

## UNA ESTRATEGIA PARA EL ANÁLISIS PSEUDO-ESTÁTICO DE PROBLEMAS CON ABLANDAMIENTO USANDO UN INTEGRADOR EXPLÍCITO

**Fernando G. Flores**

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,  
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, [fflores@efn.uncor.edu](mailto:fflores@efn.uncor.edu), <http://www.efn.uncor.edu>*

**Keywords:** Elementos finitos, códigos explícitos, problemas estáticos, relajación

**Resumen.** En el presente trabajo se presenta una estrategia para la solución de problemas de sólidos y estructuras con no-linealidades fuertes, principalmente debidas al modelo constitutivo. El objetivo final es la aplicación a estructuras de materiales compuestos en los que el inicio de la fisuración de la matriz implica un ablandamiento local, que si la fisura se propaga se transforma en un ablandamiento global. El abordaje se realiza a través de un código de elementos finitos de propósito general que utiliza una integración explícita de las ecuaciones de movimiento. Con estos códigos las trayectorias de equilibrio estático se obtienen mediante la introducción de un importante amortiguamiento (lo más cercano al crítico) de forma de alcanzar la solución estática buscada. En problemas elasto-plásticos y en particular cuando hay ablandamiento es importante un seguimiento detallado de toda la trayectoria de equilibrio. Las técnicas habitualmente usadas en códigos implícitos para avanzar sobre puntos límites no son aplicables en códigos con integración explícita. Por otro lado la fisuración de la matriz puede dejar de ser un problema estático para convertirse en un problema inherentemente dinámico si se produce autopropagación de la fisura. La estrategia desarrollada incluye considerar en forma automática problemas con carga prescrita y/o desplazamientos prescritos. Intenta también resolver las dificultades asociadas con la autopropagación de fisuras. Otro aspecto importante que se aborda es la determinación automática del amortiguamiento necesario para obtener las soluciones pseudo-estática. Se presentan resultados numéricos de varios ejemplos a los fines de evaluar la estrategia. De uno de los ejemplos se dispone de resultados experimentales que muestran una excelente correlación con los numéricos.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen distintas estrategias para el seguimiento de trayectorias de equilibrio en problemas no-lineales en sólidos y estructuras. Las trayectorias de equilibrio son la solución de  $N$  ecuaciones no lineales algebraicas provenientes de alguna técnica de discretización del dominio (método de elementos finitos) en función de una adecuada variable de avance (factor de carga, pseudo tiempo, etc). Por seguimiento se entiende a la determinación de las variables de estado del problema (desplazamientos y variables internas) que satisfacen con una precisión adecuada las ecuaciones anteriores para valores discretos de la variable de avance. Las estrategias más extensamente usadas para avanzar de un punto a otro de la trayectoria son aquellas basadas en técnicas de Newton-Raphson que requieren la evaluación del Hessiano del sistema de ecuaciones y la solución en forma recurrente de los sistemas de ecuaciones lineales resultantes ya sea en forma directa o iterativa. Las principales desventajas de este tipo de aproximaciones (clasificadas como *implícitas*) son: a) en el caso de que el sistema lineal de ecuaciones se resuelva en forma directa: el volumen de almacenamiento dedicada al Hessiano y el tiempo dedicado a la factorización del mismo b) el radio de convergencia del método de Newton-Raphson que puede ser muy bajo dependiendo del tipo de no-linealidades involucradas.

El tipo y el grado de las no-linealidades involucradas condicionan la convergencia de las técnicas implícitas y de la selección de la variable de avance. Es común la aparición de puntos límites (respecto al parámetro de carga) de retrocesos (respecto a desplazamientos de control) de bifurcaciones (en estructuras optimizadas perfectas) todo lo cual condiciona la selección de la variable de avance y ha dado lugar a distintas técnicas de seguimiento de las trayectorias englobadas dentro de la denominación de “técnicas de continuación”. Por otro las fuertes no linealidades introducidas por relaciones constitutivas complejas, que por un lado implican fuertes variaciones en la rigidez del conjunto (y que a veces impiden una evaluación precisa del Hessiano), condiciones de contorno unilaterales (contacto con fricción) o fuertes curvaturas en las trayectorias (trayectorias imperfectas en su rama poscrítica) condicionan notoriamente la convergencia y muchas veces hacen que fracase la simulación. Las técnicas implícitas están bien establecidas y desarrolladas y pueden verse en distintas monografías (ver por ejemplo [Crisfield \(1997\)](#))

En particular los problemas con ablandamiento suelen presentar fuertes dificultades para el seguimiento de trayectorias de equilibrio. Los procesos de daño del material con auto-propagación de fisuras son un problema paradigmático en la obtención de soluciones estáticas, debido a que precisamente el proceso de propagación de fisuras es dinámico y si bien la energía cinética involucrada es relativamente baja no existen estados de equilibrio “estático” bien definidos entre el comienzo y el final del crecimiento de la fisura.

Una forma de disminuir los problemas de convergencia es resolver las ecuaciones no lineales utilizando aproximaciones explícitas (es decir sin recurrir al Hessiano) en el dominio del tiempo. A los fines de obtener soluciones pseudo-estáticas las acciones se introducen con una velocidad suficientemente baja que haga despreciable la influencia de la inercia y se introduce un amortiguamiento ficticio que le quite energía cinética al sistema. Como el objetivo es obtener una solución estática tanto la masa como el amortiguamiento se eligen de forma de disminuir lo más posible el esfuerzo computacional, sin que necesariamente tengan relación directa con los valores reales de masa y amortiguamiento. Estas técnicas se vienen usando desde la década del 70 y se denominan habitualmente como “relajación dinámica”. Este tipo de soluciones son muy comunes en distintos procesos y se usan asiduamente en problemas elásticos, por ejemplo análisis de cables y membranas, encuentro de formas óptimas (ver por ejemplo [Rezaiee-Pajand](#))

and Sarafrazi (2011) y las referencias allí citadas) y problemas elasto-plásticos, por ejemplo formado de metales, etc. En general las técnicas explícitas requieren de un conocimiento “a priori” de las solicitaciones, sean estas cargas o desplazamientos, lo cual representa una importante limitación en problemas que no sean puramente elásticos pues:

- en el caso de problemas con ablandamiento **global** (punto límite) si la carga aplicada supera la resistencia ocurre un proceso dinámico que puede ser ilimitado si el sistema no recupera rigidez suficiente
- en el caso de problemas con ablandamiento **local** asociado al material constitutivo se puede producir un deterioro espurio de la resistencia mecánica del material si la velocidad de deformación no es suficientemente baja
- en el caso de fisuras auto-propagables debe darse el tiempo necesario para que se produzca el fenómeno antes de aumentar la solicitación.

