

ELEMENTO FINITO DE CLASE C_1 PARA EL ANÁLISIS DE POROPLÁSTICIDAD BASADO EN GRADIENTES

Javier L. Mroginski^a y Guillermo Etse^b

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste.
Av. Las Heras 727, Resistencia, Chaco, Argentina.
javierm@ing.unne.edu.ar*

^b*CONICET y Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI),
Universidad Nacional de Tucumán,
Av. Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina.
getse@herrera.unt.edu.ar*

Palabras Clave: Plasticidad de gradiente, Continuidad C_1 , Suelos saturados, Falla localizada

Resumen. El análisis de falla localizada en materiales porosos cohesivos-friccionales como suelos parcialmente saturados está fuertemente relacionado con el contenido de humedad del medio y el comportamiento mecánico en régimen de ablandamiento. En esta situación, es frecuentemente observado una dependencia patológica en la solución numérica elementos finitos (EF) con relación al tamaño y la orientación de la discretización empleada. Por tal motivo, la modelación numérica requiere de formulaciones constitutivas adecuadas con el fin de obtener una descripción objetiva del complejo proceso de degradación de resistencia bajo cargas crecientes. En otras palabras, estas teorías constitutivas enriquecidas deben ser capaces de describir comportamientos no locales de deformación. En el presente trabajo se considero la formulación no local para medios porosos parcialmente saturados termodinámicamente consistente propuesto por los autores en forma genérica (Mroginski, et al. Int. J. Plasticity, 27:620-634 (2011)). Esta formulación no local basada en teoría de gradientes incorpora la dependencia de la longitud interna característica con las condiciones hidráulicas del medio y el estado tensional para predecir el tamaño máximo de la zona de energía disipada. Por otro lado, debido a la presencia del laplaciano del multiplicador plástico en las ecuaciones de gobierno, para cumplir la condición de convergencia, se requiere la continuidad del gradiente del multiplicador plástico en el contorno de cada elemento. Esto se consigue discretizando al multiplicador plástico con funciones de forma de la clase C_1 (Mroginski, et al. Mecánica Computacional, 29:5381-5396 (2010)). Los resultados numéricos presentados en este trabajo permiten demostrar la influencia de la longitud interna característica en el comportamiento en régimen de ablandamiento así como también la propiedad regularizadora que tiene la teoría de gradientes para suprimir la condición de localización para diferentes estados de confinamiento y presiones de poro actuantes.

1. INTRODUCTION

La mecánica de medios porosos es una disciplina de gran relevancia en diversas áreas del conocimiento como ser en la geofísica, la ingeniería civil, la biomecánica y la ciencia de los materiales. La mecánica de medios porosos tiene por principal objetivo la determinación o predicción de la deformación del medio cuando le son aplicadas acciones exteriores (Schrefler y Pesavento, 2004; Khalili y Loret, 2001).

Por otro lado, los problemas de localización del campo de deformaciones en continuos sólidos y medios porosos están íntimamente relacionados con el comportamiento mecánico de ablandamiento del material y se percibe una dependencia patológica de la solución numérica respecto de la discretización empleada en elementos finitos, conduciendo a la pérdida de objetividad en la solución (Pamin, 1994; Svedberg, 1999; Larsson, 1999; Vrech, 2007). Por tal motivo, la modelación matemática del proceso de deformación en medios porosos requiere de formulaciones constitutivas adecuadas con el fin de obtener una descripción objetiva del complejo proceso de degradación de su resistencia bajo cargas crecientes. En otras palabras, estas teorías constitutivas enriquecidas deben ser capaces de describir comportamientos no locales de deformación.

En este trabajo se presenta una propuesta mejorada de la implementación numérica de (Mroginski et al., 2010b) para la formulación constitutiva termodinámicamente consistente para el análisis de medios porosos no locales propuesto por los autores (Mroginski et al., 2011) en un software abierto de elementos finitos. En esta propuesta se incorpora al multiplicador plástico, sus derivadas de primer orden, como incógnitas nodales en un elemento finito de continuidad C_1 .

Del análisis de resultados se observa con claridad las propiedades regularizantes que posee esta teoría no local eliminando la dependencia patológica que poseen las soluciones de EF respecto de la discretización empleada, como se mencionó anteriormente. Así mismo, se estudio la influencia de la longitud interna característica con las formas de falla y el la banda de localización.

2. POROPLASTICIDAD DE GRADIENTES

En esta sección los conceptos fundamentales de la teoría de plasticidad basada en gradientes superiores de deformación termodinámicamente consistente propuesto por los autores Vrech y Etse (2009); Mroginski et al. (2011) para medios porosos serán brevemente presentados.

En base a estudios desarrollados por Coussy (1995), el estado de un sistema poroso continuo durante una transformación isotérmica queda perfectamente definido el tensor de deformaciones elásticas $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$, la variación del contenido elástico de masa de fluido $m^e = m - m^p$ y las variables internas q_α , con $\alpha = s, p$ para la fase sólida y/o porosa, respectivamente. Por otro lado, para que el sistema sea capaz de describir efectos no locales tanto en la deformación del esqueleto sólido como en la fase porosa debe ser considerado el gradiente de las variables internas ∇q_α (Svedberg y Runesson, 1997). En consecuencia, es posible asumir la siguiente expresión aditiva para definir la energía libre de deformación para materiales elastoplásticos no locales dependientes de gradientes Svedberg y Runesson (1998); Vrech y Etse (2009).

$$\Psi(\varepsilon^e, m^e, q_\alpha, \nabla q_\alpha) = \Psi^e(\varepsilon^e, m^e) + \Psi^{p,loc}(q_\alpha) + \Psi^{p,nloc}(\nabla q_\alpha) \quad (1)$$

donde Ψ^e es la energía elástica del medio poroso definido por Coussy (1995). Los potenciales $\Psi^{p,loc}$ y $\Psi^{p,nloc}$ constituyen las contribuciones locales y no locales, respectivamente, debidas al

comportamiento disipativo de endurecimiento/ablandamiento isótropo, expresadas en término de las variables internas q_α y su gradiente ∇q_α .

