

## ANÁLISE DE VIGAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Jorge Palomino Tamayo<sup>a</sup>, Inácio Benvegnu Morsch<sup>b</sup>, e Armado M. Awruch<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Avenida Osvaldo Aranha, 99-3º andar, Porto Alegre, RS, Brasil, [lpt.jorge@gmail.com](mailto:lpt.jorge@gmail.com), <http://www.ppgec.ufrgs.br/cemacom/>*

<sup>b</sup>*Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Avenida Osvaldo Aranha, 99-3º andar, Porto Alegre, RS, Brasil, [morsch@ufrgs.br](mailto:morsch@ufrgs.br), [awruch@ufrgs.br](mailto:awruch@ufrgs.br), <http://www6.ufrgs.br/engcivil/ppgec/>*

**Palavras chave:** Vigas mistas, Concreto reforçado, Estruturas de aço, Elementos finitos.

**Resumo.** O emprego de vigas mistas na atualidade é uma das opções atrativas para a construção de pontes e lajes dos andares de prédios. As melhores características individuais em resistência e rigidez dos materiais envolvidos é aproveitada neste tipo de estruturas. O presente trabalho visa à formulação de um modelo matemático e sua implementação numérica através de um código computacional capaz de representar com confiabilidade este tipo de estruturas para cargas de curta duração. Para a modelagem da laje de concreto é desenvolvido o elemento finito quadrilátero de casca degenerada de oito nós baseada na teoria de Reissner-Mindlin. O fenômeno de bloqueio por cortante, é solucionado usando uma regra de integração reduzida e um fator de forma modificado aplicado às tensões de corte. Para a modelagem da viga de aço é desenvolvido um elemento de casca poliédrica produto do acoplamento das rigidezes do elemento de placa delgada (J. Batoz e M. Tahar, *Int J Num Meth Eng*, 18:1655-1677 (1982)) e de membrana (Ibrahimbegovic et al., *Int J Num Meth Eng*, 30:445-457 (1990)). Os conectores de corte são modelados mediante elementos de barra tridimensional viga-coluna que unem o plano meio da laje de concreto e a mesa superior da viga de aço nas posições reais dos conectores de corte de acordo com os relatórios experimentais para os exemplos estudados. Para modelar o concreto em compressão utiliza-se a teoria de plasticidade associada que permite uma idealização eficaz do comportamento não-linear do concreto de acordo com um critério modificado de Ducker e Prager. Enquanto, o concreto em tração é idealizado com base no conceito de fissuração distribuída. Basicamente, este tipo de aproximação considera a fissuração distribuída na zona de influencia associada ao ponto representativo do material. Para modelar o aço utiliza-se também a teoria de plasticidade associada, na qual o critério de Von Mises é utilizado junto com um endurecimento linear. Na modelagem dos conectores de corte é necessário conhecer a curva força-deslocamento relativo, para simular a variação da rigidez do conector com o incremento da força de corte, sendo esta curva não-linear desde o início da carga. Assim, é considerada uma curva exponencial de ajuste para o processo numérico. Finalmente, alguns exemplos de aplicação são apresentados, para validar o modelo proposto, comparando resultados numéricos com resultados experimentais realizados por diversos autores.

## 1 INTRODUÇÃO

Na atualidade as vigas de seção mista apresentam uma solução estrutural atrativa na construção de pontes e edificações, pois permite a redução dos custos e a otimização do comportamento estrutural. Assim, para um projeto correto destas estruturas é necessário fazer uma modelagem adequada e realística da estrutura. Na utilização de modelos simplificados unidimensionais ou bidimensionais, muitas vezes são omitidos aspectos importantes do comportamento estrutural, levando a soluções pouco ótimas e com uma margem de segurança excessiva.

Por exemplo, é importante realizar uma modelagem tridimensional e compreender bem o fenômeno conhecido na literatura inglesa como *shear-lag* que acontece na laje de concreto, além da interação parcial característica da interfase laje-viga. Na atualidade existe muita literatura do tema e vários programas comerciais para efetuar modelagens detalhadas. Neste aspecto, primeiramente é necessário obter um conhecimento sólido da mecânica dos materiais envolvidos nesta área para depois utilizar estes programas com segurança. Seguindo esta ideia, neste trabalho é apresentada uma contribuição à literatura do tema com um modelo numérico para a modelagem tridimensional de vigas mistas utilizando o método dos elementos finitos, onde são considerados os aspectos estruturais mencionados acima.

## 2 BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Três elementos finitos diferentes foram implementados no código computacional proposto para a modelagem de vigas mistas:

- Um elemento de casca degenerada de oito nós de placa espessa, com correções no fator de forma que acompanham as tensões de corte, para evitar o travamento por cortante. Os nós deste elemento estão localizados no plano médio da laje.
- Um elemento de casca poliédrica de quatro nós de placa fina. Os nós deste elemento também são definidos no plano médio das mesas e a alma da viga de aço.
- Um elemento de barra tridimensional que simule diferentes graus de interação parcial para a modelagem dos conectores de corte. Este elemento une os planos médios dos elementos adjacentes nas posições reais dos conectores. Assim a malha de elementos finitos é influenciada por esta divisão.

A Figura 1 mostra a montagem da viga mista, onde o elemento da laje de concreto e o elemento de viga de aço são completados com dois conectores de corte.

### 2.1 Formulação do elemento de placa espessa para a laje de concreto

Para a modelagem da laje de concreto, utiliza-se o elemento finito desenvolvido por Figueiras (1983) com código aberto publicado no trabalho de Hinton e Owen (1994). Ele formula um elemento finito para a análise de placas e cascas de concreto reforçado a partir do elemento de casca proposto por Ahmad et al. (1970). São introduzidas modificações ao código original para a consideração de endurecimento não linear do concreto em compressão. A rotina de fissuração é modificada grandemente seguindo o trabalho de Povoas e Martins (1986) e a consideração do concreto protendido é incorporada segundo o trabalho de Povoas (1991). No elemento de casca, particularizado para a análise de placas, utilizam-se funções de forma quadrática para a interpolação dos deslocamentos, onde os graus de liberdade  $u$ ,  $v$  incluem as ações de membrana, em quanto  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  incluem as ações de flexão. O elemento é dividido em camadas de concreto e aço para considerar a variação das propriedades na espessura. Por exemplo, cada malha de reforço é representada por uma camada de aço uniformemente distribuída com área de seção transversal equivalente por

unidade de largura, sendo esta camada centrada ao nível do centróide das correspondentes barras de reforço, onde a rigidez considerada segue a direção do reforço.

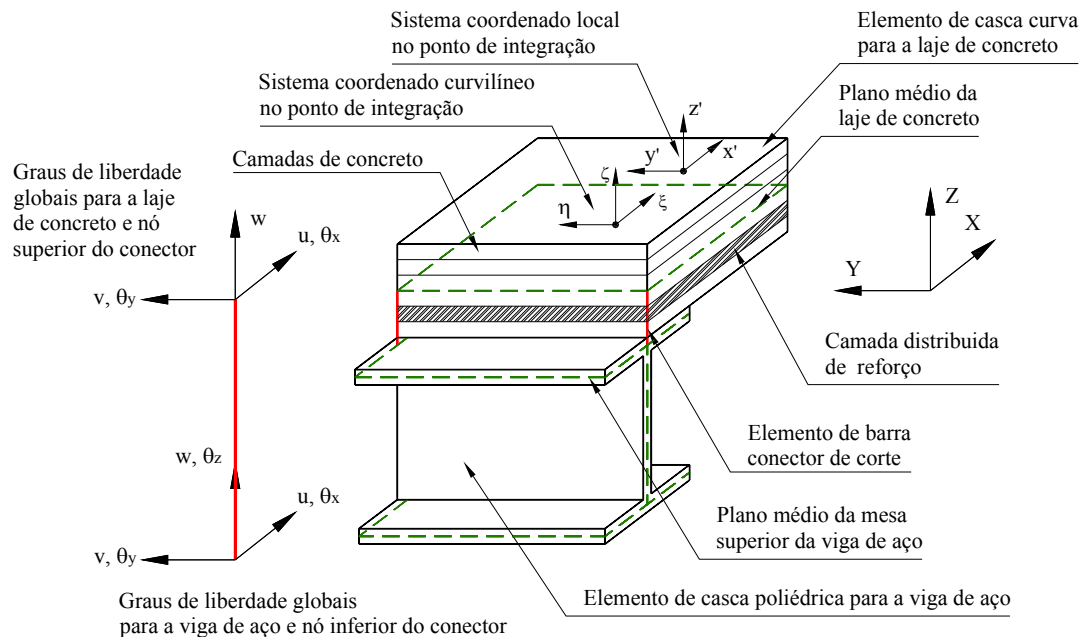


Figura 1: Montagem do elemento de viga mista

Considera-se que cada camada de concreto apresenta um estado plano de tensões para o cálculo das tensões principais, embora as tensões de corte fora do plano são incluídas nas relações constitutivas do material. O elemento pode ser definido de modo que o sistema local e curvilíneo num ponto coincidam com o sistema de eixos globais (válido para placas planas). Assim sendo, as componentes das deformações locais coincidem com as componentes das deformações globais, cuja relação com as componentes dos deslocamentos vem dada por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y''} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = [B]_c \{\delta\}. \quad (1)$$

onde

$$\{\delta\} = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y\}^T. \quad (2)$$

