

DETERMINACIÓN DE LA RIGIDEZ DINÁMICA DE FUNDACIONES SUPERFICIALES USANDO UN MODELO MODAL DE PROPAGACIÓN DE ONDAS

Marcelo A. Ceballos y Carlos A. Prato

*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba, Vélez Sarsfield 1611, X5016GCA, Córdoba, Argentina,
<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct>*

Palabras clave: rigidez dinámica, fundaciones superficiales, descomposición modal, propagación de ondas superficiales.

Resumen. El ajuste de la flexibilidad dinámica exacta de un semi-espacio homogéneo a través de técnicas de análisis modal experimental ha permitido la definición de matrices de rigidez que pueden ensamblarse directamente con las matrices de estratos ubicados por encima del semi-espacio para formar matrices globales de rigidez de perfiles estratificados de suelo. Las matrices de los estratos que se utilizan se derivan de la formulación de capas delgadas, cuya versión original precisamente carece de capacidad para representar el comportamiento dinámico del semi-espacio que se ubica como último estrato del perfil de suelos. La resolución de un problema generalizado de autovalores del perfil completo permite expresar su respuesta dinámica a través de una combinación de modos de propagación de ondas con importantes ventajas numéricas respecto a la utilización directa de las matrices exactas.

Este trabajo presenta como aplicación del modelo modal propuesto la determinación de la rigidez dinámica de discos infinitamente rígidos apoyados sobre la superficie de un semi-espacio homogéneo. La evaluación de la rigidez dinámica de discos sobre perfiles estratificados de suelo requiere un reajuste de los parámetros modales obtenidos del problema de autovalores que aún se encuentra en etapa de estudio. Las curvas de flexibilidad del semi-espacio homogéneo obtenidas por inversión de la rigidez dinámica se comparan con las presentadas en la bibliografía, y las obtenidas con el programa comercial SASSI cuya ejecución involucra un tiempo de cálculo considerable. Esto se debe a que este programa usa las matrices de rigidez exactas de los estratos y el semi-espacio, y la transformación de la respuesta del dominio número de onda al dominio espacial se realiza a través de la aplicación explícita de la Transformada de Hankel. Las versiones numéricas requeridas para esta transformación poseen un alto costo computacional y pueden arrastrar imprecisiones numéricas que surgen por la integración del producto de funciones cilíndricas. El hecho de que la técnica propuesta en este trabajo se base en la descomposición modal de la respuesta permite que la transformación de la contribución de cada modo entre ambos dominios se realice analíticamente en forma exacta.

1 INTRODUCCION

La representación de la respuesta dinámica de perfiles estratificados de suelo a través de la superposición de modos de propagación de ondas superficiales ha ganado interés a partir del desarrollo de técnicas de ajuste de parámetros mecánicos en base a registros del movimiento en la superficie producido por cargas dinámicas. La técnica SASW propuesta por [Stokoe y colaboradores \(1994\)](#) se basa en el ajuste de ciertos parámetros del modelo del perfil de suelo de tal manera que la versión analítica de la curva de dispersión reproduzca su contraparte experimental. Esta curva de dispersión representa la velocidad del modo fundamental de propagación de ondas superficiales en función de la frecuencia o longitud de onda de análisis.

Un modelo exacto para determinar el comportamiento dinámico de perfiles estratificados se presenta en el trabajo de [Kausel y Roesset \(1981\)](#). Sin embargo, la aplicación directa de este modelo encuentra como limitación práctica las imprecisiones numéricas que surgen en la transformación de la respuesta, calculada en el dominio número de onda, al dominio espacial a través de la Transformada de Hankel. Por tal motivo, en ese mismo trabajo se presenta como alternativa un modelo simplificado denominado “formulación de capas delgadas” que se basa en la expansión en el número de onda de la matriz de rigidez exacta de los estratos. La rigidez del perfil completo se obtiene luego a través del ensamble de matrices independientes del número de onda, mientras que el planteo de un problema generalizado de autovalores permite la descomposición de la respuesta en modos de propagación cuya contribución a la respuesta espacial puede obtenerse en forma analítica. Una descripción detallada de esta formulación se presenta en el trabajo de [Kausel \(1981\)](#).

La formulación de capas delgadas presenta como inconveniente que la expansión en el número de onda no resulta posible para la matriz exacta del semi-espacio ubicado en la parte inferior del perfil de suelo, por lo que suelen utilizarse estratos con espesor creciente en profundidad para reproducir el comportamiento de este semi-espacio. Este artificio permite reproducir con buena precisión la velocidad del modo fundamental de propagación, por lo que en la técnica SASW se usa para obtener la curva de dispersión analítica de perfiles con una rigidez creciente en profundidad (normalmente dispersivos). Sin embargo, el artificio carece de capacidad para reproducir las velocidades de propagación de los modos superiores que se tornan dominantes para perfiles caracterizados por la presencia de estratos blandos debajo de estratos duros (inversamente dispersivos).

El ajuste de la rigidez dinámica exacta del semi-espacio en el dominio número de onda a través de parámetros modales de 1° orden ha permitido una representación adecuada de la respuesta dinámica de perfiles estratificados manteniendo las ventajas de la formulación de capas delgadas en cuanto a la transformación exacta de la contribución de cada modo a la respuesta espacial. Una descripción detallada del modelo modal se presenta en los trabajos de [Ceballos y Prato \(2010, 2011b\)](#). La aplicación de este modelo al ajuste de perfiles de suelo con una distribución arbitraria de rigidez en profundidad se presenta en el trabajo de [Ceballos y Prato \(2011a\)](#).

En este trabajo se estudia la capacidad del modelo modal propuesto para reproducir la flexibilidad dinámica de discos rígidos apoyados sobre la superficie de un semi-espacio homogéneo. Debido a que el modelo proporciona los desplazamientos producidos por cargas distribuidas sobre un área circular, resulta necesario dividir el disco en superficies anulares y determinar las tensiones necesarias para satisfacer las condiciones de compatibilidad de giros y desplazamientos. De esta forma, la integración de momentos y fuerzas que generan estas tensiones permiten finalmente obtener los valores de rigidez dinámica.