Diferenciando la Ec. (1), considerando la forma global de la desigualdad de Clausius-Duhem y el Teorema de la Divergencia, las relaciones Coleman son obtenidas en forma similar a los problemas de plasticidad clásica o local (Vrech, 2007).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{B}\dot{p} - \dot{\lambda}\mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_\sigma \quad (2)$$

$$\dot{p} = -M\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\lambda}M\mathbf{B} : \mathbf{m}_\sigma + M\dot{m} - \dot{\lambda}M\mathbf{m}_p \quad (3)$$

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{Q}_\alpha^{loc} + \dot{Q}_\alpha^{nloc} \quad (4)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{C}^0 + M \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$, \mathbf{C}^0 es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden, M es el módulo de Biot y $\mathbf{B} = b \mathbf{I}$, siendo b el coeficiente de Biot e \mathbf{I} el tensor unitario de segundo orden. Así mismo, \dot{p} es la tasa de la presión de poros, $\dot{\lambda}$ es el multiplicador plástico, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es la tasa del tensor de deformaciones totales y \dot{m} es la tasa de la variación del contenido de masa en los poros.

En las expresiones anteriores se emplearon las siguientes reglas de flujo no asociadas y se introdujo el potencial plástico Φ^* .

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{m}_\sigma \quad ; \quad \dot{m}^p = \dot{\lambda}\mathbf{m}_p \quad ; \quad \dot{q}_\alpha = \dot{\lambda}\mathbf{m}_{Q_\alpha} \quad (5)$$

adoptando la siguiente expresión compacta: $\mathbf{m}_\sigma = \partial\Phi^*/\partial\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{m}_p = \partial\Phi^*/\partial p$ y $\mathbf{m}_{Q_\alpha} = \partial\Phi^*/\partial Q_\alpha$.

La ley de evolución de las tensiones disipativas locales y no locales de la Ec. (4) son

$$\dot{Q}_\alpha^{loc} = -\dot{\lambda}H_\alpha^{loc}\mathbf{m}_Q \quad (6)$$

$$\dot{Q}_\alpha^{nloc} = l_\alpha^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{H}_\alpha^{nloc} \nabla \dot{\lambda} \mathbf{m}_{Q_\alpha} + \dot{\lambda} \mathbf{H}_\alpha^{nloc} \cdot \nabla Q_\alpha \mathbf{m}_Q^2 \right) \quad (7)$$

donde $\mathbf{m}_Q^2 = \partial^2\Phi^*/\partial Q^2$. En la expresión anterior se introdujeron el módulo local de endurecimiento/ablandamiento H_α^{loc} y el nuevo módulo no local de endurecimiento/ablandamiento \mathbf{H}_α^{nloc} (Svedberg y Runesson, 1997)

$$H_\alpha^{loc} = \rho \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{\partial q_\alpha^2} \quad , \quad \mathbf{H}_\alpha^{nloc} = \rho \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,nloc}}{\partial \nabla q_\alpha \partial \nabla q_\alpha} \quad (8)$$

siendo \mathbf{H}_α^{nloc} un tensor positivo definido de segundo orden, mientras que l_α es la longitud interna característica correspondiente a la fase porosa ($\alpha = p$), o al esqueleto sólido ($\alpha = s$). Al menos tres interpretaciones pueden ser atribuidas a l_α (Svedberg, 1999), la primera de considera que la longitud característica es un parámetro dimensional conveniente para que los tensores H_α^{loc} y \mathbf{H}_α^{nloc} tengan la misma dimensión, otra interpretación consiste en asumir que l_α es un mecanismo artificial de estabilización numérica, por último, y en coincidencia con otros autores (Pamin, 1994; Vrech y Etse, 2005; Voyiadjis y Deliktas, 2009), l_α puede ser interpretada como una dimensión que caracteriza la microestructura del medio.

3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El objetivo de esta sección es deducir el algoritmo incremental-iterativo que cumpla la condición de equilibrio, la ecuación de balance de masa de fluido y la condición de fluencia al final de cada paso de carga/desplazamiento que gobierna el problema de valores de borde planteado en la sección anterior.

3.1. Formulaci3n incremental

El cumplimiento de las ecuaciones generales de gobierno se realiza en forma incremental, es decir, la condici3n de equilibrio, la ecuaci3n de balance de masa de fluido y la condici3n de fluencia ser3n planteadas en forma d3bil, de la siguiente manera,

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_{j+1} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \delta p \dot{m} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, p_{j+1}, Q_{\alpha_{j+1}}) \, d\Omega = 0 \quad (11)$$

al final de la iteraci3n $j + 1$ del escal3n de carga actual. A diferencia de lo que ocurre en plasticidad cl3sica, en esta formulaci3n la Ec. (11) no se cumple en un sentido estricto sino en forma distribuida y solo cuando se alcanza la convergencia final del problema.