Na Eq. (2)  $\{\delta\}$  é o vetor que contém as componentes dos deslocamentos nodais num determinado nó de um elemento finito e, usando a notação usual de elementos finitos,  $[B]_c$  representa uma matriz de 5 linhas e 40 colunas das primeiras derivadas das funções de forma dos deslocamentos do elemento. Aderência perfeita é considerada entre o aço de reforço e o concreto adjacente, de modo que a Eq. (1) é válida para o cálculo das componentes das

deformações nas camadas de aço. As componentes das tensões nas camadas de concreto e aço no sistema local são obtidas a partir das equações constitutivas como:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (3)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva do material em coordenadas locais do elemento. As forças nodais equivalentes e a matriz de rigidez do elemento são obtidas para a iteração  $i$  a partir do princípio dos trabalhos virtuais como:

$$\{p\}_i = \int_V [B]_c \{\sigma\}_i dV. \quad (4)$$

$$[K]_c^i = \int_V [B]_c^T [D_T]_i [B]_c dV. \quad (5)$$

onde  $[D_T]_i$  é matriz constitutiva tangente para o concreto fissurado, não fissurado, elasto-plástico ou para o aço de reforço elástico ou elasto-plástico segundo corresponda no sistema de eixos locais. A integração é feita camada a camada e os resultados em cada camada são somados para calcular as ações globais do elemento. Considera-se um número mínimo de camadas igual a oito, onde as tensões são supostas constantes em cada uma delas. No plano da camada utiliza-se uma regra de integração de 2x2. O efeito de acoplamento entre os termos de flexão e corte é incluída diretamente no cálculo da rigidez através da matriz  $[B]_c$ .

## 2.2 Formulação do elemento de placa fina para a viga de aço

Para a modelagem da viga de aço é utilizado o elemento de casca poliédrica obtido como resultado da combinação do elemento de membrana proposto por Ibrahimbegovic et al. (1990) e do elemento de placa fina de Batoz e Tahar (1982). Neste caso, a variação das propriedades dos materiais associadas à plastificação progressiva no elemento, é considerada mediante uma regra de integração numérica de cinco pontos na espessura, sendo que uma regra de integração gaussiana completa de 3x3 é utilizada no plano do elemento. Ambas regras são utilizadas para o cálculo das forças nodais equivalentes e da matriz de rigidez do elemento. As componentes de deformação num ponto de integração é definida como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B]_m \{\delta\}_m + z[B]_f \{\delta\}_f. \quad (6)$$

onde:

$$\begin{aligned} \{\delta\}_m &= \{u \quad v \quad \theta_z\}^T, \\ \{\delta\}_f &= \{w \quad \theta_x \quad \theta_y\}^T. \end{aligned} \quad (7)$$

sendo  $\{\delta\}_m$  e  $\{\delta\}_f$  vetores de 12x1 contendo os deslocamentos de membrana e flexão de um determinado nó, respectivamente (ver Figura 1) e  $z$  representa a coordenada na espessura medida a partir do plano médio do elemento. As componentes das tensões são calculadas da

seguinte forma:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = [D]_s \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

onde  $[D]_s$  é a matriz constitutiva do material expressa em coordenadas locais. O princípio dos trabalhos virtuais é aplicado para o cálculo das forças nodais equivalentes de membrana  $\{P_m\}_i$  e flexão  $\{P_f\}_i$  na iteração  $i$ , obtendo-se:

$$\begin{aligned} \{P_m\}_i &= \int_V [B]_m^T \{\sigma\}_i dV, \\ \{P_f\}_i &= \int_V z [B]_f^T \{\sigma\}_i dV. \end{aligned} \quad (9)$$

e para o cálculo das matrizes de rigidezes de membrana  $[K]_m^i$ , flexão  $[K]_b^i$  e acoplamento  $[K]_{mb}^i$  do elemento.

$$[K]_s^i = \begin{bmatrix} [K]_m^i + [K]_p & [K]_{mb}^i \\ [K]_{bm}^i & [K]_b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_V [B]_m^T [D]_s [B]_m dV + \rho \int_V [b]^T [b] dV & \int_V [B]_m^T z [D]_s [B]_f dV \\ \int_V [B]_f^T z [D]_s [B]_m dV & \int_V [B]_f^T z^2 [D]_s [B]_f dV \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde  $[B]_m$  e  $[B]_f$  são as matrizes de deslocamento-deformação usuais para o caso de membrana e flexão, respectivamente e sendo  $[K]_p$  uma matriz com efeito estabilizador para eliminar a singularidade introduzida na consideração da rotação no plano do elemento. O parâmetro  $\rho$  toma o valor de  $0.375G$ , sendo  $G$  o módulo de corte elástico do material e  $b$  é um vetor de  $12 \times 1$  contendo as primeiras derivadas das funções de forma dos deslocamentos nodais. A Figura 2 mostra algumas das definições geométricas utilizadas para os elementos de membrana e placa fina de acordo com as referencias originais.

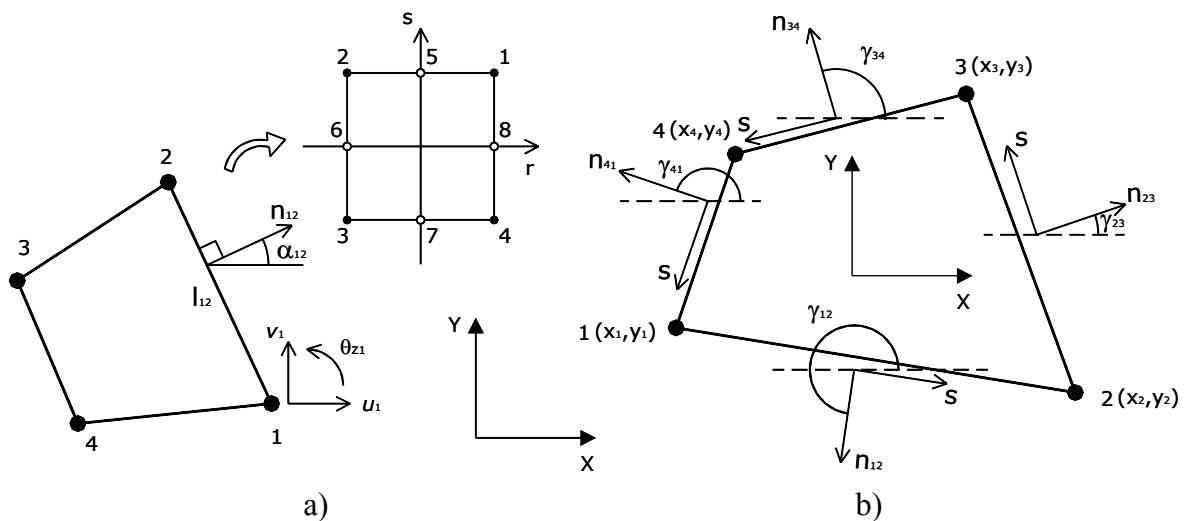


Figura 2: a) Membrana de Ibrahimbegovic et al. (1990) b) Placa fina de Batoz e Tahar (1982)

### 2.3 Formulação do elemento viga-coluna para os conectores de corte

A Figura 3 mostra a definição do eixo local do elemento conector considerado e dos graus de liberdade associados em cada nó, de acordo com trabalho de Tamayo (2011).

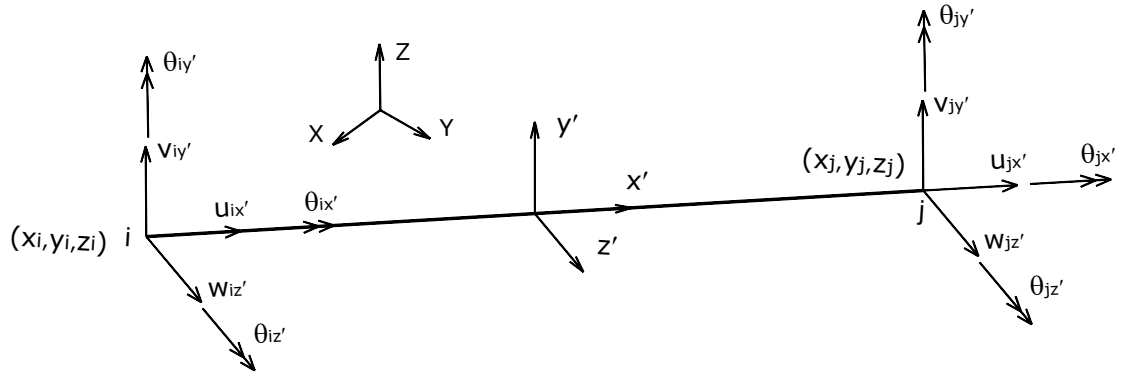


Figura 3: Definição dos graus de liberdade locais do elemento conector tridimensional