2 MODELO DEL PERFIL DE SUELO

En esta sección se describen las principales características del modelo exacto para perfiles estratificados en coordenadas cilíndricas presentado en el trabajo de [Kausel y Roesset \(1981\)](#). A continuación se presentan las matrices utilizadas en la formulación de capas delgadas que permiten describir la respuesta del perfil a través de un modelo modal de 2° orden. Luego se realiza una descripción del modelo propuesto basado en parámetros modales de 1° orden.

2.1 Matrices exactas en el dominio número de onda

Las matrices exactas de los estratos en el dominio del número de onda k permiten calcular los desplazamientos en forma discreta en dirección vertical z y en forma continua en las direcciones radial ρ y tangencial θ . El perfil de suelo se discretiza verticalmente en estratos de propiedades uniformes cuyo comportamiento mecánico se describe a través de matrices de rigidez de 6×6 con una coordenada vertical, una radial y una tangencial por extremo. La determinación de la respuesta U del perfil de suelo en términos de desplazamientos se realiza para cada número de onda k de la siguiente forma

$$K U = P \quad \Rightarrow \quad U = K^{-1} P = F P \quad (1)$$

La matriz de rigidez del perfil K y el vector de cargas P se obtienen a través del ensamble directo de las componentes de cada estrato

$$K = \begin{bmatrix} K_{\rho\rho}^{ii} & 0 & K_{\rho z}^{ii} & K_{\rho\rho}^{ij} & 0 & K_{\rho z}^{ij} \\ 0 & K_{\theta\theta}^{ii} & 0 & 0 & K_{\theta\theta}^{ij} & 0 \\ K_{z\rho}^{ii} & 0 & K_{zz}^{ii} & K_{z\rho}^{ij} & 0 & K_{zz}^{ij} \\ \hline K_{\rho\rho}^{ji} & 0 & K_{\rho z}^{ji} & K_{\rho\rho}^{jj} & 0 & K_{\rho z}^{jj} \\ 0 & K_{\theta\theta}^{ji} & 0 & 0 & K_{\theta\theta}^{jj} & 0 \\ K_{z\rho}^{ji} & 0 & K_{zz}^{ji} & K_{z\rho}^{jj} & 0 & K_{zz}^{jj} \end{bmatrix} \quad P = \begin{Bmatrix} P_{\rho}^i \\ P_{\theta}^i \\ P_z^i \\ \hline P_{\rho}^j \\ P_{\theta}^j \\ P_z^j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

donde i y j representan extremos genéricos superior e inferior, respectivamente.

2.2 Formulación de capas delgadas

En esta formulación que se presenta en detalle en el trabajo de [Kausel \(1981\)](#) se aproxima la matriz de los estratos a través de matrices A , B , G y M independientes del número de onda

$$K = A k^2 + B k + C \quad \text{con} \quad C = G - \omega^2 M \quad (3)$$

donde ω representa la frecuencia de la carga que se asume de naturaleza armónica. El ensamble de las matrices de todos los estratos del perfil sobre un semi-espacio considerado infinitamente rígido hace posible plantear el siguiente problema de autovalores

$$(A s_m^2 + B s_m + C) \phi_m = 0 \quad \text{donde} \quad C = G - \omega^2 M \quad (4)$$

La resolución de este problema permite expresar la matriz de flexibilidad dinámica como una aproximación a través de la superposición de $3N$ modos de propagación, donde N es el número de interfaces del perfil. De esta forma, la sub-matriz de flexibilidad que vincula, por ejemplo, las interfaces i y j resulta

$$F^{ij} = \begin{bmatrix} F_{\rho\rho}^{ij} & 0 & F_{\rho z}^{ij} \\ 0 & F_{\theta\theta}^{ij} & 0 \\ F_{z\rho}^{ij} & 0 & F_{zz}^{ij} \end{bmatrix} \quad (5)$$

con

$$\begin{aligned} F_{\rho\rho}^{ij} &= \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{\rho,r}^i \phi_{\rho,r}^j}{(k^2 - s_r^2)} & F_{\rho z}^{ij} &= \sum_{r=1}^{2N} \frac{k}{s_r} \frac{\phi_{\rho,r}^i \phi_{z,r}^j}{(k^2 - s_r^2)} \\ F_{z\rho}^{ij} &= \sum_{r=1}^{2N} \frac{k}{s_r} \frac{\phi_{z,r}^i \phi_{\rho,r}^j}{(k^2 - s_r^2)} & F_{zz}^{ij} &= \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{z,r}^i \phi_{z,r}^j}{(k^2 - s_r^2)} \\ F_{\theta\theta}^{ij} &= \sum_{l=1}^N \frac{\phi_{\theta,l}^i \phi_{\theta,l}^j}{(k^2 - s_l^2)} \end{aligned} \quad (6)$$

donde los subíndices r y l hacen referencia a los modos de propagación de Rayleigh y Love, respectivamente. La ventaja más importante de expresar los coeficientes de flexibilidad de esta forma es que la Transformada de Hankel que se requiere para pasar la respuesta del dominio número de onda al dominio espacial se resuelve en forma analítica y exacta. Las expresiones explícitas de la Transformada de Hankel para los casos comunes de aplicación se encuentran en el trabajo de [Kausel \(1981\)](#). De esta forma, la única fuente de aproximación se relaciona con la expansión en series en función del número de onda k de los coeficientes de las matrices exactas.

La principal desventaja de esta formulación es que no posee la capacidad para representar la flexibilidad del semi-espacio, por lo que su aplicación se limita a casos de perfiles apoyados sobre un semi-espacio que debe considerarse infinitamente rígido.

2.3 Modelo modal de propagación de ondas

A los efectos de sacar provecho de las ventajas de la descomposición de la respuesta en modos de propagación de ondas, se ha realizado un estudio de las principales características de la matriz de rigidez exacta del semi-espacio. En primer término, los coeficientes de esta matriz resultan complejos a diferencia tanto de las matrices exactas de los estratos como de las matrices aproximadas derivadas de la formulación de capas delgadas. A pesar de esto, resulta notable que la aproximación a través de estratos con espesores crecientes en profundidad reproduzca con buena precisión la velocidad de propagación del modo fundamental para perfiles normalmente dispersivos aún sobrepasando a partir de cierto punto el espesor máximo admitido por efectos de la discretización.