En este trabajo se muestran las características más relevantes del problema y se muestran los aspectos fundamentales a tener en cuenta para obtener trayectorias no lineales de equilibrio estático en modelos con ablandamiento utilizando una integración explícita de ecuaciones de movimiento. En la siguiente sección se recuerda la técnica de diferencias centrales estándar. En la Sección 3 se indica una forma relativamente sencilla de obtener una aproximación al amortiguamiento crítico sin recurrir a la matriz de rigidez. En la sección 4 se presentan los aspectos fundamentales involucrados para desarrollar una estrategia exitosa en el tipo de problemas de interés. En la sección 5 se muestran distintos ejemplos resueltos donde las técnicas implícitas pueden tener problemas de convergencia o donde las aproximaciones explícitas estándar se alejan de la solución buscada. Finalmente en la Sección 6 se presentan algunas conclusiones.

## 2. TÉCNICA DE DIFERENCIAS CENTRALES (EXPLÍCITA)

Las ecuaciones de equilibrio dinámico a ser integradas resultan de una discretización mediante el método de elementos finitos y se pueden escribir para un tiempo ( $n$ ) cualquiera como:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^n + \mathbf{C}\mathbf{v}^n + \mathbf{F}(\mathbf{u}^n) = \mathbf{P}^n \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{a}$  el vector de aceleraciones nodales,  $\mathbf{v}$  el vector de velocidades nodales,  $\mathbf{F}$  el vector de fuerzas internas y  $\mathbf{P}$  el vector de fuerzas de externas que incluye las fuerzas másicas y las fuerzas de contorno, las que a su vez incluyen las fuerzas de contacto si las hubiera. Se utiliza una matriz de masa diagonal y el amortiguamiento se supone proporcional a la matriz de masa.

$$\mathbf{C} = 2\alpha\mathbf{M}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro a determinar o fijar.

El esquema de integración de Euler hacia adelante (diferencias centrales) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}^n \Delta t \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \end{aligned}$$

la velocidad en el tiempo  $n$  se define como el promedio:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^n &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ \mathbf{v}^n &= \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^n \Delta t\end{aligned}$$

llevando todo esto a (1), entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\mathbf{a}^n + \mathbf{C} \left( \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^n \Delta t \right) &= \mathbf{P}^n - \mathbf{F}(\mathbf{u}^n) \\ \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right) \mathbf{M}\mathbf{a}^n &= \mathbf{P}^n - \mathbf{F}(\mathbf{u}^n) - \alpha \mathbf{M}\mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

como la matriz  $\mathbf{M}$  es diagonal las aceleraciones son:

$$\begin{aligned}a_i^n &= \frac{1}{M_i} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right)} \left( P_i^n - F_i^n - \alpha M_i v_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ a_i^n &= \frac{1}{M_i} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right)} \left( P_i^n - F_i^n \right) - \frac{\alpha}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right)} v_i^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

y las nuevas velocidades

$$\begin{aligned}v_i^{n+\frac{1}{2}} &= v_i^{n-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{M_i} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right)} \left( P_i^n - F_i^n \right) - \frac{\alpha}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right)} v_i^{n-\frac{1}{2}} \right] \Delta t \\ v_i^{n+\frac{1}{2}} &= v_i^{n-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{\alpha \Delta t}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha} \right) + \frac{1}{M_i} \frac{\Delta t}{\left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \alpha \right)} \left( P_i^n - F_i^n \right) \\ v_i^{n+\frac{1}{2}} &= v_i^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{2 - \Delta t \alpha}{2 + \Delta t \alpha} \right) + \frac{1}{M_i} \frac{2 \Delta t}{\left( 2 + \Delta t \alpha \right)} \left( P_i^n - F_i^n \right)\end{aligned}$$

La estabilidad condicional del esquema de integración explícito requiere que el paso de tiempo no debe exceder un valor crítico. Y esta es la mayor desventaja del método ya que el tiempo crítico depende de la discretización, básicamente de la menor distancia entre dos nudos lo cual puede hacer el proceso extremadamente lento. Así muchas veces coexisten zonas del modelo con distintas densidades de malla donde los tiempos críticos correspondientes son muy diferentes.

### 3. DETERMINACIÓN APROXIMADA DEL PERÍODO PRINCIPAL

Uno de los aspectos más importantes a los fines de obtener una solución pseudo-estática en forma eficiente es determinar el amortiguamiento a utilizar, de tal forma de alcanzar el estado de equilibrio buscado en el menor número de pasos posible. Para ello resulta capital una adecuada determinación del período fundamental o principal del sistema que es el que habitualmente condiciona el comportamiento del sistema amortiguado.

Aquí utilizaremos una propuesta de [Oakley and Knight \(1996\)](#) donde se sugiere evaluar el amortiguamiento en función del cociente de Rayleigh. El coeficiente  $\alpha$  asociado al amortiguamiento proporcional a la matriz de masa se obtiene de la expresión (para un paso determinado)

$$\alpha = \left[ \frac{\sum s_i v_i^2}{\sum m_i v_i^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \omega = \frac{1}{T}$$

donde las  $s_i$  son una aproximación a una matriz de rigidez diagonal

$$s_i^n = \frac{F_i^n - F_i^{n-1}}{v_i^{n-\frac{1}{2}}}$$

Notar que si  $s_i$  resulta una buena aproximación a la rigidez diagonal también se podría usar para definir una matriz de “masa” equivalente. Sin embargo debido a la alta variabilidad de las fuerzas residuales durante el proceso de integración explícita (y también de las velocidades aunque en menor grado) probablemente se necesitaría un suavizado importante.