A matriz do conector  $[K]_{con}^i$  corresponde à matriz típica de um elemento viga-coluna tridimensional, expressa em termos da rigidez axial  $K_A$ , da rigidez de torção  $K_t$  e das rigidezes laterais de corte  $K_{z'}$  e  $K_{y'}$ , nas direções  $z'$  e  $y'$  (ver Figura 3) e não em termos das propriedades de área. As rigidezes laterais de corte variam em cada iteração  $i$ , de acordo com a equação constitutiva do conector. Então a matriz  $[K]_{con}^i$  em eixos locais vem dada por:

$$[K]_{con}^i = \begin{bmatrix} [K]_i & [K]_i [R]^T \\ [R][K]_i & [R][K]_i [R]^T \end{bmatrix} \tag{11}$$

onde

$$[K]_i = \begin{bmatrix} K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{y'}^i & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{y'}^i L}{2} \\ 0 & 0 & K_{z'}^i & 0 & -\frac{K_{z'}^i L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_{z'}^i L}{2} & 0 & \frac{K_{z'}^i L^2}{2}(2+g) & 0 \\ 0 & \frac{K_{y'}^i L}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{y'}^i L^2}{2}(2+g) \end{bmatrix} \tag{12}$$

e sendo

$$[R] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 & -1 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

O ordenamento das linhas e colunas da matriz  $[K]_i$  segue a seguinte disposição dos graus de liberdade:  $u_{x'}$ ,  $v_{y'}$ ,  $w_{z'}$ ,  $\theta_{x'}$ ,  $\theta_{y'}$ ,  $\theta_{z'}$ , sendo então necessário realizar a transformação usual ao sistema de eixos globais (ver Figura 1). É importante estabelecer que o grau de liberdade correspondente à torção  $\theta_{x'}$  é condensado, pois o elemento da laje de concreto não apresenta este grau de liberdade. A matriz do conector permite estabelecer qualquer grau de interação entre a laje de concreto e a viga de aço quando são fornecidas as rigidezes laterais dos conectores  $K_{y'}$  e  $K_{z'}$  obtidas dos ensaios experimentais. Compatibilidade nos deslocamentos axiais e giros entre o plano médio da laje e a mesa superior da viga de aço é conseguida mediante a consideração de valores muito grandes nos termos  $K_A$  e  $g$ , respectivamente. Neste último caso, o fator de corte  $g$  é utilizado como um fator de penalidade.

### 3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS ENVOLVIDOS

Uma breve descrição dos modelos constitutivos dos materiais utilizados no presente modelo numérico é apresentada a seguir. Descrições mais detalhadas destes modelos encontram-se nos trabalhos de Hinton e Owen (1994), Figueiras (1983) e Povoas (1991) para o concreto e nos trabalhos de Mesquita et al. (1998) e Tamayo (2011) para o aço.

#### 3.1 Modelo constitutivo do concreto

Para modelar o concreto em compressão utiliza-se a teoria de plasticidade associada que permite uma idealização eficaz do comportamento não linear do concreto. Assim, é preciso conhecer as seguintes leis: (i) a lei que estabelece a condição de escoamento; (ii) a lei de escoamento plástico; (iii) a lei de endurecimento e (iv) a lei de esmagamento. O critério de escoamento elasto-plástico é associado à definição de duas superfícies de escoamento que dividem os diversos comportamentos do modelo de concreto considerado, sendo elas as seguintes: a superfície de escoamento inicial, que determina o início da deformação plástica; e a superfície de escoamento limite que separa o estado com endurecimento não linear e o estado com comportamento elasto-plástico perfeito. Todas estas superfícies são definidas no lado esquerdo da Figura 4. No presente trabalho é considerada que ambas superfícies são definidas pela superfície estabelecida por Figueiras (1983):

$$f(\sigma) = \left\{ 1.355 \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] + 0.355 \sigma_o (\sigma_x + \sigma_y) \right\}^{1/2} = \sigma_o. \quad (14)$$

onde  $\sigma_o$  é a tensão efetiva, por outro lado, a lei de escoamento plástica relaciona os incrementos de deformações plásticas com o vetor das componentes das tensões a que o material está sujeito. O incremento da deformação plástica é definido pela Eq. (15).

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\{a\}^T [D]}{H' + \{a\}^T [D] \{a\}} \{d\varepsilon\} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (15)$$

com

$$\{a\}^T = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right). \quad (16)$$

onde  $[D]$  é a matriz elástica constitutiva do material,  $\{d\varepsilon\}$  é o vetor de deformações totais e  $H'$  é a declividade local da curva deformação plástica e tensão uniaxial obtida a partir da curva uniaxial mostrada na parte direita da Figura 4. A lei de endurecimento que define o movimento das superfícies de escoamento durante a deformação plástica (Povoas, 1991) é

determinada por:

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}_p) = E_c \left[ \left( \varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o}{\gamma} + \bar{\varepsilon}_p \right) + \left( \frac{\varepsilon_o^2}{\gamma} + \frac{\varepsilon_o^2}{\gamma} + 2 \frac{\varepsilon_o \bar{\varepsilon}_p}{\gamma} \right)^{1/2} \right] \quad (17)$$

onde  $E_c$  é o módulo de elasticidade longitudinal inicial,  $\varepsilon_o$  representa a deformação total correspondente a  $f_c$ , que é a tensão de fissuração do concreto em compressão e  $\bar{\varepsilon}_p$  é a deformação plástica efetiva, sendo que  $\gamma$  é um fator igual a 0.96. Portanto, a relação constitutiva elasto-plástica pode ser expressa em forma diferencial como:

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep} \{d\varepsilon\} = \left\{ [D] - \frac{[D]\{a\}\{a\}^T [D]}{H' + \{a\}^T [D]\{a\}} \right\} \{d\varepsilon\} \quad (18)$$

O critério de esmagamento do concreto em compressão para um estado multiaxial de tensões é considerado simplesmente convertendo o critério de escoamento descrito em termos de tensões diretamente em deformações (Figueiras, 1983; Povoas, 1991). Assim, define-se:

$$1.355(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y) + 1.01625(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) + 0.355\varepsilon_u(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \varepsilon_u^2 \quad (19)$$

onde  $\varepsilon_u$  é a deformação total última extrapolada dos resultados dos ensaios uniaxiais (ver lado direito da Figura 4). Quando  $\varepsilon_u$  alcança um valor especificado, como a deformação última, o material perde todas suas características de rigidez e resistência.

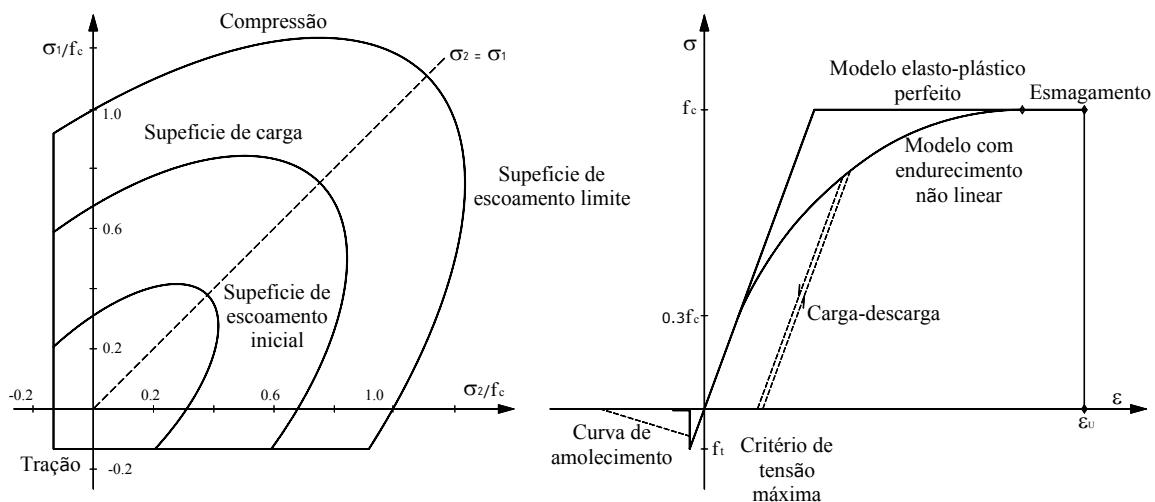


Figura 4: Esquerda) Representação bidimensional do critério de escoamento e critério de tração máxima para o concreto Direita) Representação uniaxial do modelo elasto-plástico do concreto

O concreto em tração é idealizado com base no conceito de fissuração distribuída. Nesse modelo necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissuração, sem necessidade de modificar a malha de elementos finitos original. O critério de fissuração segue o critério de tensão máxima que define a superfície de fratura (ver lado esquerdo da Figura 4). Excedida a tensão de fratura do concreto pela tensão principal máxima instalada num ponto, admite-se a formação de uma fissura na direção perpendicular à referida tensão principal, transformando-se posteriormente o concreto num material ortótropo com os eixos de ortotropia coincidentes com as direções das tensões principais.

