

PROCEDIMIENTO NUMÉRICO PARA ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO NORMAL COMPOSTA

Susana L. Pires^a, Maria Cecilia A.T. da Silva^b

^a*Departamento de Estruturas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Av. Albert Einstein 951, 13083-852 Campinas, SP, Brazil, sulipi@terra.com.br*

^b*Departamento de Estruturas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Av. Albert Einstein 951, 13083-852 Campinas, SP, Brazil, cecilia@fec.unicamp.br, <http://lattes.cnpq.br/1442038381640866>*

Palavras-chave: pilares, concreto armado, estabilidade estrutural, não-linearidade física, não-linearidade geométrica, análise numérica.

Resumo. Este trabalho apresenta um procedimento numérico para o estudo de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando de maneira rigorosa as não-linearidades física e geométrica. O dimensionamento do pilar e a análise de seu comportamento quanto à estabilidade são feitos de forma simultânea. O Método dos Elementos Finitos é utilizado no cálculo dos deslocamentos e as não-linearidades física e geométrica são consideradas por meio de um processo iterativo. Um programa computacional é desenvolvido a partir do procedimento numérico proposto, e sua eficiência é verificada por meio da comparação com trabalhos experimentais extraídos da literatura. O modelo se aplica a pilares de seção retangular constante com distribuição simétrica de armadura. Os efeitos causados pela deformação lenta não são considerados nesta etapa.

1 INTRODUÇÃO

Pilares de concreto, armado submetidos à flexão normal composta, podem atingir a ruína de duas maneiras: por ruptura da seção ou por instabilidade no equilíbrio.

A ruptura da seção transversal ocorre quando, para um dado par de esforços solicitantes - momento fletor e esforço normal, não se consegue encontrar uma distribuição de tensões capaz de verificar a condição: esforços solicitantes \leq esforços resistentes.

A ruína por instabilidade ocorre quando, acrescentando carga ao pilar, há um aumento dos deslocamentos transversais do seu eixo até que tais deslocamentos atinjam um valor crítico onde não haja mais equilíbrio. Com o aumento dos deslocamentos ocorre a ruptura da seção. Entretanto, o estado limite foi alcançado por instabilidade do equilíbrio e não por ruptura da seção.

Para o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado é necessário o estudo da estabilidade do elemento. Se o pilar é estável para um dado carregamento, significa que existe uma posição deformada onde ocorre o equilíbrio.

De um modo geral, as normas de projeto exigem que a segurança de pilares esbeltos de concreto armado seja comprovada por meio de um procedimento que leva em conta de maneira rigorosa as não-linearidades física e geométrica. O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento numérico para o estudo de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando, de maneira rigorosa, as não linearidades física e geométrica. O dimensionamento do pilar e a análise de seu comportamento quanto à estabilidade são feitos de forma simultânea. O procedimento numérico é sistematizado por meio de um programa computacional desenvolvido em linguagem PASCHAL. A eficiência do programa é verificada através da comparação com trabalhos experimentais extraídos da literatura corrente.

Este trabalho é uma extensão e refinamento do modelo original apresentado por [Pires \(2006\)](#)

2 MODELOS MATERIAIS

Dois diagramas tensão-deformação do concreto são utilizados. Para a etapa de dimensionamento estrutural, é adotado o diagrama tensão-deformação proposto pela NBR6118/2003 ([ABNT, 2003](#)), mostrado na Figura 1. Nesse diagrama, as relações tensão-deformação são estabelecidas pelas seguintes equações:

$$\sigma_c = 0,85 * f_c \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] \text{ se } \varepsilon_c < \varepsilon_0 \quad (1)$$

$$\sigma_c = f_c \text{ se } \varepsilon_0 < \varepsilon_c < \varepsilon_u \quad (2)$$

$$\sigma_c = 0 \text{ se } \varepsilon_c > \varepsilon_u \quad (3)$$

onde $\varepsilon_0 = 0,2\%$ e $\varepsilon_u = 0,35\%$.