Considerando la descomposici3n del tensor de tensiones dentro de un proceso iterativo $\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_j + \Delta \boldsymbol{\sigma}$ y reemplazando en la Ec. (9) se tiene

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \Delta \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \, d\Omega \quad (12)$$

luego, reemplazando la relaci3n constitutiva en tasa Ec. (2)

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : (\mathbf{C}^0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B} \Delta p - \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma} \Delta \lambda) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \, d\Omega \quad (13)$$

puede observarse que la ecuaci3n anterior no depende expl3citamente del gradiente del multiplicador pl3stico y tiene una forma muy similar a la ecuaci3n de equilibrio incremental usada en plasticidad cl3sica.

De forma similar, considerando el incremento $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \Delta \mathbf{w}$, despejando la variaci3n del contenido de masa \dot{m} de la Ec. (3) y reemplazando en la relaci3n Ec. (10), se tiene

$$\int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\Delta p}{M} + \mathbf{B} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{B} : \mathbf{m}_{\sigma} - m_p) \Delta \lambda \right) \, d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot (\mathbf{w}_j + \Delta \mathbf{w}) \, d\Omega - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta p \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (14)$$

Teniendo en cuenta la ley de Darcy para flujo en medios porosos

$$\mathbf{w} = -\mathbf{k} \cdot \nabla p \quad (15)$$

se tiene

$$\int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\Delta p}{M} + \mathbf{B} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{B} : \mathbf{m}_{\sigma} - m_p) \Delta \lambda \right) \, d\Omega = -\Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla p_j \, d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \Delta p \, d\Omega - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta p \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (16)$$

Por otro lado la función de fluencia en Ec. (11) puede ser desarrollada en serie de Taylor sobre el punto $(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j})$ con suficiente exactitud truncando la serie hasta los términos lineales (Pamin, 1994)

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha)|_{j+1} = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha)|_j + \mathbf{n}_\sigma : \Delta\boldsymbol{\sigma} + n_p \Delta p + n_{Q_\alpha} \Delta Q_\alpha \quad (17)$$

A continuación, en primer lugar la descomposición aditiva de la tasa de la tensión disipativa en una parte local y otra no local es tenida en cuenta, según Ec. (4). En segundo lugar, para variables de estado espacialmente homogéneas, puede asumirse que $\partial^2 \Phi^* / \partial Q_\alpha \partial Q_\alpha = 0$ (Svedberg, 1999), por lo tanto

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{Q}_\alpha^{loc} + \dot{Q}_\alpha^{nloc} = -H_\alpha^{loc} m_{Q_\alpha} \dot{\lambda} + l_\alpha^2 \mathbf{H}_\alpha^{nloc} m_{Q_\alpha} \nabla^2 \dot{\lambda} \quad (18)$$

reemplazando Ec. (2) y Ec. (18) en Ec. (17) se obtiene la forma débil de la condición de fluencia

$$\int_\Omega \delta\lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, p_{j+1}, Q_{\alpha_{j+1}}) d\Omega = \int_\Omega \delta\lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j}) d\Omega + \int_\Omega \delta\lambda \mathbf{n}_\sigma : \mathbf{C}^0 : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_\Omega \delta\lambda [(\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_\sigma : \mathbf{B}) \Delta p - \mathbf{n}_\sigma : \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_\sigma \Delta\lambda + n_{Q_\alpha} (-H_\alpha^{loc} m_{Q_\alpha} \Delta\lambda + l_\alpha^2 \mathbf{H}_\alpha^{nloc} m_{Q_\alpha} \nabla^2 \Delta\lambda)] d\Omega = 0 \quad (19)$$

3.2. Discretización espacial

Como se observa en el sistema de ecuaciones formado por Ec. (13), Ec. (16) y Ec. (19) aparecen derivadas de primer orden del campo cinemático y de presiones de poro y derivadas de segundo orden del multiplicador plástico. Por lo tanto el proceso de discretización requiere de funciones de forma de continuidad C_0 para el campo de desplazamientos y presiones de poro y funciones de forma de continuidad C_1 para la discretización del multiplicador plástico.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \quad ; \quad p = \mathbf{N}_p \bar{p} \quad ; \quad \lambda = \mathbf{H} \bar{\lambda} \quad (20)$$

Reemplazando estas variables discretas en las ecuaciones generales de campo descriptas en la sección anterior, recordando $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \nabla^s \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}$, se tiene en primer lugar

$$\left\{ \int_\Omega \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^0 : \bar{\mathbf{B}} d\Omega \right\} \Delta \bar{\mathbf{u}} - \left\{ \int_\Omega \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{B} \mathbf{N}_p d\Omega \right\} \Delta \bar{p} - \left\{ \int_\Omega \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_\sigma \mathbf{H} d\Omega \right\} \Delta \bar{\lambda} = \int_{\partial\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{j+1} d\partial\Omega - \int_\Omega \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \boldsymbol{\sigma}_j d\Omega \quad (21)$$