Un cálculo directo del factor  $\alpha$  resulta de evaluar al final de cada paso

$$\alpha = \left[ \frac{\sum \left( \frac{F_i^n - F_i^{n-1}}{v_i} \right) v_i^2}{\sum m_i v_i^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\sum (F_i^n - F_i^{n-1}) v_i}{\sum m_i v_i^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

al no evaluar explícitamente los valores de  $s_i$  se evita un posible valor muy bajo de la velocidad con su consiguiente problema numérico.

El esquema descrito permite obtener el amortiguamiento a partir del segundo paso, una vez que se conocen las variables de estado para dos valores del parámetro de avance. En el primer paso no se dispone de información respecto al comportamiento del sistema. En tal caso se puede utilizar el denominado “amortiguamiento cinético” que consiste en integrar las ecuaciones de movimiento sin amortiguamiento hasta alcanzar un máximo de la energía cinética. Al llegar a ese punto, asociándolo con el comportamiento de un oscilador simple lineal sometido a una carga escalón donde el máximo de energía cinética corresponde a la posición de equilibrio se anulan las velocidades y se continúa con la integración en el tiempo hasta un nuevo máximo. Por otro lado el máximo de la energía cinética corresponde (para el oscilador simple) a un tiempo  $t = \frac{T}{4}$ , lo cual permite tener una estimación del período de la estructura y utilizar de allí en más amortiguamiento.

## 4. ESTRATEGIA DE AVANCE

### 4.1. Aspectos generales

El objetivo de este desarrollo es resolver ecuaciones no lineales de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{P}(\lambda) \quad (3)$$

habitualmente resueltas en base a una técnica implícita en la cual se define un parámetro de avance  $\lambda$  y se obtienen soluciones para valores discretos  $\lambda^n$  de dicho parámetro de avance. La diferencia es que aquí se propone resolver en forma explícita las ecuaciones de equilibrio (1) con un amortiguamiento lo más cercano al crítico. La idea es que para cada incremento o salto de carga (o valor del parámetro de avance) se integre en forma dinámica hasta alcanzar la solución de (3) es decir que la energía cinética sea despreciable y se haya alcanzado el equilibrio estático.

Uno de los objetivos finales es simular procesos donde la ecuación constitutiva juega un rol fundamental en el comportamiento. En la técnica explícita estándar la integración de la ecuación constitutiva se realiza en todos los pasos, es decir que continuamente se van actualizando las variables internas. Ocurre a menudo que, de acuerdo al amortiguamiento utilizado, durante la etapa se alcancen estados tensionales que superen lo que ocurriría en el caso puramente estático

modificando erróneamente el valor de las variables internas. Esto es así a diferencia de las técnicas implícitas actuales donde la actualización de variables internas se realiza al finalizar el proceso iterativo. Por ello aquí se propone modificar la técnica explícita clásica y actualizar las variables internas una vez que se haya alcanzado el equilibrio estático. En resumen se propone una estrategia:

- Similar a un programa estático implícito en cuanto a establecer incrementos finitos en las solicitaciones, e *iterar* hasta convergencia en tales solicitaciones.
- La *iteración* consiste en integrar en forma explícita las ecuaciones de equilibrio dinámico usando el algoritmo de diferencias centrales con un esquema de amortiguamiento adecuado.
- En forma similar a un código implícito las variables internas sólo se actualizan al final el proceso iterativo. Esto evitaría la aparición de daño espurio ya que la actualización de las variables internas se realiza cuando se ha alcanzado un equilibrio estático entre fuerzas interna y externas.

En una estrategia implícita se dispone del Hessiano que permite al comenzar cada paso realizar una predicción del incremento de desplazamientos y además se utiliza para corregir las fuerzas nodales desequilibradas. En el caso de una estrategia explícita, en el primer paso no se dispone de ningún conocimiento del comportamiento del sistema, por lo cual no se tienen elementos ni para la establecer una predicción ni un valor del amortiguamiento óptimo para alcanzar el equilibrio en el menor número de pasos posible. Esto convierte al primer paso en el más crítico ya que en pasos posteriores la respuesta del primer paso permite tener elementos para fijar tanto el incremento de desplazamientos como del amortiguamiento (asociado al período fundamental).

Debido a que se busca una solución estática y a los efectos de evitar la influencia de las distintas densidades de malla, en la estrategia propuesta no se utiliza la densidad real del material sino que arbitrariamente se modifica este valor de tal forma que el tiempo crítico sea el mismo para todos los elementos y se utiliza un incremento de tiempo unitario ( $\Delta t = 1$ ).

La ventaja importante de utilizar la expresión (2) es que permite definir el amortiguamiento en función del comportamiento del sistema sin dependencia del usuario, lo cual automatiza el valor del amortiguamiento en función del tipo de movimiento que se produce y permite avanzar con mayor facilidad en partes de la trayectoria con ablandamiento o rigidización. Notar además que dado que el incremento de tiempo es unitario, la velocidad en (2) es simplemente el incremento en el desplazamiento.

## 4.2. Predicción

Salvo para el primer paso, en el que no se dispone de información sobre el comportamiento del modelo, para los siguientes pasos debe utilizarse una estrategia que refleje el comportamiento previo de la estructura. Es decir que en función del incremento de la solicitación debe realizarse una predicción del incremento de desplazamientos en el paso y dado que el período de estabilización resulta bastante oneroso computacionalmente deben también hacerse un análisis de cuando la predicción es adecuada. Debido a que no se utiliza el Hessiano (matriz de rigidez tangente) como en los modelos implícitos la aproximación más sencilla es utilizar los incrementos de desplazamientos de los últimos pasos (hasta 3 pasos), que permiten trazar desde una aproximación incremental lineal hasta una cúbica. Una forma de evaluar la calidad de la predicción es calcular las fuerzas desequilibradas para distintas aproximaciones para determinar cual es la más razonable. Esto debiera permitir tener indicadores del nivel de fuerzas

desequilibradas que hay en los nudos o variaciones en variables internas, a los fines de ver si es factible estabilizar o es necesario disminuir el factor de avance  $\lambda_n$  o si es factible aumentarlo. Incluso también es posible utilizar algún tipo de búsqueda lineal.