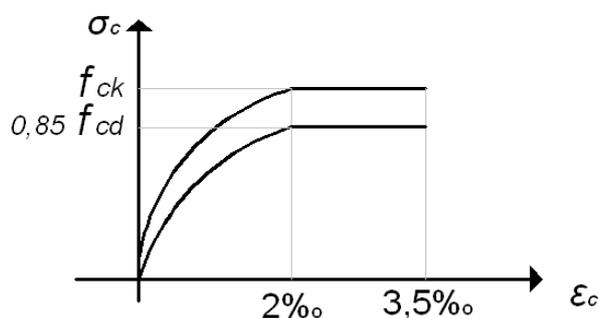


Figura 1: Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido proposto pela norma NBR 6118 (ABNT, 2003)

Quando o objetivo é comparar os resultados do programa com dados experimentais, é adotado o diagrama tensão-deformação do concreto proposto pelo CEB - Comitê Euro-International du Béton (1993) mostrado na Figura 2. Nesse caso, as relações tensão-deformação são estabelecidas pelas seguintes equações:

$$\sigma_c = f_{cm} \left(\frac{\kappa\eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2)\eta} \right) \quad (4)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{0,22\%} \quad \kappa = \frac{E_c * 0,22\%}{f_{cm}} \quad (5)$$

$$E_c = 21500 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3}, \text{MPa} \quad (6)$$

onde $\varepsilon_0 = 0,22\%$ e $\varepsilon_u = 0,35\%$.

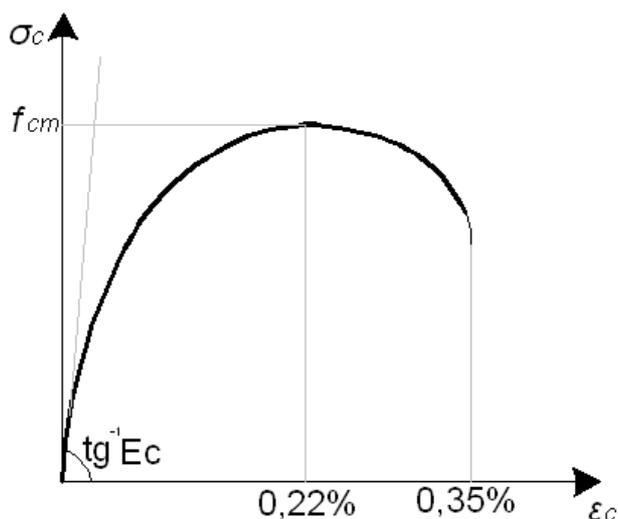


Figura 2: Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido proposto pelo CEB

Observa-se que, na expressão do CEB, o módulo de deformação longitudinal do concreto, E_c , é uma função de sua resistência média à compressão, f_{cm} , e não da sua resistência característica à compressão, f_{ck} . Em geral, nos dados experimentais, é conhecida a resistência

média à compressão do concreto, por isso o diagrama tensão-deformação proposto pelo CEB foi escolhido quando os valores obtidos pelo programa são comparados com os dados experimentais.

Para o aço adotou-se um comportamento elasto-plástico perfeito (ABNT, 2003). A Figura 3 apresenta o diagrama utilizado para tração e para compressão. As equações constitutivas para o aço estão mostradas nas equações (7), (8) e (9).