A continuación, reemplazando Ecs. (20) en Ec. (16) se tiene

$$\left\{ \int_\Omega \delta \bar{p} \mathbf{N}_p^T \mathbf{B} : \bar{\mathbf{B}} d\Omega \right\} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \left\{ \int_\Omega \delta \bar{p} \left[\frac{\mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p}{M} + \Delta t (\nabla \mathbf{N}_p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p \right] d\Omega \right\} \Delta \bar{p} + \left\{ \int_\Omega \delta \bar{p} \mathbf{N}_p^T [\mathbf{m}_p - \mathbf{B} : \mathbf{m}_\sigma] \mathbf{H} d\Omega \right\} \Delta \bar{\lambda} = - \left\{ \Delta t \int_\Omega \delta \bar{p} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \right\} \bar{p}_j - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta \bar{p} \mathbf{N}_p^T \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (22)$$

Por último, empleando las variables discretas definidas en Ecs. (20) en Ec. (19) se tiene

$$\left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{C}^0 : \bar{\mathbf{B}} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\mathbf{u}} + \left\{ \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T [\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{B}] \mathbf{N}_p \, d\Omega \right\} \Delta \bar{p} \\ + \left\{ - \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T [\mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma} + \bar{H}_{\alpha}^{loc}] \mathbf{H} + l_{\alpha}^2 \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{H}}_{\alpha}^{nloc} \mathbf{P} \, d\Omega \right\} \Delta \bar{\lambda} = \\ - \int_{\Omega} \delta \bar{\lambda} \mathbf{H}^T \Phi(\sigma_j, p_j, Q_{\alpha_j}) \, d\Omega \quad (23)$$

donde $\nabla^2(\Delta \lambda) = \nabla^2(\mathbf{H}) \Delta \bar{\lambda} = \mathbf{P} \Delta \bar{\lambda}$, $\bar{H}_{\alpha}^{loc} = n_{Q_{\alpha}} H_{\alpha}^{loc} m_{Q_{\alpha}}$ y $\bar{\mathbf{H}}_{\alpha}^{nloc} = n_{Q_{\alpha}} \mathbf{H}_{\alpha}^{nloc} m_{Q_{\alpha}}$.

Dado que las soluciones triviales del sistema de ecuaciones formado por las Ecs. (21)-(23) no son de interés, los valores arbitrarios de $\delta \bar{\mathbf{u}}$, $\delta \bar{p}$ y $\delta \bar{\lambda}$ pueden ser descartados. Ordenando en forma matricial se obtiene la matriz de rigidez del elemento finito para plasticidad de gradientes con continuidad C_1 para el multiplicador plástico

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ss} & \mathbf{Q}_{sp} & \mathbf{Q}_{s\lambda} \\ \mathbf{Q}_{ps} & \mathbf{K}_{pp} + \Delta t \mathbf{H}_{pp} & \mathbf{Q}_{p\lambda} \\ \mathbf{Q}_{\lambda s} & \mathbf{Q}_{\lambda p} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \bar{p} \\ \Delta \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s^{\text{int}} - \mathbf{F}_s^{\text{ext}} \\ -\mathbf{F}_p \\ -\mathbf{F}_{\lambda} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Las submatrices de la Ec. (24) pueden obtenerse por simple inspección de las Ecs. (21)-(23).

A diferencia de lo que ocurre en problemas de plasticidad clásica, donde se requiere de un algoritmo iterativo para el retorno de tensiones, en esta formulación de plasticidad de gradiente, dado que el multiplicador plástico es una variable nodal, no se requiere de un procedimiento iterativo adicional. En la Tabla 1 se encuentra resumido el algoritmo implementado para resolver el problema de valores de borde.

- | |
|---|
| <p>1) Computar las matrices del sistema Ec. (24)</p> <p>2) Resolver el sistema algebraico de Ec. (24) para obtener los incrementos $\Delta \bar{\mathbf{u}}$, $\Delta \bar{p}$ y $\Delta \bar{\lambda}$</p> <p>3) Actualizar las variables primarias $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j = \Delta \bar{\mathbf{u}}_{j-1} + \Delta \bar{\mathbf{u}}$, $\Delta \bar{p}_j = \Delta \bar{p}_{j-1} + \Delta \bar{p}$ y $\Delta \bar{\lambda}_j = \Delta \bar{\lambda}_{j-1} + \Delta \bar{\lambda}$</p> <p>4) En cada punto de integración computar:</p> $\Delta \varepsilon_j = \bar{\mathbf{B}} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j$ $\Delta \lambda_j = \mathbf{H} \Delta \bar{\lambda}_j$ $\nabla^2(\Delta \lambda_j) = \mathbf{P} \Delta \bar{\lambda}_j$ $q_{\alpha_j} = q_{\alpha_0} + m_{Q_{\alpha}} \Delta \lambda_j$ $\nabla^2 q_{\alpha_j} = \nabla^2 q_{\alpha_0} + m_{Q_{\alpha}} \nabla^2(\Delta \lambda_j)$ $\sigma^t = \sigma_0 + \mathbf{C}^0 : \Delta \varepsilon_j - \mathbf{B} \mathbf{N}_p \Delta \bar{p}_j$ <p>IF $\Phi(\sigma^t, q_{\alpha_j}, \nabla^2 q_{\alpha_j}) > 0$</p> $\sigma_j = \sigma^t - \Delta \lambda_j \mathbf{C}^0 : \mathbf{m}_{\sigma}$ <p>ELSE</p> $\sigma_j = \sigma^t$ <p>END</p> <p>5) Chequear la convergencia global, si no converge volver a 1</p> |
|---|

Tabla 1: Algoritmo para plasticidad de gradiente con elementos de Clase C_1 , iteración j

3.3. Tecnología del elemento finito

La formulación de plasticidad de gradiente para medios porosos presentado en [Mroginski et al. \(2011\)](#) incluye en la forma variacional el laplaciano del multiplicador plástico, lo cual implica la necesidad de contar con funciones de forma de continuidad C_1 para describir consistentemente la variación del multiplicador plástico dentro de cada elemento y en su contorno.