Por otro lado para el primer paso, en base al comportamiento de un oscilador simple que cuando pasa por la posición de equilibrio estable su energía cinética es máxima, se realiza un control sobre la energía cinética del sistema y cuando esta alcanza un máximo se anulan todas las velocidades. La energía cinética se puede calcular fácilmente y económicamente debido a que la matriz de masa es diagonal. Una vez alcanzada la energía cinética máxima, se utiliza el amortiguamiento en base al período aproximado.

### 4.3. Convergencia

Debe también establecerse un indicador de cuando se ha alcanzado un nivel de convergencia razonable. Estos indicadores pueden ser variados y pueden utilizarse valores similares a los que se usan en una aproximación implícita. En todos los casos debe estar relacionado con algún valor de referencia que permita hacer una comparación:

- La norma del vector de fuerzas residuales (fuerzas desequilibradas en cada grado de libertad)

$$\|\mathbf{g}\| = \left[ \sum_{i=1}^{Neq} g_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- La raíz de la energía cinética del sistema

$$K^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=1}^{Neq} m_i v_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- Valores puntuales de la fuerza residual o de la velocidad de un punto

Al igual que un programa implícito la actualización de las variables internas se realiza al lograr convergencia en el paso. Esto normalmente implica aumentar las dimensiones de las bases de datos a los fines mantener las variables internas asociadas al valor convergido y al valor iterativo. Notar que en el código implícito las variables iterativas se mantienen en la base de datos pues se utilizan para evaluar la matriz de rigidez tangente. En el caso explícito se podría hacer lo mismo, aunque no es estrictamente necesario. Una forma de evitar la doble base es:

- Durante el proceso iterativo para el cálculo del estado tensional (integración de la ecuación constitutiva) se parte siempre de los valores convergidos que son los que se guardan en la base de datos. El estado tensional calculado permite calcular las fuerzas residuales pero las variables internas calculadas se pierden.
- Cuando se llega a convergencia se hace una nueva pasada por la rutina de evaluación de las fuerzas internas con una bandera activada para que las nuevas variables internas sobre-escriban las anteriores.

Una estrategia así es ligeramente más costosa ya que requiere una pasada adicional por el cálculo de fuerzas residuales, sin embargo este costo resulta insignificante si se justifica ahorrar memoria directa. Por otro lado esto evita modificar el diseño de las bases de datos y sólo requiere una bandera (y algún cuidado adicional) de cuando sobre-escribir las variables anteriores

#### 4.4. Alternativas a la falta de convergencia

En los problemas con ablandamiento global, debido a la aparición de delaminación u otro tipo de falla del material, no es posible alcanzar convergencia. En estos casos resulta necesario abandonar la estrategia anterior donde las sollicitaciones (cargas o desplazamientos) están fijas por otra donde se contemple el comportamiento global con ablandamiento. Las estrategias son diferentes en función del tipo de sollicitación pero en ambos casos están controladas por desplazamiento a los efectos de evitar desplazamientos excesivos en los puntos asociados con las acciones. En general el ablandamiento se produce debido a una degradación de las propiedades del material, la cual se auto propaga en forma dinámica. Para seguir un proceso de estas características se propone lo siguiente:

- Para problemas a velocidad controlada:
  - disminuir la velocidad de aplicación del desplazamiento utilizando una función coseno, de tal forma que termine en un valor nulo.
  - Una vez aplicado el desplazamiento se deja estabilizar permitiendo los procesos de degradación
  - La actualización de variables internas se realiza con una frecuencia elegida durante todo el proceso, i.e. no se espera a convergencia como en la estrategia estándar
  - El incremento de desplazamientos se puede subdividir en más de un paso a los fines de lograr una integración más suave del proceso de degradación
  - Una vez entrada en una estrategia de este tipo resulta necesaria mantenerla por algunos pasos hasta completar el proceso de degradación
- Para problemas con carga prescrita el problema es mucho más complejo debido a que:
  - a) sería necesario inicialmente aumentar la sollicitación (parámetro de carga  $\lambda$ ) para comenzar el proceso de degradación, b) una vez comenzado el proceso es necesario disminuir  $\lambda$  para lograr convergencia y c) se desconoce el valor de  $\lambda$  para el cual se pueda alcanzar convergencia y como continuar el proceso durante el ablandamiento. Por ello nuevamente se utiliza un proceso a desplazamiento controlado, pero ahora basado en la longitud de arco esférico. La longitud de arco esférico se define en las técnicas de continuación de estrategias implícitas como:

$$\Delta \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} + c^2 (\Delta \lambda)^2 = (\Delta L)^2$$

donde  $\Delta \mathbf{u}$  son los desplazamientos incrementales en el paso,  $\Delta \lambda$  es el cambio en el parámetro de carga y  $c$  es un factor para homogeneizar las unidades que supondremos nulo (i.e. la longitud de arco sólo incluye los desplazamientos)

- Se supondrá que la carga crece linealmente, de otra forma resulta complejo determinar el parámetro  $\lambda$ , sobre todo cuando hay más de un conjunto de cargas.
- El control a utilizar se basa en escalar  $\Delta \mathbf{u}$  en cada iteración manteniendo  $\Delta L$  constante
- La predicción es lineal, es decir se utiliza el incremento de desplazamientos del último paso



- Se evalúa el parámetro de carga  $\lambda$  en función de ponderar las fuerzas nodales equivalente  $g_i$  en los GdL con carga  $f_i$  unicamente (los valores  $f_i$  corresponden a un valor unitario del parámetro de carga)

$$\lambda = -\frac{1}{\|f\|} \sum g_i \frac{|f_i|}{f_i}$$

con

$$|f| = \sum |f_i|$$

- Si  $\lambda$  empieza a crecer (el modelo rigidiza) se puede volver a la estrategia estándar y de allí en más asumir que la estructura nuevamente está en condiciones de tomar cargar. El incremento en el parámetro de carga se realiza en función de la rigidez actual (relación entre el incremento de carga y la norma del vector incremento de desplazamiento).