No presente modelo é permitida a formação de duas fissuras mutuamente ortogonais para



cada punto do material, mantendo-se a respectiva direção fixa ao longo do processo de carga, independente das modificações ocorridas nas direções das tensões principais. Admitem-se diferentes configurações de fissuração (Povoas, 1991; Povoas e Martins, 1986) estabelecidas com base no valor da extensão instalada segundo a direção do plano que contém a fissura. As relações constitutivas para o concreto fissurado são estabelecidas num referencial material  $(n, t, z')$  definido a partir do ângulo que define a orientação das fissuras. Estas relações são expressas em termos de tensões e deformações totais, representadas genericamente por:

$$[\sigma]_{cr} = [D]_{cr} [\varepsilon]_{cr} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \tau_{nz'} \\ \tau_{tz'} \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{tn} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{nz'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{tz'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{nz'} \\ \gamma_{tz'} \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o módulo de corte  $G$ , que depende do coeficiente de retenção da rigidez ao corte  $\beta_n$  (ao qual se fará referência posteriormente), tomam valores variáveis de acordo com a configuração de fissuração instalada. As relações indicadas acima definem a matriz constitutiva  $[D]_{cr}$ , a ser considerada na determinação da contribuição do concreto fissurado para a formação da matriz de rigidez da estrutura. Após torna-se necessária a transformação dos eixos de referencia da fissura  $(n, t, z')$  para o referencial local  $(x', y', z')$  através da relação usual de transformação, onde  $[T]$  é a matriz típica de transformação.

$$[D] = [T]^T [D_{cr}] [T] \quad (21)$$

A aderência que se estabelece entre o concreto e a armadura é responsável pela capacidade de retenção das tensões normais de tração atribuída ao concreto fissurado. Este efeito é modelado indiretamente através da relação estabelecida entre as componentes normais dos estados de tensão e de deformação coincidentes com a direção do plano da fissura, que é ilustrado pelo diagrama representado na Figura 5a. Enquanto, em estruturas de concreto simples ou onde o concreto encontra-se fora da zona da influência da armadura, o diagrama mencionado anteriormente é substituído por um diagrama tensão-extensão definido a partir da energia de fratura do material  $G_f$  e da espessura da peça de concreto  $h$ , que assegure a objetividade da solução relativamente à malha de elementos finitos utilizada (ver Figura 5b).

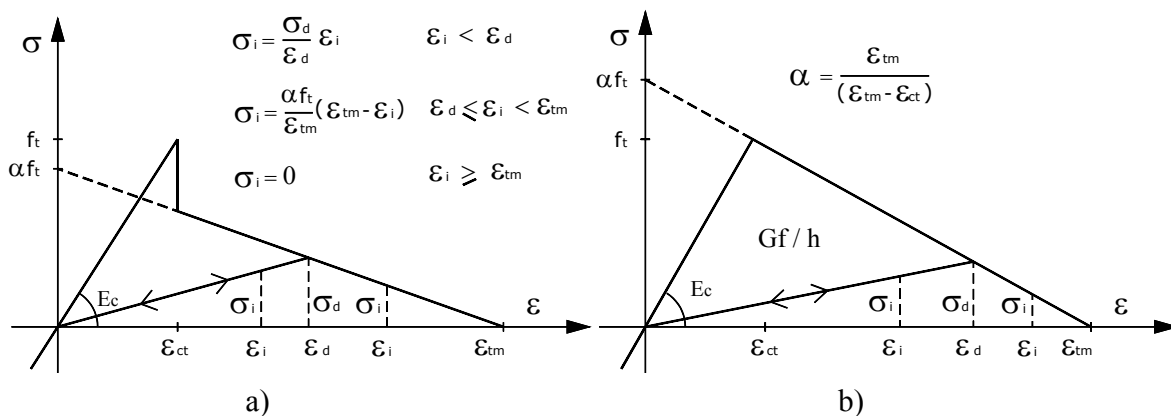


Figura 5: Diagrama de retenções para o concreto fissurado

Na Figura 5,  $f_t$  é a resistência máxima à tração do concreto,  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto,  $\varepsilon_{ct}$  é a deformação correspondente à máxima tração  $f_t$ ,  $\varepsilon_{tm}$  é a máxima deformação para um valor de  $\alpha$  entre 0.5-0.7 (Povoas, 1991). O valor da tensão normal  $\sigma_i$ , é determina (ver Figura 5) para uma deformação corrente no concreto  $\varepsilon_i$ , segundo a direção da fissura.

Os resultados experimentais também indicam que uma parte substancial do esforço de corte é transferida através das superfícies das fissuras. A solução adotada considera que a rigidez ao corte manifestada pelo concreto fissurado é considerada através de uma redução gradual do módulo de corte,  $G$ , definida através do coeficiente de retenção da rigidez ao corte,  $\beta_n$ , incluído implicitamente na Eq. (20), sendo  $\beta_n$  por exemplo considerado no termo  $G_{nz'} = \beta_n G$ . Expressando este coeficiente em termos da extensão aparente de tração normal ao plano da fissura  $\varepsilon_n$ , e adotando a aproximação linear usada por Figueiras (1983), tem-se:

$$\beta_n = \begin{cases} 0.25 \left( 1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{sr}} \right) & \varepsilon_n < \varepsilon_{sr}, \\ 0 & \varepsilon_n \geq \varepsilon_{sr}. \end{cases} \quad (22)$$

O valor de  $\varepsilon_{sr}$ , para objetivos práticos, toma os valores entre (0.003-0.005).

### 3.2 Modelo constitutivo do aço

O modelo constitutivo utilizado para o estado de tensões multiaxiais instalado na viga metálica segue o critério da superfície de Von Mises como é mostrado no lado esquerdo da Figura 6. Esta superfície de escoamento se expande com um endurecimento linear de acordo ao modelo uniaxial mostrado no lado direito da mesma figura. Assim mesmo, o aço de reforço da laje de concreto é também modelado como um material elasto-plástico com um módulo elástico  $E_s$  e um módulo de endurecimento  $E_s'$  de acordo ao diagrama constitutivo uniaxial tensão-extensão bi-linear (ver lado direito da Figura 6). Valores reais para a tensão de escoamento e módulo de endurecimento são utilizados nos exemplos de aplicação.

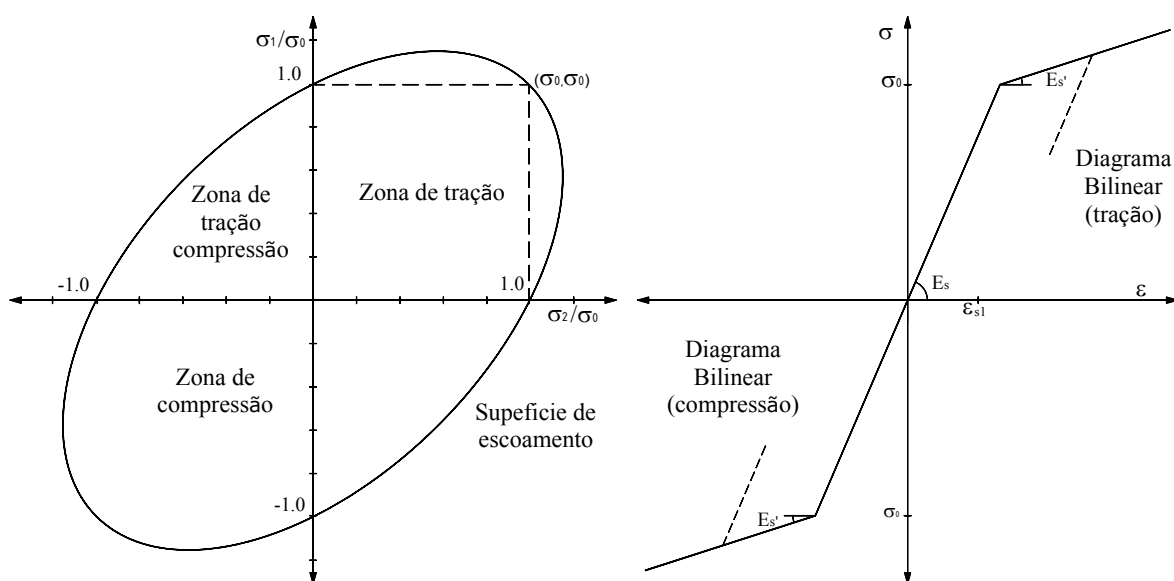


Figura 6: Leis constitutivas para o aço

### 3.3 Modelo constitutivo para o aço dos conectores

Na modelagem dos conectores de corte é necessário conhecer a curva força cortante-deslocamento relativo (conhecida na literatura inglesa como *shear force-slip curve*) para simular a variação da rigidez do conector com o incremento da força de corte. Na literatura especializada, podem ser encontradas várias curvas experimentais para as quais é possível estabelecer um ajuste mediante a equação utilizada no trabalho de Razaqpur e Nofal (1989), sendo:

$$\begin{aligned} F_{\alpha} &= a(1 - e^{-bs_{\alpha}}) \\ \frac{dF_{\alpha}}{ds} &= k = abe^{-bs_{\alpha}} \end{aligned} \quad (23)$$

Nessa equação  $F_{\alpha}$  é a força de corte atuante no conector na direção  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$  são constantes que definem o tamanho e forma da curva,  $s_{\alpha}$  é o deslocamento relativo associado à direção  $\alpha$  e sendo  $k$  a rigidez de corte tangente na barra que relaciona a força de corte com o deslocamento relativo. O valor de  $k$  obtido desta maneira, corresponde aos valores de  $K_{y'}$  e  $K_{z'}$  apresentados na Eq. (12) quando  $\alpha$  coincide com as direções  $y'$  e  $z'$ , respectivamente.