Por otro lado, al tratarse de un problema bifásico, sólido-líquido acoplado, se requiere del cumplimiento de la condición de Babuska-Brezzi especialmente cuando puedan presentarse problemas no drenados o de permeabilidad muy baja. En estos casos pueden encontrarse valores nulos en la diagonal principal de la matriz de rigidez lo cual evidentemente puede ocasionar problemas de mal condicionamiento del sistema. La condición de Babuska-Brezzi se cumple aumentando el orden de la función de interpolación del campo cinemático \mathbf{N}_u , respecto del orden de la función de interpolación del campo de presiones, \mathbf{N}_p .

Uno de los tantos elementos finitos que cumple con estas características, y que ha sido suficientemente testado en problemas de flujo acoplado en medios porosos locales ([Lewis y Schrefler, 1998](#); [Mroginski et al., 2010a](#)) es el cuadrilátero serendípito de 8 nodos. Mientras que para el modelado mecánico de sólidos homogéneos el elemento cuadrilátero de 4 nodos con continuidad C_1 ha dado muy buenos resultados ([Pamin, 1994](#); [Dorgan, 2006](#)). Por este motivo, se adopta en el presente trabajo un elemento que combina las ambas propiedades, es decir, se trata de un elemento cuadrilátero de 8 nodos de para las variables que requieren solo continuidad C_0 u y p , superpuesto con el elemento cuadrilátero de 4 nodos y continuidad C_1 para el multiplicador plástico (y sus derivadas primeras y cruzada).

4. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOCALIZACIÓN BIDIMENSIONAL

El siguiente ejemplo numérico consiste el análisis de localización de deformaciones plásticas de una probeta de suelo saturado empleando el modelo material Cam Clay modificado no asociado descrito en ([Mroginski et al., 2010b](#)), la cual se encuentra sometida a una compresión uniforme con condiciones de ensayo drenado, como lo indica la Fig. 1.

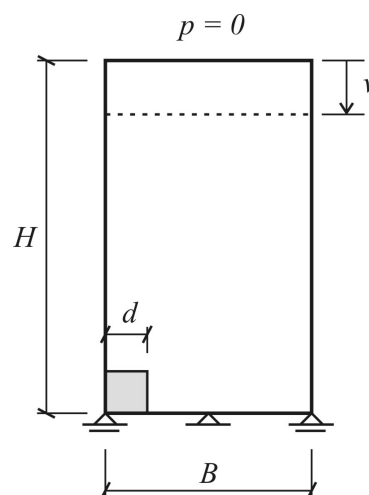


Figura 1: Localización bidimensional. Condiciones de borde.

Por otro lado, para evitar la aparición de valores nulos en la diagonal principal de la matriz de rigidez es necesario incorporar condiciones de borde adecuadas para el multiplicador plástico que aseguren la estabilidad del problema numérico. Estas condiciones implican la nulidad de la

derivada del multiplicador plástico en las direcciones perpendiculares al contorno del problema (Pamin, 1994; Dorgan, 2006).

Las propiedades materiales adoptadas están resumidas en la Tabla 2.

Propiedad Material	Valor
Pendiente de la LEC, M	1,00
Presión de preconsolidación, p_{co}	-100,00 MPA
Porosidad inicial, ϕ_0	0,4
Coficiente de compresibilidad del medio, K_0	1000,00
Coficiente de compresibilidad del sólido, K_s	1500,00
Coficiente de compresibilidad del fluido, K_{fl}	500,00
Coficiente de Biot, $b = 1 - K_0/K_s$	0,33
Coficiente de reducción, β	0,5
Módulo de elasticidad, E	20000,0 MPA
Coficiente Poisson, ν	0,2
Módulo de endurecimiento/ablandamiento local, $H_s^{loc} = H_p^{loc}$	$-0,1 * E$

Tabla 2: Propiedades materiales

Para inducir el inicio de la localización de deformaciones y poder analizar la propagación de las deformaciones plásticas se debilitó una región rectangular de lado $d = 0,1m$ disminuyendo la presión de preconsolidación un 10 %, de acuerdo a la Fig. 1.

En la Fig. 2 se observan las bandas de localización para tres mallas diferentes de elementos finitos: en Fig. 2a la malla empleada es de 6x12 elementos, en la Fig. 2b de 12x24 elementos y en la Fig. 2c de 24x48 elementos, empleando longitudes internas características del esqueleto sólido l_s , y de la fase porosa l_p , iguales a 20mm. De la comparación entre dichas figuras, y observando la Fig. 3 se deduce claramente que el ancho de localización y la dirección crítica no dependen de la discretización espacial adoptada. Esto constituye una de las principales características de las formulaciones no locales de gradientes (Etse y Vrech, 2006; Vrech, 2007).