En segundo término, los coeficientes exactos decrecen para valores altos del número de onda con la inversa de k en lugar de con la inversa de k^2 como surge de la formulación de capas delgadas. Estos valores asintóticos resultan fundamentales para reproducir con buena precisión la respuesta para bajas frecuencias. Por lo tanto, un modelo modal de propagación de ondas adecuado debe necesariamente ser de 1° orden como los que surgen al plantear la formulación en espacio de estado para las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos.

El ajuste de las componentes de flexibilidad dinámica del semi-espacio usando parámetros modales con la técnica descrita en el trabajo de [Ceballos y Prato \(2010\)](#) permite expresar esta flexibilidad como

$$F = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{\rho,r}^2}{k-s_r} & 0 & \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{\rho,r}\phi_{z,r}}{k-s_r} \\ 0 & \sum_{l=1}^L \frac{\phi_{\theta,l}^2}{k-s_l} & 0 \\ \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{z,r}\phi_{\rho,r}}{k-s_r} & 0 & \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{z,r}^2}{k-s_r} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Observar que los autovalores en el denominador están elevados a la primera potencia. Dado que el número de modos necesarios para reproducir con buena precisión los coeficientes de flexibilidad resulta mucho mayor que el número de coordenadas físicas, se torna necesario recurrir a la utilización de grados de libertad generalizados para transformar las matrices modales a matrices físicas. Estas matrices pueden ensamblarse luego con las matrices de los estratos de forma análoga a la que se usa en la formulación de capas delgadas.

La utilización de un modelo modal de 1° orden genera la necesidad de obtener expresiones de la Transformada de Hankel de distinta naturaleza a las que surgen de la formulación de capas delgadas. En el libro de [Hemsley \(1998\)](#) se encuentran expresiones similares a las que surgen en la formulación de 1° orden, lo que ha producido un procedimiento eficiente para su resolución en series. La forma general de la familia de integrales a resolver es la siguiente

$$V_{\alpha\beta\gamma}(\rho, R, s) = \int_0^\infty \frac{J_\beta(k\rho)J_\gamma(kR)}{k^\alpha(k-s)} dk \quad (8)$$

donde ρ es la coordenada radial, R es el radio de la zona cargada sobre la superficie, s representa cada uno de los autovalores del perfil de suelo, J representa la función de Bessel de primera especie, α es el exponente del número de onda k , y β y γ representan el orden de las funciones de Bessel. Los libros de [Abramowitz y Stegun \(1964\)](#), [Gradshteyn y Ryzhik \(2007\)](#), y [Watson \(1944\)](#) se han usado como referencia para la obtención de las expresiones analíticas necesarias. Las soluciones expresadas en función de expansiones en series del autovalor s resultan válidas sólo para $\Re(s) \leq 0$. Por lo tanto, las soluciones para $\Re(s) > 0$ se expresan en función de integrales que surgen en la formulación de 2° orden: para los coeficientes sobre la diagonal principal de las sub-matrices de flexibilidad de cada interfaz se utiliza

$$V_{\alpha\beta\gamma}(\rho, R, s) = 2s \underbrace{\int_0^\infty \frac{J_\beta(k\rho)J_\gamma(kR)}{k^\alpha(k^2-s^2)} dk}_{\text{solución analítica}} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{J_\beta(k\rho)J_\gamma(kR)}{k^\alpha(k+s)} dk}_{\text{solución en series}} \quad (9)$$

mientras que para los coeficientes fuera de la diagonal principal se utiliza

$$V_{\alpha\beta\gamma}(\rho, R, s) = 2 \underbrace{\int_0^\infty \frac{J_\beta(k\rho)J_\gamma(kR)}{k^{\alpha-1}(k^2-s^2)} dk}_{\text{solución analítica}} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{J_\beta(k\rho)J_\gamma(kR)}{k^\alpha(k+s)} dk}_{\text{solución en series}} \quad (10)$$

Una ventaja adicional de la formulación de 1° orden es que permite distinguir entre modos de propagación de naturaleza oscilante ($\Re(s) > 0$) y modos no-oscilantes ($\Re(s) \leq 0$).

3 RIGIDEZ DINÁMICA DE DISCOS RÍGIDOS

El procedimiento utilizado para la obtención de la rigidez de discos infinitamente rígidos apoyados sobre la superficie consiste en aplicar cargas constantes o de variación lineal sobre áreas circulares. Las soluciones obtenidas se usan para calcular las respuestas para cargas anulares. La imposición de giros y desplazamientos unitarios en correspondencia con los centros de los anillos permite obtener las tensiones que, integradas en el radio del disco, proporcionan los momentos y fuerzas que representan los valores de rigidez dinámica. Dado que las tensiones tienden a infinito en el extremo del disco, se toman anillos con mayor espesor hacia el centro del disco, y con espesores decrecientes hacia el borde del disco. La matriz que se forma con los desplazamientos en el centro de los anillos producidos por las cargas anulares presenta un mal-condicionamiento que genera imprecisiones numéricas durante su inversión para obtener las tensiones en los anillos. Esto se debe precisamente a que las tensiones tienden a infinito hacia el borde del disco, lo que justificaría la búsqueda de un procedimiento alternativo para la evaluación de la rigidez de estos discos.