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Primeiramente são avaliados individualmente os funcionamentos dos elementos finitos de concreto e de aço, sendo posteriormente considerados os exemplos de vigas mistas.

### 4.1 Viga de concreto armado de Bresler e Scordelis (1963)

A viga simplesmente apoiada designada como A-3 ensaiada por Bresler e Scordelis (1963) é selecionada neste estudo. A viga é sujeita a uma carga concentrada no meio do vão. O tipo de falha observada experimentalmente é por esmagamento do concreto em compressão perto da zona da seção localizada no meio do vão. A geometria e a seção transversal são mostradas na Figura 7. As propriedades dos materiais são especificadas na Tabela 1.

Propriedades dos Materiais (cm,KN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2980	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20530
Poisson	$\nu =$	0.15	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	8150
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	4.3	Tensão de Escoamento	$F_y =$	55.2
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.43	Ângulo com o eixo long.	$\theta =$	0
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.003	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20120
Coefficiente de Tração	$\alpha =$	0.6 (*)	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.0015 (*)	Tensão de Escoamento	$F_y =$	34.52
(*) só para as 4 camadas inferiores			Ângulo com o eixo long.	$\theta =$	0

Tabela 1: Propriedades dos materiais.

Considerando a simetria da estrutura, somente a metade da viga foi considerada. Quatro elementos finitos são usados, refinando a malha perto da localização da carga onde efeitos não lineares são esperados. Neste exemplo são comparados os modelos elasto-plástico perfeito (PP) e o modelo com endurecimento não linear (HP) para o concreto em compressão. Dos resultados obtidos, uma significativa melhora é obtida com o último modelo.

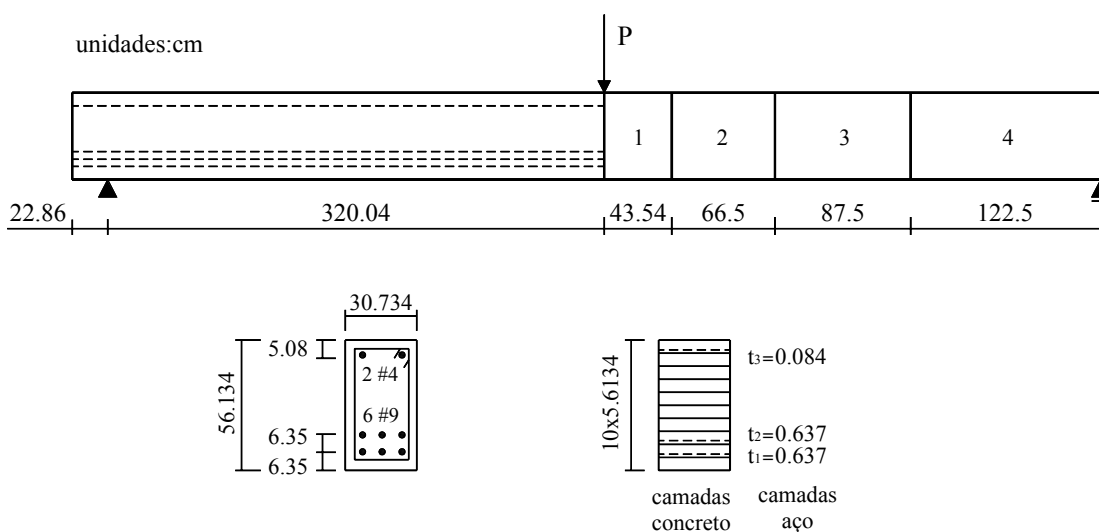


Figura 7: Geometria, malha de elementos finitos e padrão de camadas

Na Figura 8 são mostrados os deslocamentos na seção no meio do vão com o incremento da carga aplicada. A solução numérica obtida com o modelo numérico perfeitamente plástico (PP) e o modelo com endurecimento não linear (HP) para o concreto em compressão são comparadas com a curva experimental. Excelentes resultados são obtidos com o modelo com endurecimento não linear (HP). A ligeira diferença para níveis de carga maiores pode ser devido às poucas camadas de concreto consideradas na parte superior, perto da zona, onde a carga pontual é aplicada.

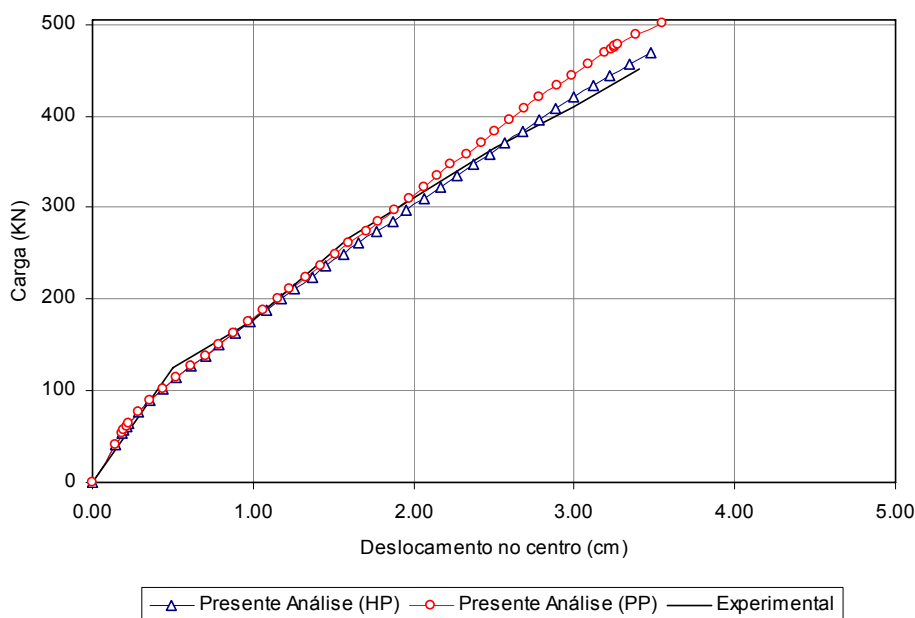


Figura 8: Curvas numéricas de força-deslocamento vertical no centro da viga

### 4.2 Laje de concreto armado de Jofriet e Mcniece (1971)

A laje quadrada apoiada nos cantos ensaiada por Jofriet e Mcniece (1971) é estudada. As condições de contorno usadas no experimento não são bem definidas, utilizando-se

geralmente apoios livres ou fixos, neste trabalho considera-se o caso de apoios fixos. A laje estudada é reforçada simetricamente na superfície inferior. A propriedades dos materiais e geometria da laje são apresentadas na Tabela 2 e Figura 9, respectivamente. Uma malha de 11 elementos finitos é utilizada para modelar o comportamento nos cantos. A espessura da laje é dividida em 8 camadas de concreto e 2 camadas de aço, respectivamente. Pela simetria, somente um quarto da laje é considerado. Dois tipos de análise são considerados aqui: análise não linear geométrico (GNL) e análise linear geométrico (GL), sendo ambas análises realizadas para o modelo de endurecimento não linear do concreto em compressão (HP).

Propriedades dos Materiais (cm,KN)					
Concreto		Aço			
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2860	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
Poisson	$\nu =$	0.15	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	3.8	Tensão de Escoamento	$F_y =$	41.34
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.38	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0035	Ângulo com o eixo Y	$\theta =$	1.57
Coefficiente de Tração	$\alpha =$	0.5			
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.002			

Tabela 2: Propriedades dos materiais.