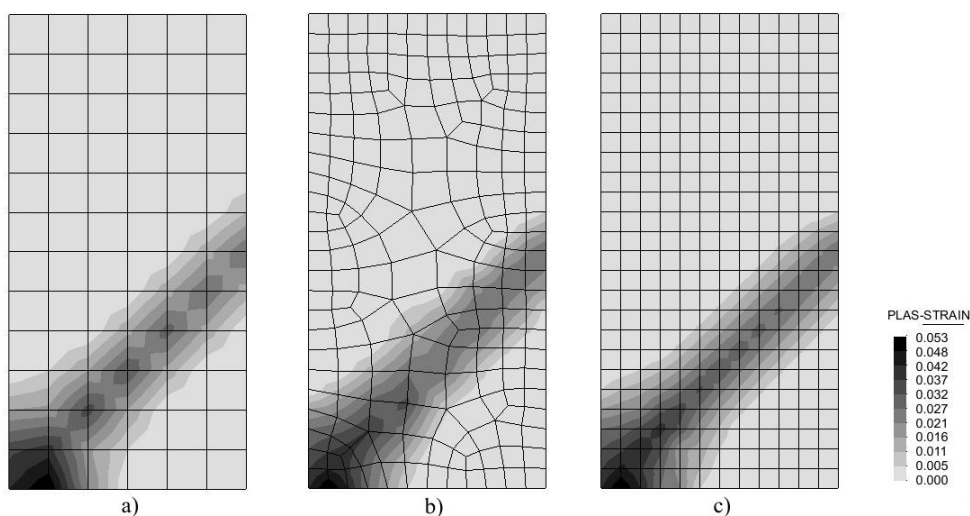


Figura 2: Localización bidimensional.

Para estudiar otra propiedad que posee esta teoría de gradientes, mas allá de la propiedad regularizadora mostrada anteriormente, se repite el ensayo numérico anterior para diferentes

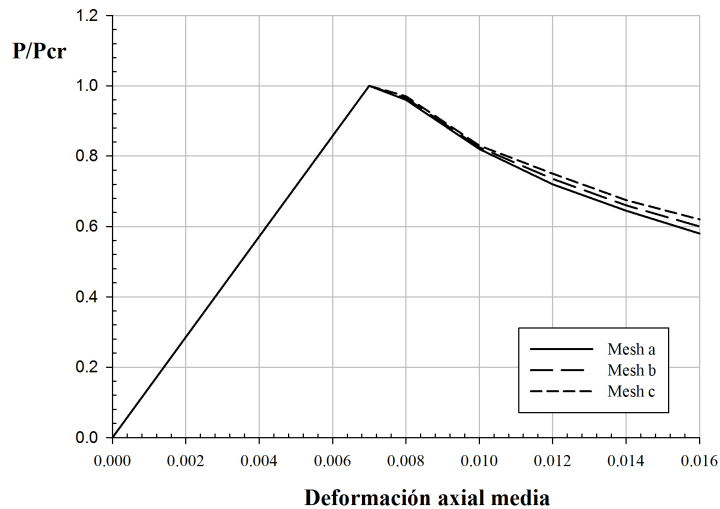


Figura 3: Independencia de la discretización de la malla de EF.

longitudes internas características. En las Fig. 4 se observan la propagación de las deformaciones plásticas en tres probetas de suelo discretizadas con iguales características a la Fig. 2c. Se observa claramente que la longitud interna característica influye directamente en el tamaño de la zona de disipación de deformaciones plásticas.

Por otro lado, del análisis de la Fig. 5 y en correspondencia con lo expuesto en el párrafo anterior, se observa la influencia de la longitud interna característica en el comportamiento post-pico o de ablandamiento. Para valores pequeños de l_α la zona de disipación de deformaciones plástica se reduce, por lo tanto, cuando l_α tiende a cero la banda de localización tenderá a una línea, en cuyo caso la falla será discreta.

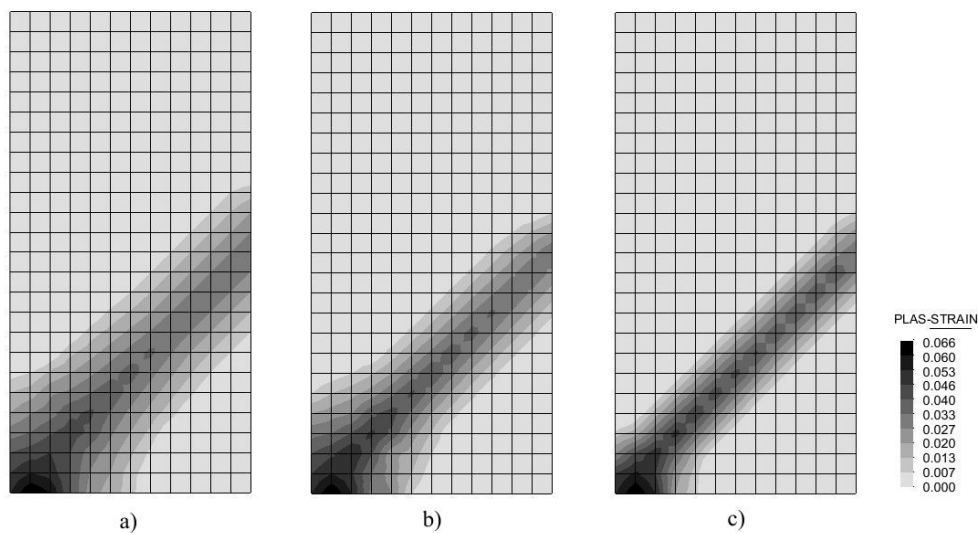


Figura 4: Localización bidimensional para longitudes internas variables.