3.1 Rigidez dinámica torsional

Las matrices C y T que se utilizan para la transformación de cargas y desplazamientos entre los dominios espacial y número de onda adoptan la siguiente forma

$$C = \begin{bmatrix} -J_1(k\rho) & 0 & 0 \\ 0 & -J_1(k\rho) & 0 \\ 0 & 0 & -J_0(k\rho) \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

El vector de cargas en ambos dominios se obtiene como

$$P_\theta(\rho) = [0 \quad \rho/R \quad 0]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (12)$$

$$P_\theta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_\theta(\rho) d\theta d\rho = [0 \quad (R/k \cdot J_0(kR) - 2/k^2 \cdot J_1(kR)) \quad 0]^T \quad (13)$$

De esta forma, el vector de desplazamientos resulta

$$U_\theta(k) = \begin{bmatrix} 0 \quad (R/k J_0(kR) - 2/k^2 J_1(kR)) \sum_{l=1}^L \frac{\phi_{\theta,l}^2}{k - s_l} \quad 0 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$U_\theta(\rho) = T \int_0^\infty k C U_\theta(k) dk = [0 \quad U_{\theta\theta}(\rho) \quad 0]^T \quad (15)$$

$$U_{\theta\theta}(\rho) = \sum_{l=1}^L \phi_{\theta,l}^2 \left(2 \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k(k - s_l)} dk - R \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_0(kR)}{k - s_l} dk \right) \quad (16)$$

Los desplazamientos tangenciales para el disco completo se utilizan para determinar los desplazamientos producidos por cargas en áreas anulares con tensiones que varían linealmente desde el radio interior hacia el radio exterior. La imposición de que los desplazamientos del centro de los anillos varíen linealmente desde 0 en el centro del disco hasta R en el borde (giro unitario) permite definir las tensiones tangenciales en correspondencia con el radio exterior de los anillos $\tau_{max,n}$, expresadas en función de tensiones equivalentes referidas al borde del disco

$$\underbrace{\tau_{\max,n}}_{\text{extremo del anillo}} = \frac{r_{\text{ext},n}}{R} \underbrace{\bar{\tau}_{\max,n}}_{\text{extremo del disco}} \quad (17)$$

El momento torsor que representa la rigidez torsional de un disco rígido se obtiene luego en función de las tensiones de los anillos

$$M_T = \sum_{n=1}^N \frac{I_{p,n}}{r_{\text{ext},n}} \tau_{\max,n} = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^N I_{p,n} \bar{\tau}_{\max,n} \quad (18)$$

donde el momento de inercia polar del anillo n se calcula como

$$I_{p,n} = \frac{\pi}{2} (r_{\text{ext},n}^4 - r_{\text{int},n}^4) \quad (19)$$

3.2 Rigidez dinámica vertical

Las matrices C y T adoptan en este caso la siguiente forma

$$C = \begin{bmatrix} -J_1(k\rho) & 0 & 0 \\ 0 & -J_1(k\rho) & 0 \\ 0 & 0 & -J_0(k\rho) \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

El vector de cargas en ambos dominios se obtiene como

$$P_z(\rho) = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (21)$$

$$P_z(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_z(\rho) d\theta d\rho = [0 \quad 0 \quad -R/k \cdot J_1(kR)]^T \quad (22)$$

El vector de desplazamientos resulta

$$U_z(k) = -R/k \cdot J_1(kR) \left[\sum_{r=1}^M \frac{\phi_{\rho,r} \phi_{z,r}}{k - s_r} \quad 0 \quad \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{z,r}^2}{k - s_r} \right]^T \quad (23)$$

$$U_z(\rho) = T \int_0^\infty k C U_z(k) dk = [U_{\rho z}(\rho) \quad 0 \quad U_{zz}(\rho)]^T \quad (24)$$

$$U_{\rho z}(\rho) = \sum_{r=1}^M \phi_{\rho,r} \phi_{z,r} R \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k - s_r} dk \quad (25)$$

$$U_{zz}(\rho) = \sum_{r=1}^M \phi_{z,r}^2 R \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k - s_r} dk \quad (26)$$

Los desplazamientos verticales obtenidos para el disco completo se usan para determinar los desplazamientos producidos por cargas en áreas anulares con tensiones constantes. La imposición de desplazamientos unitarios en el centro de los anillos permite la definición de las tensiones requeridas en los anillos. La fuerza que representa la rigidez vertical de un disco rígido se obtiene en función de las tensiones normales de los anillos σ_n

$$F_V = \sum_{n=1}^N \Omega_n \sigma_n \quad (27)$$

donde el área del anillo n se calcula como

$$\Omega_n = \pi (r_{\text{ext},n}^2 - r_{\text{int},n}^2) \quad (28)$$

En la expresión (23) puede observarse que la carga vertical produce tanto desplazamientos verticales como radiales. La obtención de la rigidez vertical usando (27) implica que no se impone la condición de que no haya desplazamientos en la dirección radial. A los efectos de imponer esta condición resulta necesario considerar también el siguiente estado de cargas

$$P_\rho(\rho) = [\rho/R \quad 0 \quad 0]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (29)$$

$$P_\rho(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_\rho(\rho) d\theta d\rho = \left[(R/k \cdot J_0(kR) - 2/k^2 \cdot J_1(kR)) \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (30)$$

El vector de desplazamientos resulta en este caso

$$U_\rho(k) = (R/k \cdot J_0(kR) - 2/k^2 \cdot J_1(kR)) \left[\sum_{r=1}^M \frac{\phi_{\rho,r}^2}{k - s_r} \quad 0 \quad \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{z,r} \phi_{\rho,r}}{k - s_r} \right]^T \quad (31)$$

$$U_\rho(\rho) = T \int_0^\infty k C U_\rho(k) dk = [U_{\rho\rho}(\rho) \quad 0 \quad U_{z\rho}(\rho)]^T \quad (32)$$

$$U_{\rho\rho}(\rho) = \sum_{r=1}^M \phi_{\rho,r}^2 \left(2 \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k(k - s_r)} dk - R \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_0(kR)}{k - s_r} dk \right) \quad (33)$$

$$U_{z\rho}(\rho) = \sum_{r=1}^M \phi_{z,r} \phi_{\rho,r} \left(2 \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k(k - s_r)} dk - R \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_0(kR)}{k - s_r} dk \right) \quad (34)$$

Las expresiones (23) y (31) pueden utilizarse entonces para imponer simultáneamente en los anillos las condiciones de desplazamiento vertical unitario y desplazamiento radial nulo para obtener la rigidez del disco “con fricción”. El resultado de este análisis se compara más adelante con las curvas obtenidas con el programa comercial [SASSI \(1995\)](#).