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En el presente apartado se presentan cuatro ejemplos en los que se intenta mostrar las mejoras que presenta la estrategia propuesta respecto a una técnica explícita estándar. En particular se busca enfatizar el mayor grado de automatismo y por ende la menor cantidad de pruebas necesarias para obtener una simulación que represente fielmente los aspectos detallados del problema. La estrategia propuesta se denomina STATIC en tanto que la estrategia explícita habitual se denomina por STANDARD. Esta estrategia ha sido codificada en el programa [STAMPACK \(2011\)](#)

### 5.1. Colapso de un tubo con presión exterior

Un tubo circular es sometido a presión externa y se busca determinar la presión máxima que puede resistir. El problema final posterior al punto límite (la geometría de la sección transversal incluye una imperfección cosenoidal) es elastoplástico con autocontacto pero el comienzo del colapso ocurre en el rango elástico. En la Figura 1 se muestra la deformada final incluyendo un mapa de la deformación plástica efectiva sobre la superficie externa del tubo.

La obtención de la carga máxima se aborda en dos etapas i) se coloca una presión de 0.95 MPa con una función escalón (heaviside) hasta el equilibrio (dinámico estándar amortiguado) ii) se incrementa la presión en forma lineal hasta encontrar un límite superior (estrategia STATIC con carga prescrita). De esta forma se obtiene un valor de  $P_{max} = 1,18 MPa$ . En la Figura 2 se muestra en abcisas el pseudo tiempo utilizado y en ordenadas a la derecha el valor de la presión y a la izquierda el desplazamiento de un punto de control. Puede observarse como a medida que se acerca a la carga de colapso la rigidez del sistema decrece notoriamente con altos incrementos de desplazamiento. Como referencia se incluyen dos simulaciones con la estrategia STANDARD incluyendo dos valores de amortiguamiento diferente. Estos son igualmente adecuados para la fase previa al colapso pero sus resultados difieren mucho al acercarse a la carga de colapso. Esto ocurre debido a que al aumentar rápidamente los desplazamientos la energía cinética involucrada tiene una importancia capital en el comportamiento del sistema. De esta forma un amortiguamiento alto indicaría una carga de colapso mayor y un amortiguamiento bajo una carga menor. Los resultados del colapso final mostrados en la Figura 1 se obtienen utilizando la estrategia estándar una vez conocida la carga de colapso, usando la función de presión indicada en la Figura 2. La ventaja de la estrategia STATIC en este caso es que una única corrida (aunque más costosa computacionalmente) permite determinar con precisión adecuada la presión de colapso, sin necesidad de tener que probar distintos valores de amortiguamiento