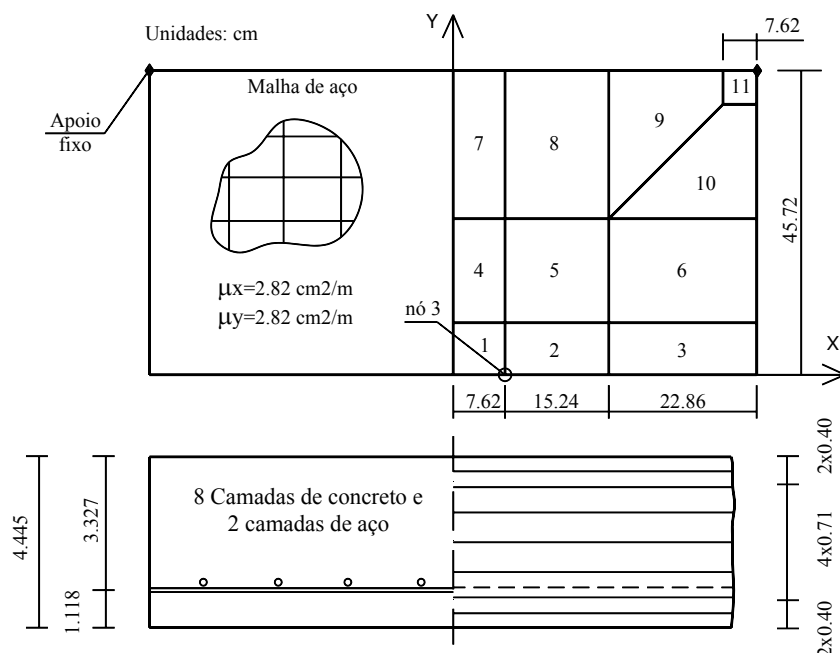


Figura 9: Geometria, malha de elementos finitos e padrão de camadas utilizadas na laje de concreto

Na Figura 10 são comparados os resultados do deslocamento vertical no nó 3 obtidos com o presente modelo numérico e os resultados obtidos por Di e Cheung (1993) e Melhorn e Klein (1975). Este último autor apresenta um valor maior de carga de colapso para a análise geométrica linear (GL). Esta diferença pode-se atribuir provavelmente à consideração de um valor maior da resistência à compressão utilizada. É importante comentar que os resultados experimentais não são publicados até o carregamento de colapso.

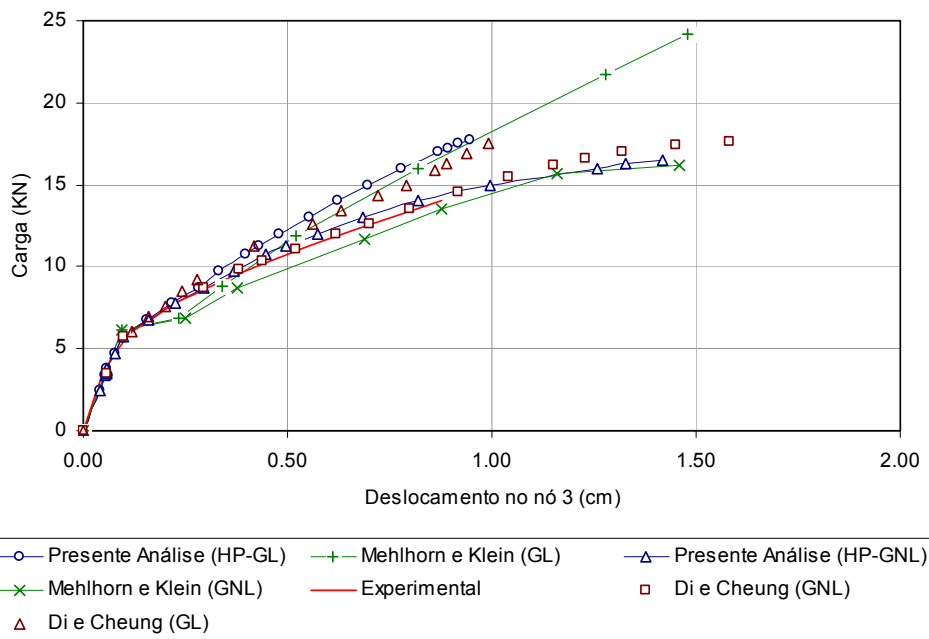


Figura 10: Deslocamento vertical no nó 3 para a condição de apoio fixo

### 4.3 Placa elasto-plástica

A placa apresentada na Figura 11 é simplesmente apoiada e está solicitada por um carregamento distribuído  $q$ . Devido à simetria da placa, somente um quarto da estrutura é considerado. Dessa forma, adotou-se uma malha de 4x4 elementos finitos de casca fina. As propriedades do material são apresentadas na Tabela 3. Na Figura 12, o deslocamento transversal  $w$  no centro da placa (ponto A) é comparado com os resultados obtidos por Owen e Hinton (1980) e Mesquita et al. (1999). Neste exemplo foram admitidas tolerâncias em força de 0.01%. Os resultados confirmam que o uso de cinco pontos de integração na espessura do elemento é suficiente.

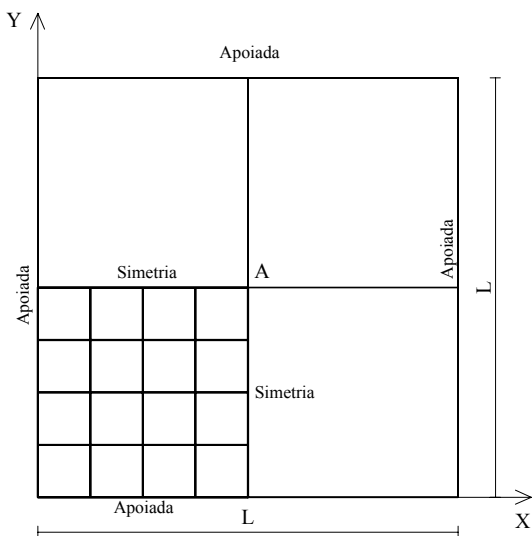


Figura 11: Geometria e malha de elementos finitos

Propriedade do Material e Geometria da placa (cm,KN)			
Módulo de Elasticidade	$E_c = 109200$	Espessura da placa	$h = 1$
Módulo de Endurecimento	$H' = 0.0$	Comprimento da placa	$L = 100.0$
Poisson	$\nu = 0.3$	Rigidez à Flexão da placa	$D = 10000$
Tensão de Escoamento	$\sigma_y = 1600$	Momento de escoamento	$M_p = 40000$

Tabela 3: Propriedade do material.

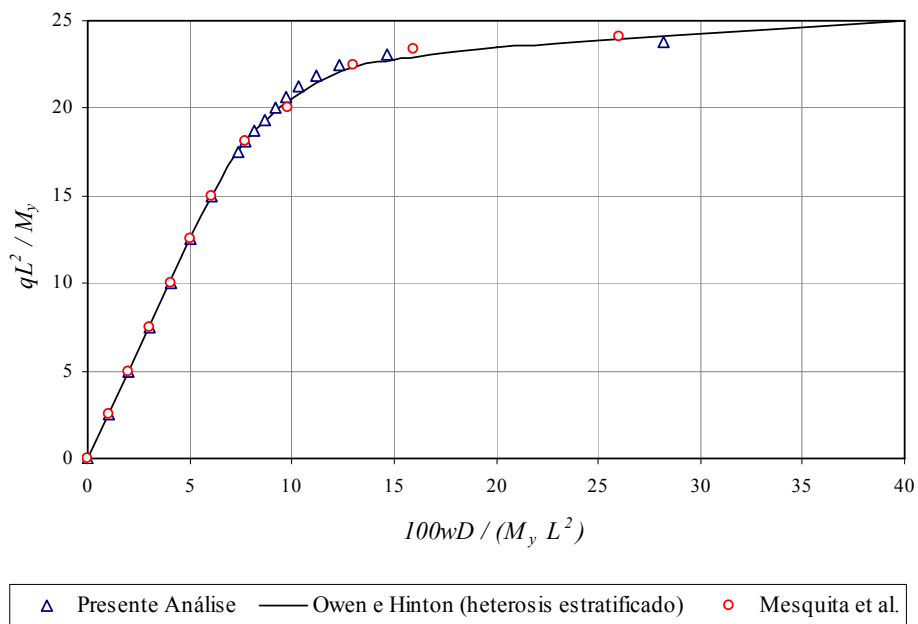


Figura 12: Curva carga-deslocamento vertical no ponto A

#### 4.4 Viga mista testada por Chapman e Balakrishnan (1964)

Uma viga simplesmente apoiada ensaiada por Chapman e Balakrishnan (1964), designada como U4 é selecionada neste estudo. Esta viga é submetida a um carregamento distribuído entre apoios. O tipo de falha observada experimentalmente foi devido aos conectores. A geometria e a seção transversal são mostradas na Figura 13.

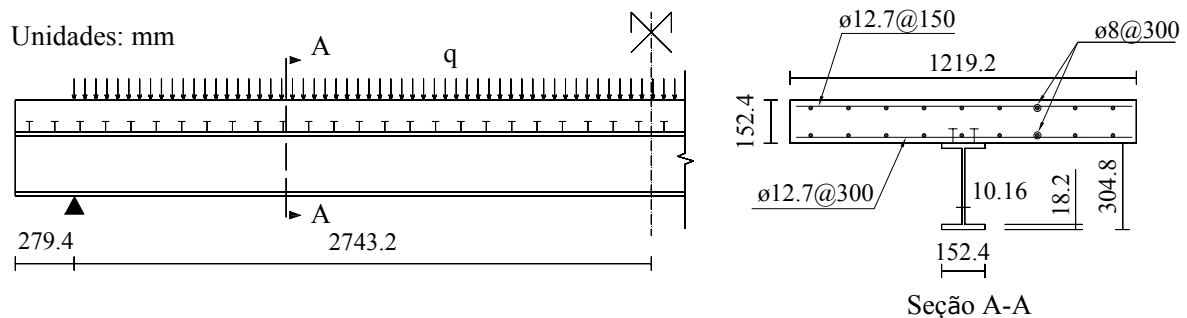


Figura 13: Vista lateral e seção transversal da viga mista U4

As propriedades dos materiais são especificadas na Tabela 4. Considerando a simetria da

estrutura, só a metade da viga foi considerada. Nesta análise a distribuição real dos conectores no sentido longitudinal e transversal de acordo ao relatório experimental é considerada. A curva correspondente ao deslocamento no ponto médio do vão com o incremento da força é comparado com outros resultados.