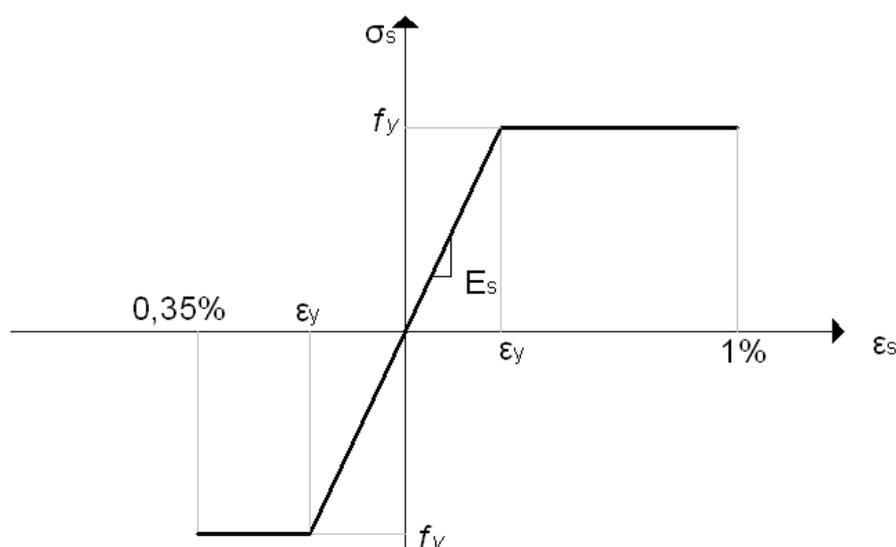


Figura 3: Diagrama tensão-deformação do aço (ABNT, 2003)

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \text{ se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \quad (7)$$

$$\sigma_s = f_y \text{ se } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 1\% \quad (8)$$

$$\sigma_s = f_y \text{ se } |\varepsilon_y| \leq |\varepsilon_s| \leq 0,35\% \quad (9)$$

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 Hipóteses Básicas

Algumas hipóteses básicas são admitidas no dimensionamento de uma seção transversal de concreto armado submetida à flexão: a) as seções planas permanecem planas após a deformação do elemento; b) a deformação em uma fibra genérica da seção é diretamente proporcional à sua distância até a linha neutra; c) considera-se aderência perfeita entre as barras da armadura e o concreto que as envolve; d) a resistência à tração do concreto é totalmente desprezada; e) emprega-se o diagrama parábola-retângulo para representar a relação tensão-deformação do concreto.

3.2 Seção transversal do pilar

Um pilar esbelto de concreto armado sujeito à flexão normal composta é analisado. A seção transversal do pilar possui várias camadas de armadura (Figura 4) espaçadas

uniformemente ao longo de sua altura h .

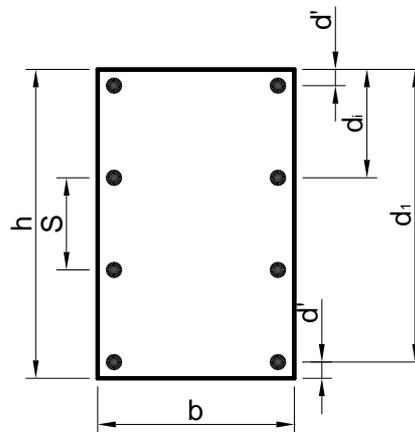


Figura 4: Seção Transversal de Concreto Armado

As barras que compõem a armadura são consideradas de mesmo diâmetro. Portanto, a área de cada barra (A_{si}) pode ser expressa em função de sua área total (A_s) pela expressão:

$$A_{s_i} = \frac{n_i}{n_{total}} A_s \quad (10)$$

3.3 Equações de equilíbrio

Na Figura 5 estão representados os esforços solicitantes N_d e M_d , a resultante de compressão no concreto R_{cc} e a resultante das tensões em uma camada genérica de amadura, R_{si} .

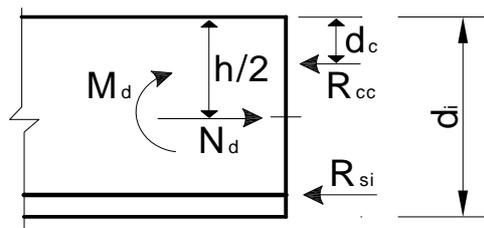


Figura 5: Resultantes das tensões e esforços solicitantes

A resultante R_s é dada por:

$$R_s = \sum_{i=1}^t A_{s_i} \sigma_{s_i} \quad (11)$$

Substituindo a equação (10) na equação (11), obtém-se a expressão:

$$R_s = \frac{A_s}{n_{total}} \sum_{i=1}^t n_i \cdot \sigma_{s_i} \quad (12)$$

onde t é o número de camadas de aço da seção transversal.

