma  $g(x) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}(\sqrt{c}x/2)$  para  $x \in ] - 39,5, 79,5[$ .

Para  $u_0(x) = \frac{c}{2} \operatorname{sech} \sqrt{c}x/2$  la solución exacta del problema de Cauchy para (2) viene dada por  $u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(x - ct)/2)$ . En esta simulación notamos la consecuencia de considerar condiciones tipo Dirichlet en la frontera artificial. Las oscilaciones que se aprecian en las Figuras c), d) podemos asociarlas a reflexiones de la onda que viaja en esa dirección. Las condiciones en la frontera que debemos imponer deben relacionarse con este fenómeno, específicamente, minimizar las reflexiones desde este extremo. En el artículo [Engquist y Majda \(1977\)](#) se indican condiciones de frontera no locales para la ecuación de onda.



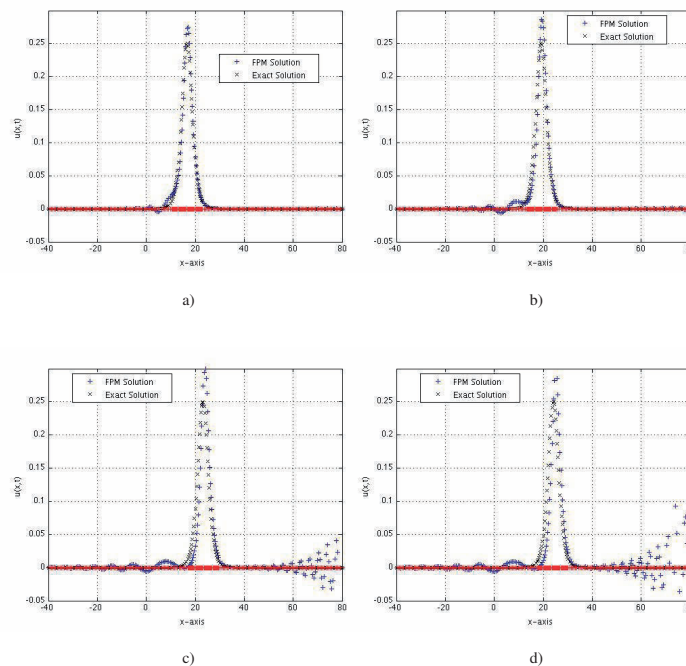


Figura 10: Simulaciones para distintos tiempos a)  $t = 5$  , b)  $t = 10$  c)  $t = 18$  d)  $t = 20$ .

En los artículos del tema donde se estudia numéricamente la ecuación (2) no se presenta este tipo de comportamiento oscilatorio en la frontera derecha. Pensamos que la razón se debe a que no consideraron la condición tipo Dirichlet.

## 6.2. Conclusiones.

Por medio de las distintas simulaciones numéricas presentadas en la Sección 5 (problemas tipo test) el esquema numérico dado en la Sección 3 puede ser utilizado para estudiar soluciones numéricas de problemas de Cauchy generales para la EDP (1). Consideramos que el estudio del intervalo espacial considerado en la discretización debe ser estudiado en relación al tipo de condición inicial  $u_0(x)$ .

El criterio de selección debe estar en relación del tipo de decaimiento espacial de la función  $u_0(x)$ .

A partir de los resultados dados en la sección de comentarios, la propagación de error está en relación al tipo de ecuación como también al tipo de condición de frontera consideramos.

Por lo tanto, para ecuaciones más generales y sobre todo no lineales no sólo el esquema es relevante en el tipo de resultado numérico. Volvemos a remarcar la estabilidad de los problemas de Cauchy para la ecuación (1).

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por el patrocinio otorgado para la realización de este trabajo científico a través del proyecto FONDECYT N° 11100253.

**REFERENCIAS**

- Benjamin T., Bona J., y J. M. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, *Philos*, volumen 272. Soc. London, 1972.
- Engquist B. y Majda A. *Majda, Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves*, volumen 74. Acad. Sci, 1977.
- Islam S., Haq S., y Ali A. A meshfree method for the numerical solution of the rlw equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223:997–1012, 2009.
- Kutluay S. y Esen A. A finite difference solution of the regularized long-wave equation. *Mathematical Problems in Engineering*, páginas 1–14, 2006.
- Lamb G. *Elements of soliton theory*, pure & applied mathematics, John Wiley & sons. 1980.
- Lax P. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *commun. pure. appl. math.* 21:467–490, 1968.
- Miura R. A remarkable explicit nonlinear transformation. 9:1202–1204, 1968.
- Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., Taylor R., y Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346, 1996.
- Pérez Pozo L., Perazzo F., y Angulo A. A meshless FPM model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Rosenau P. y Hyman J. Solitons with finite wavelengh. 70:564–567, 1993.
- Shokri A. y Dehghan M. A meshless method using the radial basis functions for numerical solution of the regularized long wave equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26:807–825, 2010.