3.3 Rigidez dinámica horizontal

Las matrices C y T adoptan la siguiente forma

$$C = \begin{bmatrix} J_0(k\rho) - J_1(k\rho)/(k\rho) & J_1(k\rho)/(k\rho) & 0 \\ J_1(k\rho)/(k\rho) & J_0(k\rho) - J_1(k\rho)/(k\rho) & 0 \\ 0 & 0 & -J_1(k\rho) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

El vector de cargas en ambos dominios se obtiene como

$$P_x(\rho) = [\cos(\theta) \quad -\sin(\theta) \quad 0]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \tag{36}$$

$$P_x(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_x(\rho) d\theta d\rho = [R/k \cdot J_1(kR) \quad R/k \cdot J_1(kR) \quad 0]^T \tag{37}$$

El vector de desplazamientos resulta

$$U_x(k) = R/k \cdot J_1(kR) \left[\sum_{r=1}^M \frac{\phi_{\rho,r}^2}{k-s_r} \quad \sum_{l=1}^L \frac{\phi_{\theta,l}^2}{k-s_l} \quad \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{z,r} \phi_{\rho,r}}{k-s_r} \right]^T \tag{38}$$

$$U_x(\rho) = T \int_0^\infty k C U_x(k) dk = [U_{\rho x}(\rho) \quad U_{\theta x}(\rho) \quad U_{zx}(\rho)]^T \tag{39}$$

$$U_{\rho x}(\rho) = \left(R \sum_{r=1}^M \phi_{\rho,r}^2 \left(\int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k-s_r} dk - \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k(k-s_r)} dk \right) + \dots \right. \\ \left. \frac{R}{\rho} \sum_{l=1}^L \phi_{\theta,l}^2 \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k(k-s_l)} dk \right) \cos(\theta) \tag{40}$$

$$U_{\theta x}(\rho) = \left(R \sum_{l=1}^L \phi_{\theta,l}^2 \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k(k-s_l)} dk - \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k-s_l} dk \right) - \dots \right. \\ \left. \frac{R}{\rho} \sum_{r=1}^M \phi_{\rho,r}^2 \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k(k-s_r)} dk \right) \sin(\theta) \tag{41}$$

$$U_{zx}(\rho) = - \left(R \sum_{r=1}^M \phi_{z,r} \phi_{\rho,r} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k-s_r} dk \right) \cos(\theta) \tag{42}$$

Los desplazamientos horizontales para el disco completo se utilizan para determinar los desplazamientos que se producen por cargas en áreas anulares con tensiones constantes. La imposición de desplazamientos unitarios en el centro de los anillos permite la definición de las tensiones requeridas en los anillos. La fuerza que representa la rigidez horizontal de un disco rígido se obtiene en función de las tensiones de los anillos

$$F_H = \sum_{n=1}^N \Omega_n \tau_n \tag{43}$$

donde el área del anillo n se calcula como

$$\Omega_n = \pi (r_{\text{ext},n}^2 - r_{\text{int},n}^2) \tag{44}$$

De acuerdo a la expresión (38) puede observarse que se producen desplazamientos en las 3 direcciones cilíndricas. La evaluación rigurosa de la rigidez horizontal para el disco rígido “con fricción” requiere considerar las siguientes cargas

$$P_\rho(\rho) = [\cos(\theta) \quad 0 \quad 0]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \tag{45}$$

$$P_\rho(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_\rho(\rho) d\theta d\rho \quad (46)$$

$$= \left[\frac{1}{k^2} \cdot (kR J_1(kR) - (1 - J_0(kR))) \quad \frac{1}{k^2} \cdot (1 - J_0(kR)) \quad 0 \right]^T$$

$$P_\theta(\rho) = [0 \quad -\sin(\theta) \quad 0]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (47)$$

$$P_\theta(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_\theta(\rho) d\theta d\rho \quad (48)$$

$$= \left[\frac{1}{k^2} \cdot (1 - J_0(kR)) \quad \frac{1}{k^2} \cdot (kR J_1(kR) - (1 - J_0(kR))) \quad 0 \right]^T$$

3.4 Rigidez dinámica flexional

Las matrices C y T adoptan la siguiente forma

$$C = \begin{bmatrix} J_0(k\rho) - J_1(k\rho)/(k\rho) & J_1(k\rho)/(k\rho) & 0 \\ J_1(k\rho)/(k\rho) & J_0(k\rho) - J_1(k\rho)/(k\rho) & 0 \\ 0 & 0 & -J_1(k\rho) \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

El vector de cargas en ambos dominios se obtiene como

$$P_z(\rho) = [0 \quad 0 \quad \rho/R \cdot \cos(\theta)]^T \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (50)$$

$$P_z(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \rho C \int_0^{2\pi} T P_z(\rho) d\theta d\rho \quad (51)$$

$$= \left[0 \quad 0 \quad (R/k \cdot J_0(kR) - 2/k^2 \cdot J_1(kR)) \right]^T$$

El vector de desplazamientos resulta

$$U_z(k) = (R/k \cdot J_0(kR) - 2/k^2 \cdot J_1(kR)) \left[\sum_{r=1}^M \frac{\phi_{\rho,r} \phi_{z,r}}{k - s_r} \quad 0 \quad \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{z,r}^2}{k - s_r} \right]^T \quad (52)$$

$$U_z(\rho) = T \int_0^\infty k C U_z(k) dk = [U_{\rho z}(\rho) \quad U_{\theta z}(\rho) \quad U_{zz}(\rho)]^T \quad (53)$$

$$U_{\rho z}(\rho) = \left(\sum_{r=1}^M \phi_{\rho,r} \phi_{z,r} \left(\begin{aligned} & R \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_0(kR)}{k - s_r} dk - 2 \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) J_1(kR)}{k(k - s_r)} dk - \dots \\ & \frac{R}{\rho} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_0(kR)}{k(k - s_r)} dk + \frac{2}{\rho} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k^2(k - s_r)} dk \end{aligned} \right) \right) \cos(\theta) \quad (54)$$

$$U_{\theta z}(\rho) = \left(\sum_{r=1}^M \phi_{\rho,r} \phi_{z,r} \left(\frac{2}{\rho} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k^2 (k-s_r)} dk - \frac{R}{\rho} \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_0(kR)}{k (k-s_r)} dk \right) \right) \sin(\theta) \quad (55)$$

$$U_{zz}(\rho) = \left(\sum_{r=1}^M \phi_{z,r}^2 \left(2 \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_1(kR)}{k (k-s_r)} dk - R \int_0^\infty \frac{J_1(k\rho) J_0(kR)}{k-s_r} dk \right) \right) \cos(\theta) \quad (56)$$