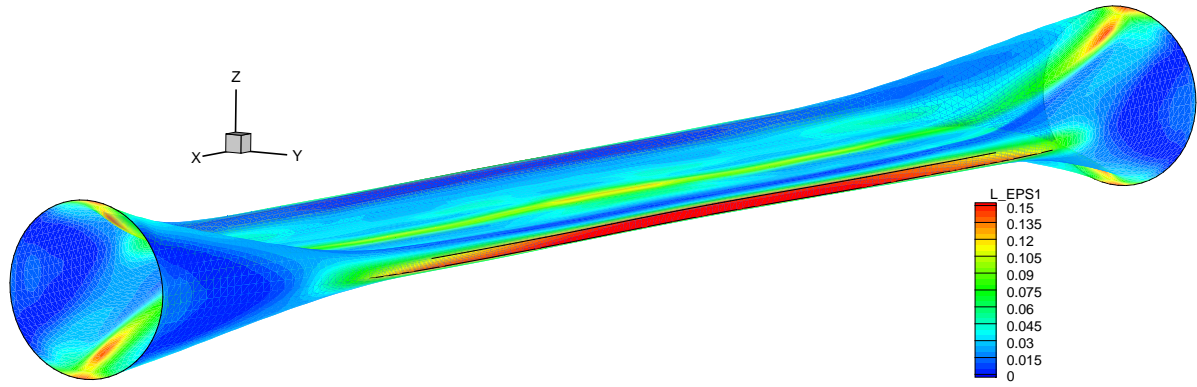


Figura 1: Tubo bajo presión externa, deformada final

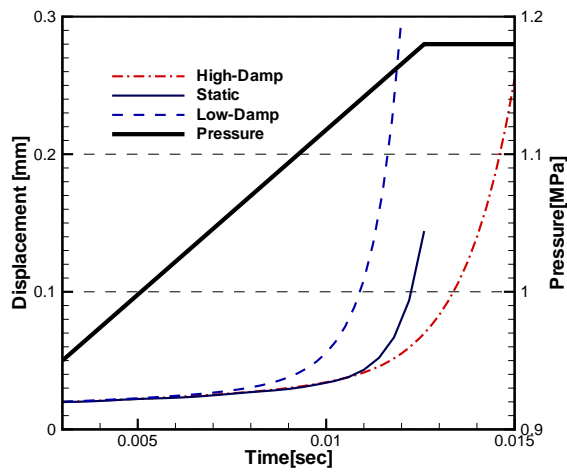


Figura 2: Tubo bajo presión exterior. Desplazamiento y Presión

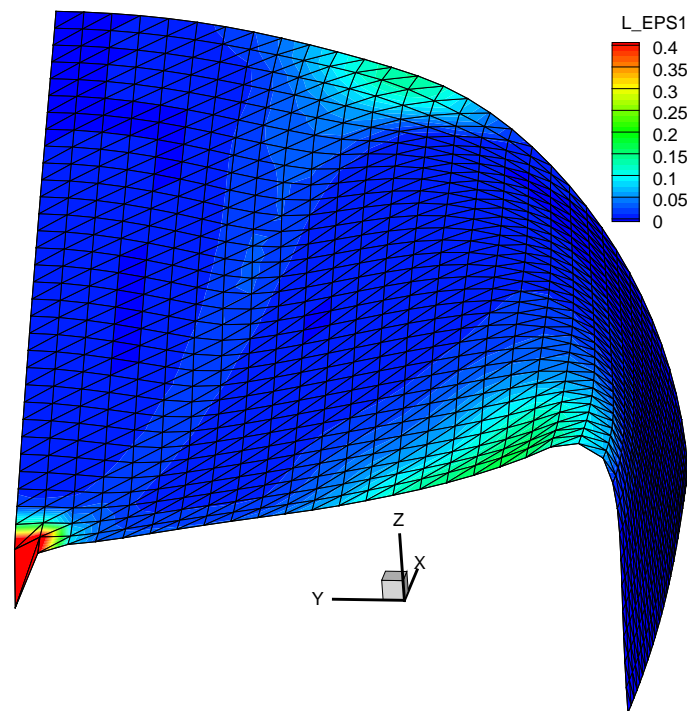


Figura 3: Cilindro bajo carga puntual. Deformada y contornos de deformación plástica efectiva.

## 5.2. Cilindro elasto-plástico con carga puntual

El segundo ejemplo es un cilindro relativamente corto (radio 300 y longitud 600) soportado por diafragmas rígidos, sometido a dos cargas puntuales opuestas. Debido a la simetría se modela sólo un octavo de la geometría. El problema es un típico caso estático con grandes desplazamientos y no linealidad constitutiva. Se produce una fuerte plastificación alrededor del punto de aplicación de la carga, lo cual hace que los resultados dependan de la teoría de láminas utilizada y de la discretización en la zona de aplicación de la carga. La malla relativamente gruesa produce algunos saltos bruscos en la relación carga-desplazamiento. La Figura 3 muestra la geometría deformada para un desplazamiento de 245 del punto de aplicación de la carga, en tanto que la Figura 4 muestra el valor de la carga en función del desplazamiento del punto de aplicación. La simulación se realiza a velocidad controlada del punto de aplicación de la carga y se mide la fuerza reactiva. Puede observarse una fuerte caída del factor de carga para un desplazamiento de 184 debida a la plastificación. Ambas estrategias dan resultados muy similares salvo al final cuando una nueva caída de la resistencia hace que la estrategia STANDARD no pueda ya seguir la trayectoria correcta, lo cual si se logra con la estrategia propuesta.

## 5.3. Estiramiento de una probeta de material compuesto

Este ejemplo corresponde a un ensayo de tracción axial de un laminado compuesto por láminas de epoxi-tenax orientadas a  $45^\circ$  simétricamente respecto al eje de la probeta. El material de las fibras se supone elástico, en tanto que para la matriz se utiliza un modelo de daño. El estiramiento final de la probeta es del 10.5%. La estrategia STANDARD (con una muy baja velocidad de deformación) muestra buenos resultados, salvo al final de la simulación en la cual el progresivo deterioro de la matriz introduce efectos dinámicos que conducen a la aparición de deformaciones espurias. En la Figura 5 se muestra la probeta deformada con un mapa del daño en la matriz componente. La parte superior corresponde a la estrategia propuesta y la inferior a

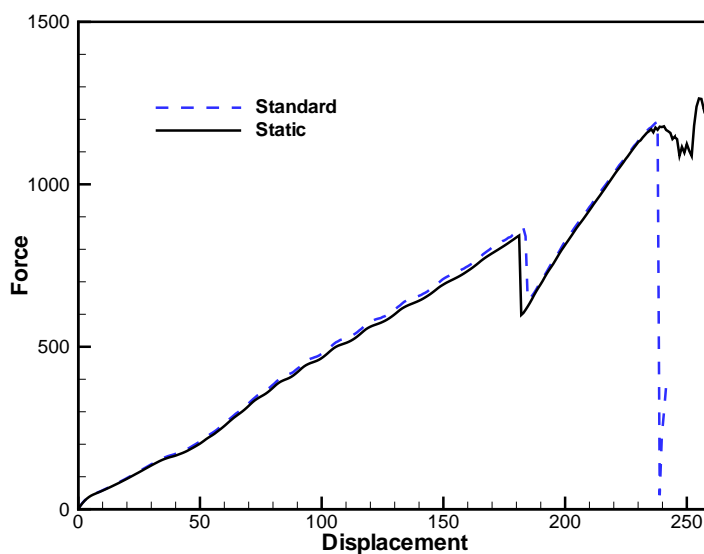


Figura 4: Cilindro bajo carga puntual. Desplazamiento vs. Carga

la estrategia estándar. En la figura inferior, a la izquierda puede verse un deterioro “anárquico” de la matriz que no se corresponde con la nueva estrategia propuesta. En la Figura 6 se muestra la fuerza axial en función del desplazamiento, gran parte de la simulación conduce a resultados idénticos con ambas estrategias pero al final aparecen los problemas de la estrategia estándar debido al ablandamiento. Si bien la estrategia explícita estándar provee buenos resultados para gran parte de la simulación, esto ocurre luego de varios intentos en los que se establecen distintas velocidades de estiramiento y valores de amortiguamiento.

#### 5.4. Delaminación de una probeta de material compuesto

Este último ejemplo intenta mostrar la capacidad de la estrategia para seguir procesos de delaminación de materiales compuestos. En la Figura 7 se muestra la geometría global discretizada con elementos de sólido y un detalle de la zona donde se encuentra una discontinuidad en el espesor. La probeta está compuesta de 18 capas continuas de extremo a extremo y nueve capas discontinuas que se escalonan en la zona de central. La probeta está sometida a tracción axial lo que genera esfuerzos de flexión (corte y momento) concentrados en la zona de la discontinuidad. El esfuerzo de corte provoca la delaminación, es decir el despegue entre la capa continua superior y la primera de las discontinuas.