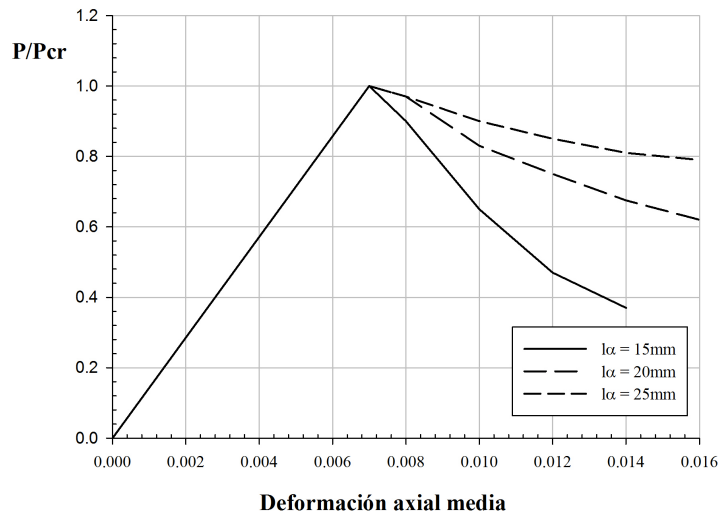


Figura 5: Influencia de la longitud interna característica en el comportamiento post-pico.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se describe sintéticamente una nueva teoría no local para plasticidad de gradientes en medios porosos propuesta por los autores en trabajos previos. Así mismo, la implementación numérica del modelo constitutivo es llevada a cabo empleando el método de elementos finitos mediante un elemento mixto que combina funciones de forma de clase C_0 y C_1 para los desplazamiento y presiones de poro, y para el multiplicador plástico, respectivamente.

De la deducción matemática de dicho modelo surge la posibilidad de definir múltiples longitudes internas características que permiten modelar con mejor fundamento los efectos no locales en medios porosos multifásicos. En el presente trabajo se estudió la variación en el comportamiento mecánico del suelo saturado en función de la longitud interna característica, lo cual permitió demostrar las propiedades regularizante que tiene esta teoría no local basada en gradientes superiores de deformaciones y su efecto en el comportamiento post-pico en suelos saturados.

REFERENCIAS

- Coussy O. *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley & Sons., 1995.
- Dorgan R.J. *A nonlocal model for coupled damage-plasticity incorporating gradients of internal state variables at multiscales*. Ph.D. Thesis, Louisiana State University, 2006.
- Etse G. y Vrech S. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J2 plasticity. *J. Appl. Mech.*, 73(6):1026–1030, 2006.
- Khalili N. y Loret B. An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. *Int. J. Solids Struct.*, 38(46-47):8305–8330, 2001.
- Larsson J. *On the Modelling of Porous Media with emphasis on localization*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- Lewis R.W. y Schrefler B.A. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons., 1998.
- Mroginski J.L., Di Rado H.A., Beneyto P.A., y Awruch A.M. A finite element approach for multiphase fluid flow in porous media. *Math. Comput. Simul.*, 81:76–91, 2010a.

- Mroginski J.L., Etse G., y Vrech S.M. Analisis numerico de localizacion en medios porosos regularizado con teoria de gradientes. *Mecánica Computacional*, 29:5381–5396, 2010b.
- Mroginski J.L., Etse G., y Vrech S.M. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *Int. J. Plasticity*, 27:620–634, 2011.
- Pamin J. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. PhD. Thesis., TU-Delft, The Netherlands, 1994.
- Schrefler B.A. y Pesavento F. Multiphase flow in deforming porous material. *Comput. Geotech.*, 31:237–250, 2004.
- Svedberg T. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. PhD. Thesis., Chalmers University of Technology. Gårdsjöteborg, Sweden, 1999.
- Svedberg T. y Runesson K. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *Int. J. Plasticity*, 13(6-7):669–696, 1997.
- Svedberg T. y Runesson K. An algorithm for gradient-regularized plasticity coupled to damage based on a dual mixed fe-formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 161:49–65, 1998.
- Voyiadjis G.Z. y Deliktas B. Formulation of strain gradient plasticity with interface energy in a consistent thermodynamic framework. *Int. J. Plasticity*, 25(10):1997–2024, 2009.
- Vrech S. y Etse G. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elatoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 22(5):943–964, 2005.
- Vrech S.M. *Computational simulation of localized failure process based on gradient theory (in spanish)*. PhD. Thesis., National University of Tucuman, Argentine, 2007.
- Vrech S.M. y Etse G. Gradient and fracture energy-based plasticity theory for quasi-brittle materials like concrete. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 199(1-4):136–147, 2009.