Propriedades dos Materiais (cm,KN)				
Material	Propiedades		Viga U4	Viga CTB4
Aço estrutural	Tensão de Escoamento (mesa)	$\sigma_y =$	26.5	23.6
	Tensão de Escoamento (alma)	$\sigma_y =$	26.5	23.8
	Tensão Última (mesa)	$\sigma_u =$	41	39.3
	Tensão Última (alma)	$\sigma_u =$	41	40.1
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20500	21000.0
	Poisson	$\nu =$	0.3	0.3
	Deformação Última (mesa)	$\varepsilon_u =$	0.25	0.25
	Deformação Última (alma)	$\varepsilon_u =$	0.25	0.25
Aço de reforço	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	25	25.0
	Tensão Última	$\sigma_u =$	35	35.0
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	21000	21000.0
	Poisson	$\nu =$	0.3	0.3
	Deformação Última	$\varepsilon_u =$	0.25	0.25
Concreto	Resistencia à Compressão	$f_c =$	3.38	2.8
	Resistencia à Tração	$f_t =$	0.314	0.28
	Módulo de Elasticidade	$E_c =$	3292	3000
	Poisson	$\nu =$	0.15	0.15
	Deformação Última	$\varepsilon_u =$	0.0045	0.004 ou 0.01
Conector	Espaçamento (zona 1)	$s =$	triangular	35
	Espaçamento (zona 2)	$s =$	não existe	30
	Diâmetro x altura	$d \times h =$	1.9 x 10.2	1.9 x 7.5
	Número de linhas	$n =$	2	3
	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	43.5	43.5
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000	20000
	Poisson	$\nu =$	0.3	0.3
	Constante 1	$a =$	126	110
Constante 2	$b =$	20	13	

Tabela 4: Parâmetros dos materiais para a viga U4 e CTB4.

Na Figura 14 é mostrada a malha utilizada no modelo numérico, ela consiste de 200 elementos de casca degenerada para a laje de concreto, 220 elementos de casca poliédrica para a viga de aço e 16 elementos tipo viga-coluna para a representação dos conectores de corte. Na Figura 15 é comparado o deslocamento vertical no médio do vão com o incremento da força, obtido com o presente modelo numérico e com o modelo analítico de Owen et al. (1997). Nesta mesma figura foram incluídas as curvas experimentais consideradas por Gatesco (1999) e El-Lobody (2002) para validar seus próprios modelos. Ambas curvas experimentais apresentam uma discrepância principalmente na zona de escoamento da viga de aço.



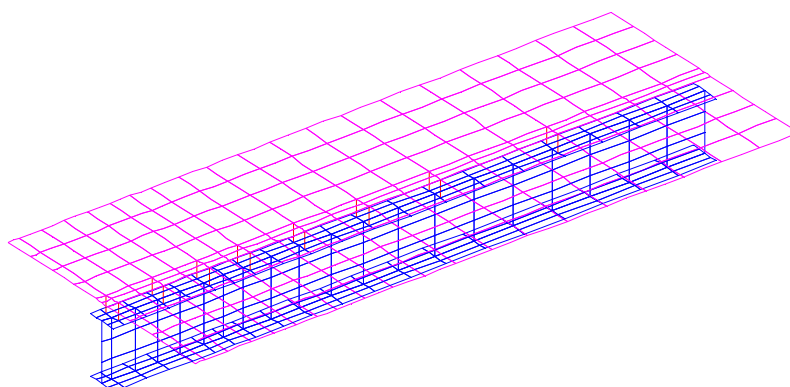


Figura 14: Malha utilizada na modelagem da viga mista U4

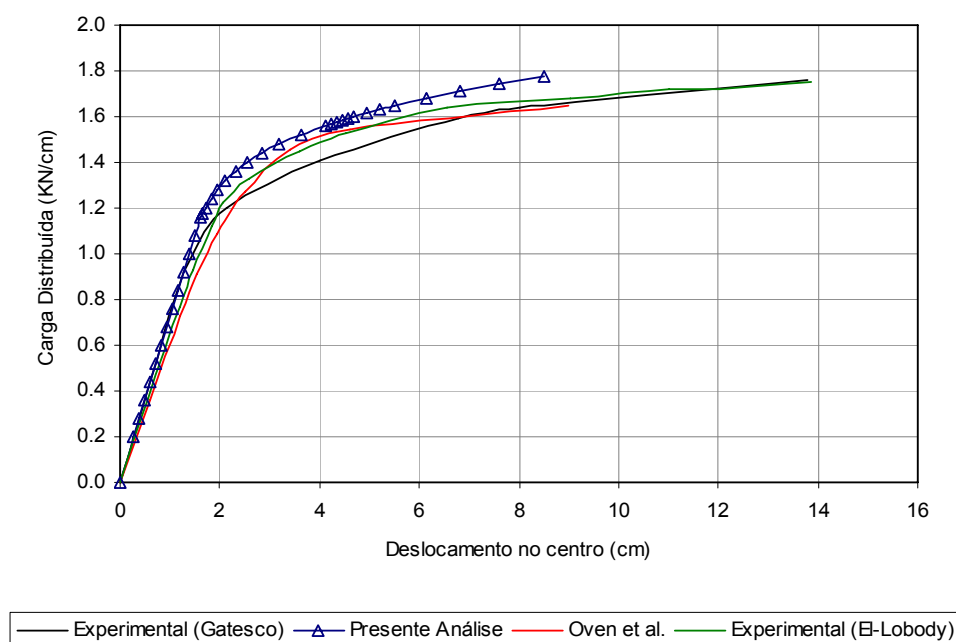


Figura 15: Curva força-deslocamento vertical para a seção central da viga U4

O presente modelo fornece resultados aceitáveis, embora ligeiramente mais rígidos que os resultados experimentais na zona onde predomina precisamente o escoamento da viga de aço. O tipo de falha fornecido pelo modelo numérico corrobora a falha nos conectores, sendo o maior deslocamento relativo (conhecido na literatura inglesa como *slip*) num conector igual a 2 mm. Em relação à ductilidade da estrutura, os resultados concordam bem com os resultados apresentados por Oven et al. (1997). A carga de colapso obtida com o modelo numérico é de 1.78 KN/cm enquanto o valor experimental é igual a 1.75 KN/cm aproximadamente.

#### 4.5 Viga mista testada por Ansourian (1981)

Para verificar o modelo numérico na presença do momento negativo, a viga de ponte de dois vãos ensaiada experimentalmente por Ansourian (1981) e denominada CTB4 foi simulada com o presente modelo numérico. Toda a informação do teste é devido a Valipour e Bradford (2009) e Titoum et al. (2008). Os conectores de corte são igualmente espaçados em grupos de três cada 35 cm ao longo do comprimento da viga, com exceção da zona do apoio

interno, onde o espaçamento é reduzido a cada 30 cm. A viga é carregada simetricamente com forças pontuais na metade de cada um dos vãos.

O modo de falha na viga (devido às referencias mencionadas) acontece por esmagamento do concreto na zona de momento positivo perto da aplicação da carga. Os detalhes geométricos da viga são mostrados na Figura 16 e as propriedades dos materiais são especificadas na Tabela 4. Considerando a simetria da estrutura, somente a metade da viga foi considerada. Nesta análise os três conectores de corte no sentido transversal são juntados num superconector com rigidez e resistência equivalente aos conectores reais, mantendo a distribuição longitudinal experimental. Esta simplificação foi utilizada por Razaqpur e Nofal (1989) e recentemente por Xia et al. (2008), apresentando resultados adequados.