En el presente modelo la discretización es uniforme en la dirección del espesor con 6 elementos en la parte continua y 9 en la parte más gruesa donde cada elemento incluye una combinación de las propiedades de 3 capas. En la dirección transversal se han colocado, también en forma uniforme, 8 elementos. En la dirección axial hay 84 divisiones con elementos concentrados en la zona de discontinuidad lo que hace un total de 5040 elementos.

La simulación del comportamiento de esta probeta es compleja, debido a que al iniciarse el proceso de delaminación, este se autopropaga con una importante liberación de energía en forma dinámica. Esto hace difícil establecer una estrategia implícita estática (debido a que el proceso de delaminación es dinámico) con lo cual las técnicas de continuación usuales no alcanzan convergencia. Por otro lado un análisis dinámico requiere que a) si es implícito que el

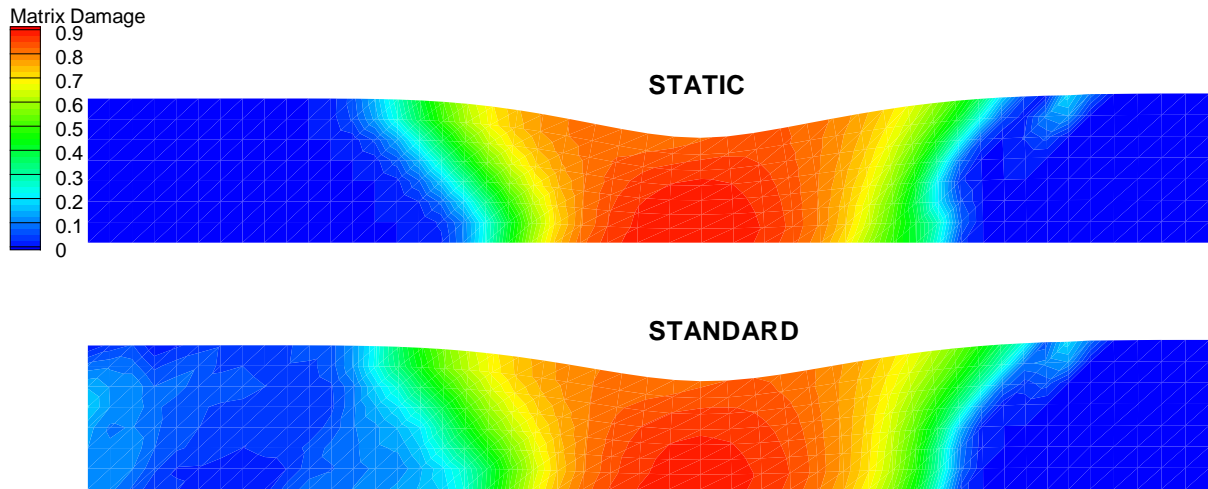


Figura 5: Estiramiento de una probeta de material compuesto

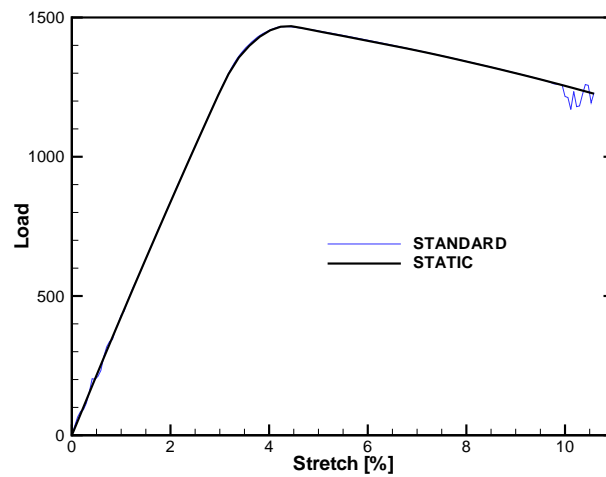


Figura 6: Estiramiento de una probeta de material compuesto. Carga-Estiramiento

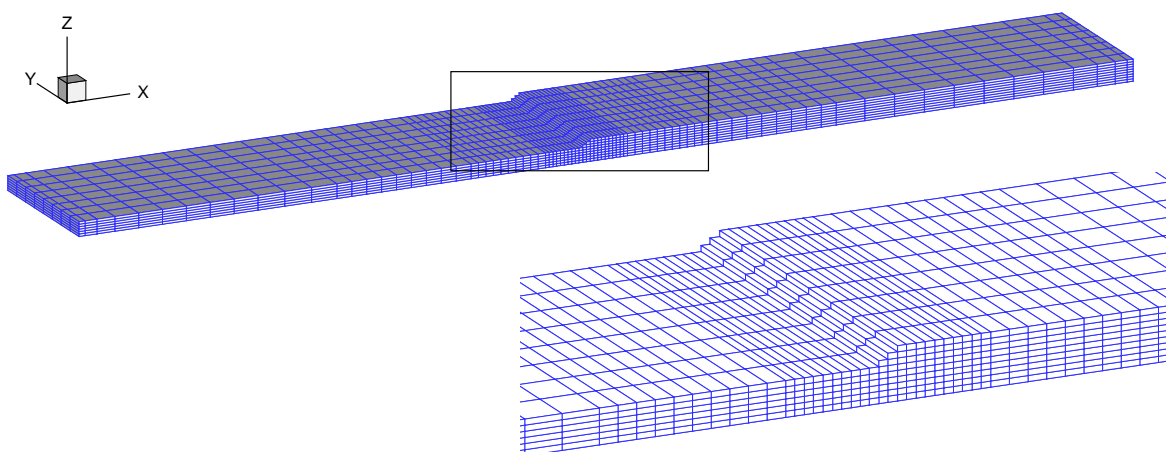


Figura 7: Probeta de material compuesto

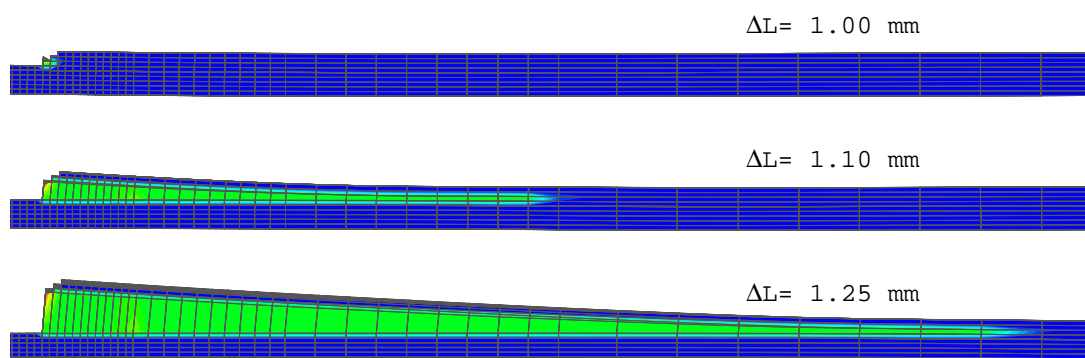


Figura 8: Probeta de material compuesto. Evolución de la delaminación.

incremento de tiempo disminuya durante la delaminación debido a la velocidad de la misma. b) si es explícito, la velocidad de estiramiento debe ser lo suficientemente lenta como para permitir que se desarrolle el proceso de delaminación. La estrategia especial propuesta aquí permite el desarrollo de la delaminación.

La Figura 8 muestra en una vista lateral la evolución de una variable interna asociada al daño en la matriz del compuesto y la geometría deformada para tres valores de estiramiento  $\Delta L$ . Finalmente en la Figura 9.a se ha graficado la fuerza sobre la probeta en función del estiramiento. Se incluyen allí resultados experimentales y numéricos con una excelente correlación. Dentro de los resultados numéricos se distinguen dos estrategias, a desplazamiento controlado del extremo o a carga controlada con resultados muy similares. Por otro lado en la Figura 9.b se muestra el desplazamiento vertical de un punto sobre la cara superior de la probeta (al centro sobre la parte más gruesa). Este punto es el que mayor desplazamiento