APÉNDICE A

En esta sección se presentan las funciones de forma hermíticas del elemento cuadrilátero de 4 nodos analizado en la sección 3.3. Según lo expuesto en la sección 3.2 el multiplicador plástico debe ser interpolado mediante funciones de forma con continuidad C_1 , denominado \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{K} \quad (25)$$

donde \mathbf{H} y $\bar{\mathbf{H}}$ son las funciones de forma hermíticas en coordenadas globales y locales, respectivamente, y \mathbf{K} es una matriz de transformación de coordenadas dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Puede observarse que la matriz de transformación \mathbf{K} esta conformada por elementos de la matriz Jacobiana \mathbf{J} . La matriz $\bar{\mathbf{H}}$ del nodo j está formada de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{H}} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_j \\ \bar{h}_{\xi j} \\ \bar{h}_{\eta j} \\ \bar{h}_{\eta \xi j} \end{array} \right\} \quad \text{para el nodo } j = 1, 2, 3, 4 \quad (27)$$

con

$$\bar{h}_j(\xi, \eta) = \frac{1}{16} [3\xi_j\xi - \xi_j\xi^3 + 2] [3\eta_j\eta - \eta_j\eta^3 + 2] \quad (28)$$

$$\bar{h}_{\xi_j}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} [\xi^3 + \xi_j\xi^2 - \xi - \xi_j] [3\eta_j\eta - \eta_j\eta^3 + 2] \quad (29)$$

$$\bar{h}_{\eta_j}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} [3\xi_j\xi - \xi_j\xi^3 + 2] [\eta^3 + \eta_j\eta^2 - \eta - \eta_j] \quad (30)$$

$$\bar{h}_{\eta\xi_j}(\xi, \eta) = \frac{1}{16} [\xi^3 + \xi_j\xi^2 - \xi - \xi_j] [\eta^3 + \eta_j\eta^2 - \eta - \eta_j] \quad (31)$$

Con el fin de buscar una mayor comprensión de las expresiones (28) - (30) se presenta la Fig. 6 donde se representan las funciones de forma de clase C_1 adoptadas.

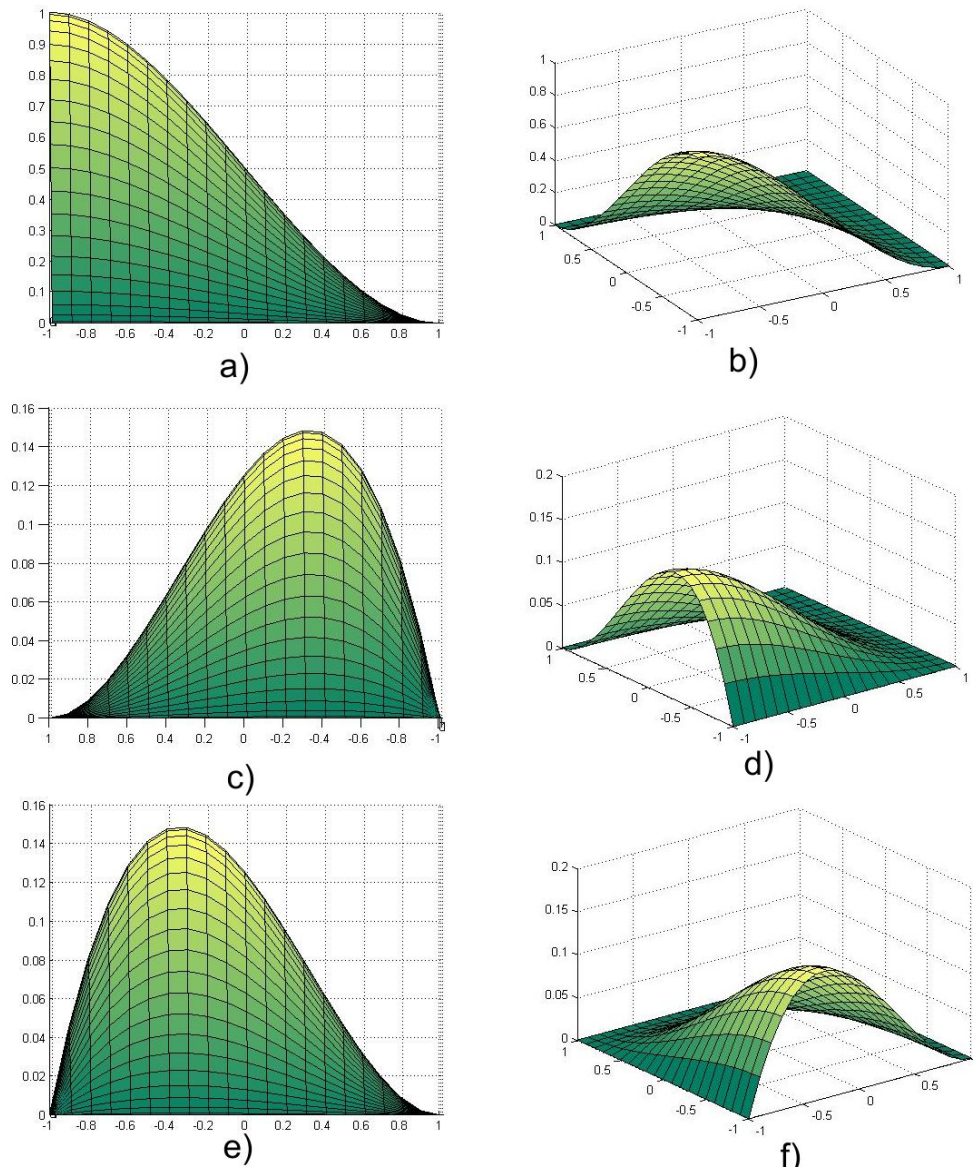


Figura 6: Funciones de forma de continuidad C_1 para: a) el multiplicador plástico λ ; b) para $\partial\lambda/\partial x$; c) para $\partial\lambda/\partial y$