Los desplazamientos verticales para el disco completo se utilizan para determinar los desplazamientos producidos por cargas en áreas anulares con tensiones que varían linealmente desde el radio interior hacia el radio exterior. La imposición que los desplazamientos del centro de los anillos varíen linealmente desde 0 sobre un diámetro del disco hasta R en el borde (giro unitario) permite definir las tensiones en el radio exterior de los anillos expresadas en función de tensiones referidas al borde del disco

$$\underbrace{\sigma_{\max,n}}_{\text{extremo del anillo}} = \frac{r_{\text{ext},n}}{R} \underbrace{\bar{\sigma}_{\max,n}}_{\text{extremo del disco}} \quad (57)$$

El momento flector que representa la rigidez flexional de un disco rígido se obtiene en función de las tensiones de los anillos

$$M_F = \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{r_{\text{ext},n}} \sigma_{\max,n} = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^N I_n \bar{\sigma}_{\max,n} \quad (58)$$

donde el momento de inercia del anillo n se calcula como

$$I_n = \frac{\pi}{4} (r_{\text{ext},n}^4 - r_{\text{int},n}^4) \quad (59)$$

4 COMPARACION DE RESULTADOS

Los valores de rigidez dinámica obtenidos a través de las expresiones (18), (27), (43) y (58) se invierten escalarmente a los efectos de compararlos con los valores de flexibilidad que se presentan en el trabajo de [Luco y Westmann \(1971\)](#). Las curvas de flexibilidad vertical con restricción de desplazamiento radial se calculan con el programa comercial [SASSI \(1995\)](#). Todas las curvas de flexibilidad que se presentan a continuación han sido adimensionalizadas con los siguientes valores de flexibilidad estática

$$F_{\text{VERTICAL}} = \frac{(1-\nu)}{4\bar{\rho}V_s^2R} \quad (60)$$

$$F_{\text{HORIZONTAL}} = \frac{(2-\nu)}{8\bar{\rho}V_s^2R} \quad (61)$$

$$F_{\text{FLEXIONAL}} = \frac{3(1-\nu)}{8\bar{\rho}V_s^2R^3} \quad (62)$$

$$F_{\text{TORSIONAL}} = \frac{3}{16\bar{\rho}V_s^2R^3} \quad (63)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, $\bar{\rho}$ es la densidad del semi-espacio, V_S es la velocidad de propagación de ondas de corte y R es el radio del disco.

La frecuencia adimensional utilizada se define como

$$a_0 = \omega R / V_S \tag{64}$$

En la **Figura 1** se muestra una comparación de las curvas de flexibilidad vertical que se obtienen con el modelo modal de 1° orden junto con las presentadas en el trabajo de Luco para 2 valores diferentes del coeficiente de Poisson ν . En la **Figura 2** y en la **Figura 3** se comparan las curvas para los casos de flexibilidad flexional y horizontal, respectivamente.

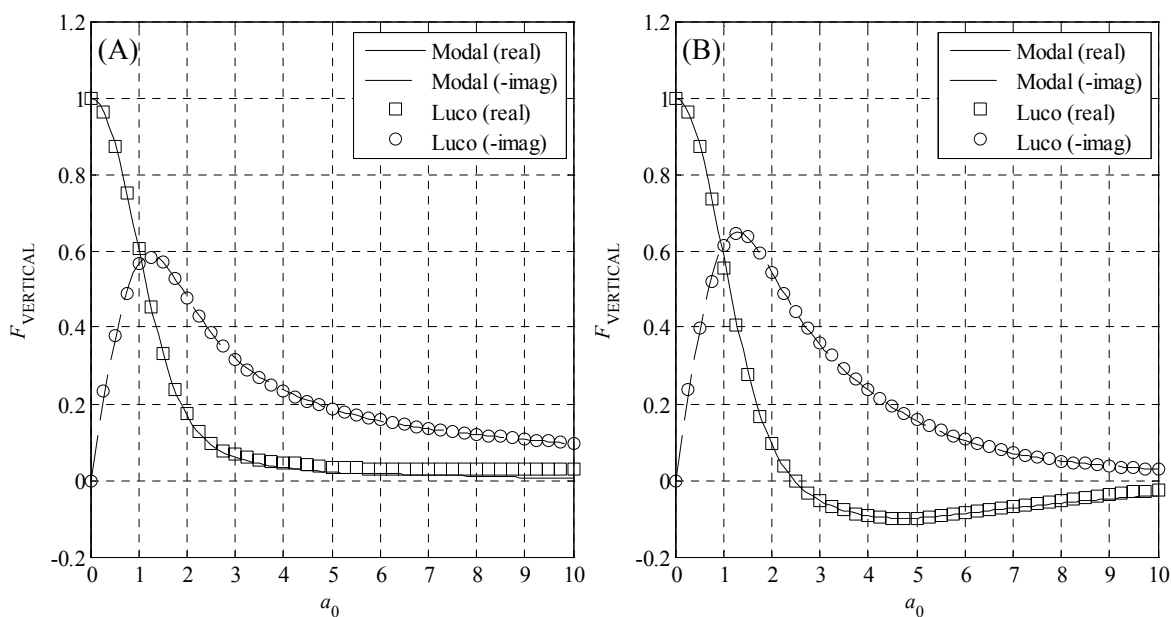


Figura 1. Flexibilidad vertical de un disco rígido: (A) $\nu = 1/3$ y (B) $\nu = 1/2$.