vertical tiene, y de alguna forma muestra el avance de la delaminación. También es posible obtener resultados similares usando una estrategia estándar pero a través de distintas pruebas en las cuales una vez detectado el inicio de la delaminación hay que fijar una historia de estiramiento que permita que la probeta delamine correctamente antes de continuar con el ensayo.

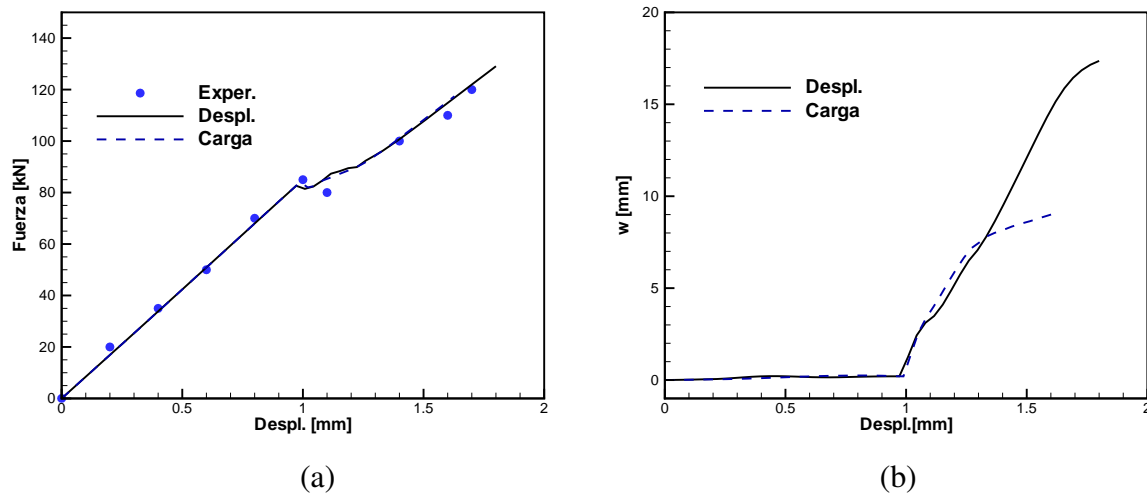


Figura 9: Probeta de material compuesto. (a) Fuerza vs. Estiramiento (b) delaminación.

## 6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha presentado una estrategia para el seguimiento de trayectorias de equilibrio con ablandamiento (geométrico y constitutivo) utilizando una aproximación explícita (similar a técnicas de relajación).

La principal ventaja comparada con una estrategia pseudo-estática explícita estándar es que disminuye las pruebas en la determinación de la historia de sollicitación/carga y en la elección del amortiguamiento adecuado.

En problemas de delaminación, los resultados obtenidos (ver último ejemplo analizado con desplazamiento prescrito o carga prescrita) indican que:

- es posible seguir con la estrategia estándar hasta que empieza el proceso de delaminación.
- luego es imprescindible pasar a una estrategia donde se actualicen las variables internas sin esperar convergencia (típico de las integraciones explícitas).
- el proceso de degradación se produce a saltos, asociado con las fallas en los puntos de integración, lo cual en esos instantes libera energía elástica que debe disiparse dinámicamente.
- esta estrategia debe mantenerse hasta el final de la simulación que es cuando el proceso de delaminación alcanza el extremo de la probeta

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET, de la SeCyT-UNC y del MCyT-Cba.

## REFERENCIAS

- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures II: Advanced Topics*. John Wiley and Sons, 1997.
- Oakley D. and Knight N. Non-linear structural response using adaptive dynamic relaxation on a massively parallel-processing system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:235–259, 1996.

- Rezaiee-Pajand M. and Sarafrazi S. Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping. *Computer and Structures*, 89:1274–1285, 2011.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, v7.1.0. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2011.