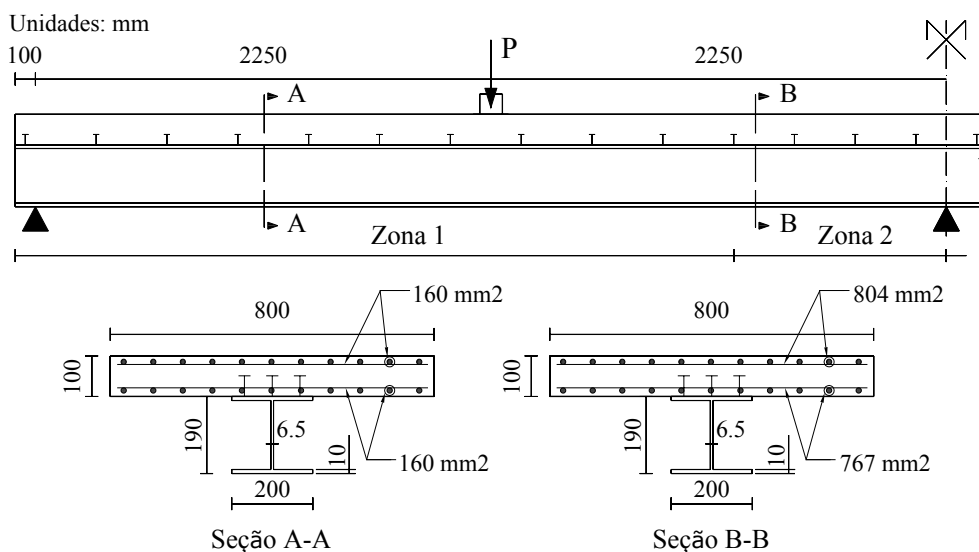


Figura 16: Vista lateral e seções transversais da viga mista CTB4

A malha utilizada é mostrada na Figura 17. São utilizados no modelo numérico 96 elementos de casca degenerada para a laje de concreto, 112 elementos de casca poliédrica para a viga de aço e 14 elementos tipo viga-coluna para os conectores. A discretização é menor perto da zona da aplicação da carga, devido à maior não linearidade existente. A força pontual é aplicada em forma de uma carga uniformemente distribuída.

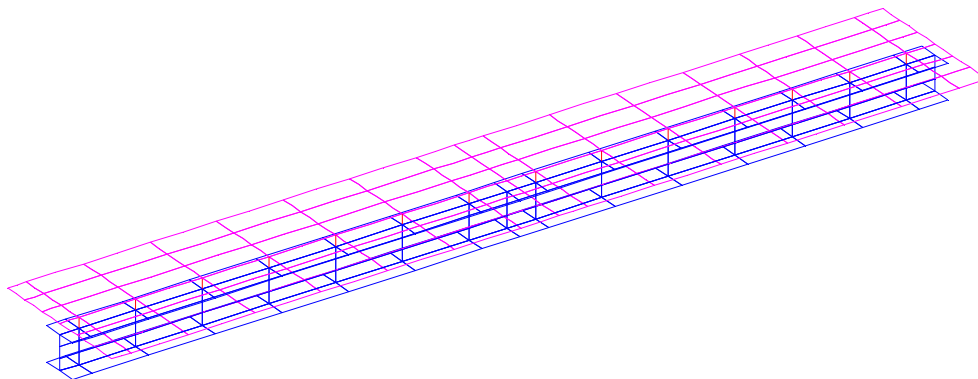


Figura 17: Malha de elementos finitos para a viga mista CTB4

O incremento do deslocamento no centro do vão com a força é mostrado na Figura 18. Os resultados concordam razoavelmente com os resultados experimentais. A linha em vermelho

corresponde ao caso quando a deformação última no concreto é igual a 0.0040 segundo Titoum et al. (2008). A linha em azul corresponde ao caso quando a deformação última no concreto é igual a 0.01 de acordo com Valipour e Bradford (2009). O modo de falha obtido com o presente modelo numérico corresponde ao esmagamento do concreto na zona da aplicação da carga, verificando-se o modo de falha estabelecida em outras referencias.

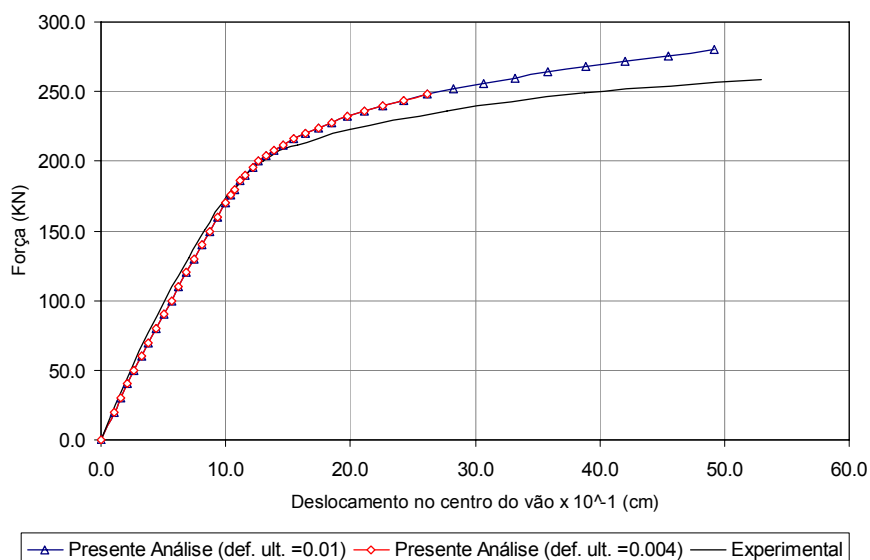


Figura 18: Curva força-deslocamento vertical para a seção central da viga CTB4

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se um modelo de elementos finitos para a modelagem numérica até colapso de vigas mistas de concreto e aço. Cada um dos elementos finitos que compõem a viga mista foi avaliado independentemente com exemplos usualmente encontrados na literatura, obtendo-se resultados adequados quando comparados com os resultados experimentais ou aqueles de outros autores. Finalmente, o modelo numérico de viga mista foi avaliado com dois exemplos típicos da literatura para este tipo de estruturas. O maior erro na carga colapso obtido é de 8% e corresponde à viga CTB4. O presente modelo também reproduz adequadamente os modos de falha das vigas testadas. O processo incremental iterativo de *Newton Rapshon* modificado, acoplado com um critério de forças desequilibradas, resultou adequado no processo de convergência. O número de incrementos usados nos exemplos de viga mista apresentou uma média de 40, sendo o maior número de iterações conseguido para um incremento de carga igual a 25 para uma norma de forças igual a 0.01%.

## 6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro concedido.

## REFERÊNCIAS

- Ahmad, S., Irons, B.M., e Zienkiewicz, O.C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2:419–451, 1970.
- Ansourian, P., Experiments on continuous composite beams. *Proc. Institution of Civil Engineers Part 2*, 71:25–51, 1981.

- Batoz, J., e Tahar, M., Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1655–1677, 1982.
- Bresler, B., e Scordelis, A.C., Shear strength of reinforced concrete beams. *ACI Journal*, 60:51–73, 1963.
- Chapman, J., e Balakrishnan, S., Experiments on composite beams. *Structural Engineer*, 42:369–383, 1964.
- Di, S., e Cheung, Y.K., Nonlinear analysis of RC shells structures using laminated element II. *Journal of Structural Engineering*, 119:2074–2094, 1993.
- El-lobody M. E., *Finite element modeling of shear connection for steel-concrete composite girders*, 2002. Phd. Thesis, University of Leeds
- Figueiras, J.A., *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*, 1983. Phd. Thesis, University of Wales.
- Gattesco, N., Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection. *Journal of Constructional Steel Research*, 52:195–218, 1999.
- Hinton, E., e Owen, D.R., *Finite element software for plates and shells*, volume I. Pineridge Press, 1994.
- Ibrahimbegovic, A., Taylor, R., e Wilson E.A., A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:445–457, 1990.
- Jofriet, J.C., e Mcniece, G.M., Finite element analysis of reinforced concrete slabs. *Journal of the Structural Division*, 97:785–806, 1971.
- Mehlhorn, G., e Klein, D., *Finite element analysis of reinforced concrete slabs and panels*. Institut fur Massinbau, Technischuele Darmstadt, 1975.
- Mesquita, A.D., Coda, H.B., e Proença S.B., A finite element for elastoplastic analysis of thin plates and shells. *Computational Mechanics*, 1998.
- Oven, V.A., Burgess, I.W., Plank, R.J., e Abdul, A.A., An analytical model for the analysis of composite beams with partial interaction. *Computers & Structures*, 62:493–504, 1997.
- Owen, D.R., e Hinton, E., *Finite element in plasticity: theory and practice*, volume I. Pineridge Press, Swansea, 1980.
- Povoas, R.F., *Modelos não lineares de análise e dimensionamento*, 1991. Tese de Doutorado, Universidade de Porto.
- Povoas, R.F., e Martins, R.F., Análise de estruturas planas de betão armado pelo metodo dos elementos finitos. *Revista Portuguesa de Engenharia da Universidade de Porto RPEE*, 25:33–47, 1986.
- Razaqpur, A.G., e Nofal, M., A finite element for modeling the nonlinear behavior of shear connectors in composite structures. *Computers & Structures*, 32:169–174, 1989.
- Tamayo J. P., *Análise numérica de vigas mistas pelo método dos elementos finitos*, 2011. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil–PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul–UFRGS. Porto Alegre, Brasil.
- Titoum M., Tehami, M., Achour B., e Jaspert J., Analysis of semi-continuous beams with partial shear connection using 2-D finite element approach. *Asian Journal of Applied Science*, 1:185–205, 2008.
- Valipour, H.R., e Bradford, M.A., A steel-concrete composite beam element with material nonlinearities and partial shear interaction. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45:966–972, 2009.
- Xia, Y., Hao, H., Deeks, A., e Zhu, X., Conditions assessment of shear connectors in slab-girder bridges via vibration measurements. *Journal of Bridge Engineering*, 13:43–54, 2008.