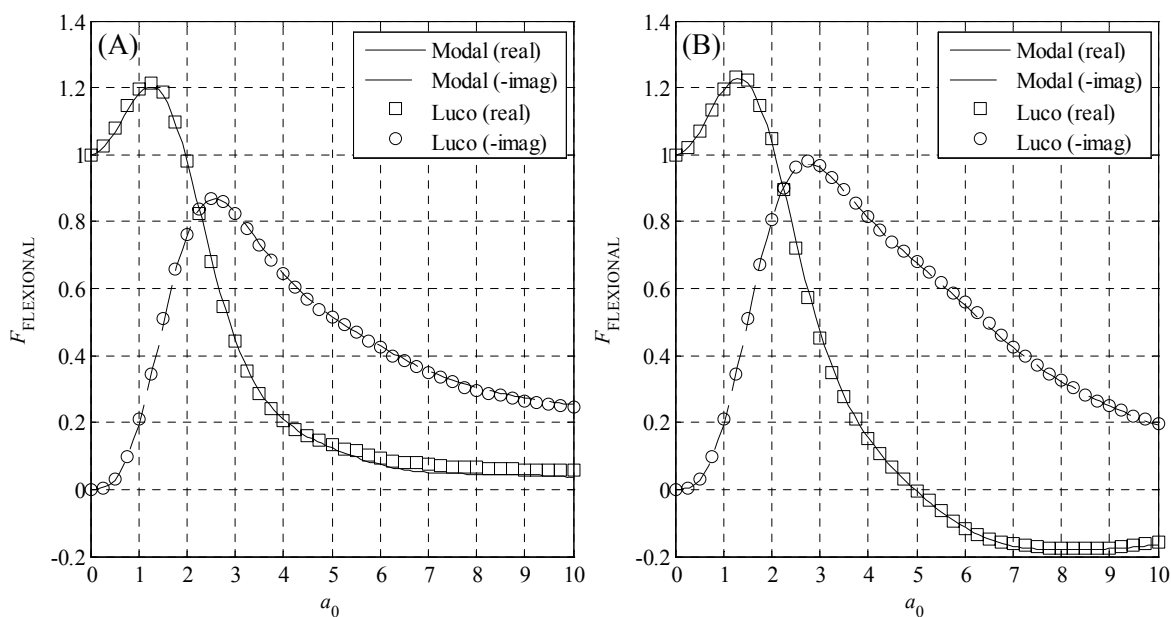


Figura 2. Flexibilidad flexional de un disco rígido: (A) $\nu = 1/3$ y (B) $\nu = 1/2$.

En la **Figura 4** se muestra una comparación de las curvas de flexibilidad torsional que son independientes del valor del coeficiente de Poisson. En la **Figura 5** se comparan las curvas de flexibilidad vertical obtenidas con el modelo modal de 1° orden junto con las obtenidas con el programa SASSI para la condición de disco “con fricción”.

En todos los casos presentados se observa una buena correlación que permite demostrar la capacidad del modelo modal propuesto para representar la rigidez dinámica de discos rígidos apoyados sobre la superficie de un semi-espacio homogéneo.

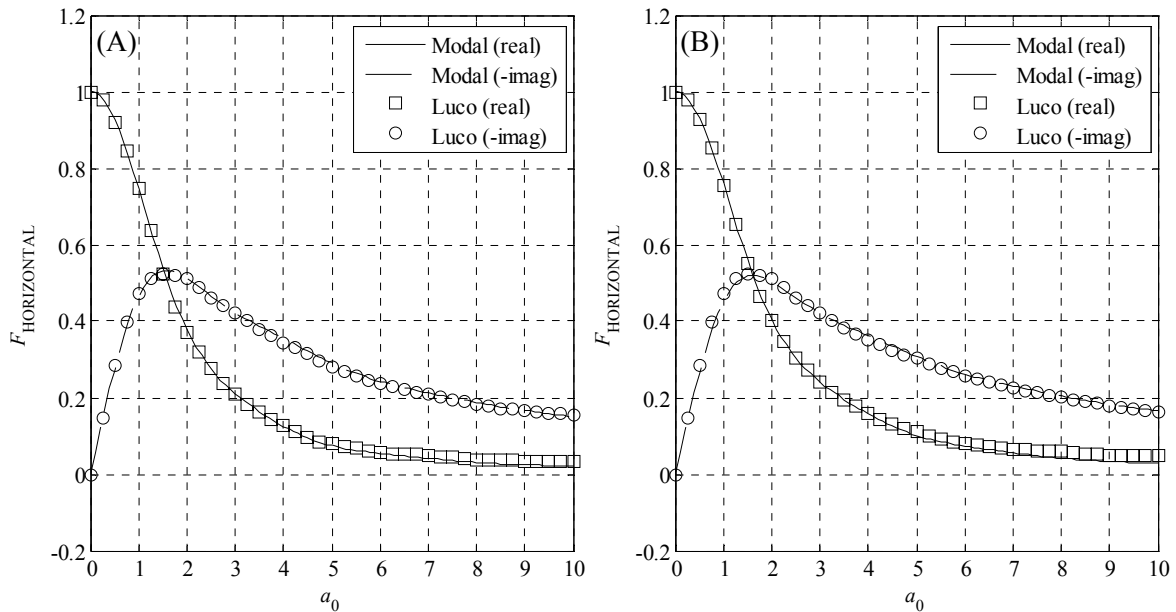


Figura 3. Flexibilidad horizontal de un disco rígido: (A) $\nu = 1/3$ y (B) $\nu = 1/2$.

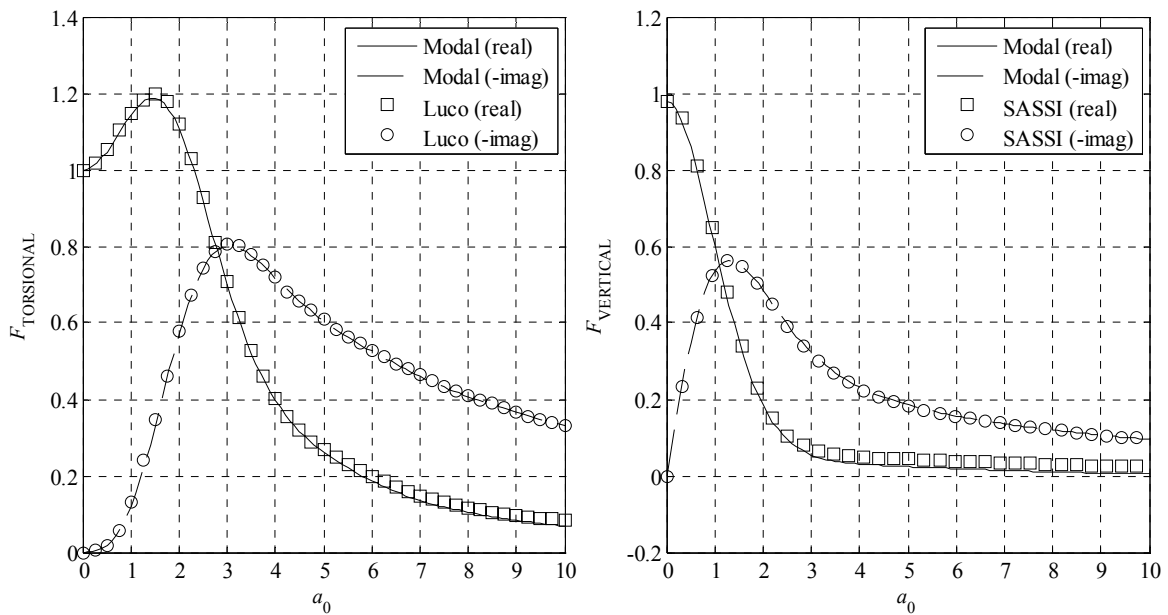


Figura 4. Flexibilidad torsional de un disco rígido.

Figura 5. Flexibilidad vertical de un disco rígido c/ restricción de desplazamiento radial ($\nu = 1/3$).

5 CONCLUSIONES

El modelo modal de 1° orden desarrollado para el ajuste de parámetros mecánicos de perfiles estratificados ha demostrado ser eficiente para reproducir la flexibilidad de discos rígidos apoyados sobre la superficie de un semi-espacio homogéneo.

Una ventaja de este modelo modal respecto al modelo modal de 2° orden es que permite obtener la respuesta para bajas frecuencias, que está controlada en el dominio número de onda por los valores asintóticos de flexibilidad para valores altos del número de onda. Las matrices modales obtenidas para el semi-espacio se transforman en matrices físicas agregando grados de libertad generalizados para acomodar todos los modos necesarios. El ensamble de estas matrices físicas con las matrices de los estratos de la formulación de capas delgadas permite la obtención de parámetros modales globales de perfiles estratificados. Sin embargo, se observa que los valores asintóticos exactos de flexibilidad sufren una degradación debida al proceso de ensamble que impide reproducir con buena precisión la respuesta del perfil en la región próxima a la zona cargada. Una posible solución considerada para este problema consiste en realizar un reajuste de los parámetros modales en base a la rigidez exacta en el dominio número de onda, previo a la transformación de la respuesta al dominio espacial.

Otra ventaja que resulta relevante de este modelo es que permite distinguir entre modos de propagación oscilantes y modos no-oscilantes. Los primeros están relacionados con las ondas de Rayleigh y de Love que viajan a distancias considerables sobre la superficie del perfil dado a que sus amplitudes decaen lentamente. Los segundos permiten describir la respuesta cuasi-estática en proximidades de la zona de aplicación de la carga.

Una de las posibles aplicaciones del modelo modal de 1° orden consiste en el desarrollo de elementos finitos que reproduzcan naturalmente el proceso de radiación para el análisis de sistemas con interacción suelo-estructura.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CONICET y la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Córdoba.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M., Stegun, I., Eds., *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, DC: National Bureau of Standards, 1964.
- Ceballos, M.A., Prato, C.A., *Análisis de Ondas Superficiales Utilizando Modelos para la Rigidez Dinámica del Semi-espacio Compatibles con la Formulación de Capas Delgadas*, IX Argentinean Congress on Computational Mechanics and II South American Congress on Computational Mechanics, MECOM 2010, Buenos Aires, Argentina, 15-18 Nov 2010.
- Ceballos, M.A., Prato, C.A., *Experimental Estimation of Soil Profiles Through Spatial Phase Analysis of Surface Waves*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Elsevier Science, N° 31, pag. 91-103, 2011.
- Ceballos, M.A., Prato, C.A., *Half-space Dynamic Stiffness Models Compatible with the Thin Layer Formulation for Use in Response Analysis of Soil Profiles*, International Symposium on Nondestructive Testing of Materials and Structures, NDTMS 2011, Istanbul, Turkey, May 15-18, 2011.
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Edition, Elsevier Inc., Academic Press, 2007.
- Hemsley, J.A., *Elastic Analysis of Raft Foundations*, Thomas Telford Ltd., London, 1998.

- Kausel, E., *An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamic Loads in Layered Media*, MIT Research Report R81-13, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge, U.S.A., 1981.
- Kausel, E., and Roesset, J.M., *Stiffness Matrices for Layered Soils*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 71, No. 6, pp. 1743-1761, 1981.
- Luco, J.E., Westmann, R.A., *Dynamic Response of Circular Footings*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE 97(EM5), 1381-1395 (1971).
- Stevenson & Associates Inc., *SUPER SASSI/PC Program: Complete Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis System on Personal Computers (1995)*. Original code: SASSI, Lysmer et al., University of California, Berkeley, U.S.A., 1988.
- Stokoe, K.H., Wright, S.G., Bay, J.A., Roesset, J.M., *Characterization of Geotechnical Sites by SASW Method*, XIII ICSMFE, New Delhi, India, Oxford & IBH Publishing, pp. 15-25, 1994.
- Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Edition, Cambridge: Cambridge University Press, 1944.