A resultante R_{cc} é dada por:

$$R_{cc} = \int_0^x b \sigma_c d_z \quad (13)$$

As equações de equilíbrio de Forças e de Momento são apresentadas pelas equações (14) e (15), respectivamente:

$$N_d = R_{cc} + R_s \quad (14)$$

$$M_d = N_d \cdot \frac{h}{2} - R_{cc} \cdot d_c - \sum_{i=1}^l R_{si} \cdot d_i \quad (15)$$

3.4 Deslocamentos e Deformações em Pilares Esbeltos

Para a determinação dos deslocamentos e das deformações em pilares esbeltos, são adotadas as hipóteses válidas para barras esbeltas submetidas à flexão normal composta.

Para a obtenção dos deslocamentos de barras esbeltas (Araújo, 1993; Simites and Hodges, 2006) adota-se a hipótese das seções planas, ou seja, admite-se que as seções transversais ao eixo da barra, inicialmente planas, permaneçam planas e normais ao eixo deformado e que essa condição é cumprida até a ruptura, desprezando-se assim as deformações por cisalhamento. Outra hipótese a ser adotada é a de que os deslocamentos transversais (W) do eixo da barra sejam pequenos em relação a seu comprimento (l). Sendo assim, a curvatura média (χ) das seções da barra pode ser obtida pela equação aproximada (16), onde x é medido ao longo do eixo indeformado, e o esforço normal se mantém praticamente constante independente das deformações da barra:

$$\chi = \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \quad (16)$$

A Figura 6 mostra uma barra nas posições indeformada e deformada. As cargas são aplicadas no plano x - z . A barra está submetida à flexão normal composta. O eixo da barra sofre dois deslocamentos, u_o na direção x e W na direção z , e a seção transversal sofre uma rotação θ .

Dessa forma, o deslocamento $u(x,z)$ em uma fibra genérica da seção, situada a uma distância z do eixo da barra, é dado por:

$$u(x, z) = u_o(x) + u_1(x, z) \quad (17)$$

onde u_1 é o deslocamento provocado pela rotação da seção transversal.

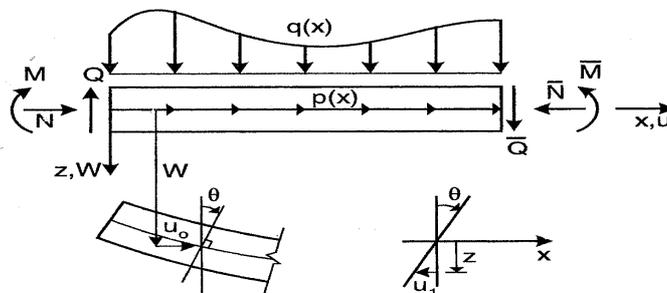


Figura 6: Deslocamentos e forças em uma barra esbelta submetida a carga distribuída

O deslocamento u_1 é dado por:

$$u_1(x, z) = -z\theta = -z \frac{dW}{dx} \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) na equação (17), o deslocamento no interior da barra é dado por:

$$u(x, z) = u_o(x) - z \frac{dW}{dx} \quad (19)$$

A relação da deformação normal em um ponto genérico da barra com os deslocamentos do seu eixo é dada pela expressão:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o + z\chi \quad (20)$$

onde

$$\varepsilon_o = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 \quad (21)$$

3.5 Critérios de Ruptura da Seção Transversal

Os critérios de ruptura da seção transversal de um elemento de concreto armado foram extraídos da norma brasileira (ABNT, 2003). Na compressão axial, os concretos atingem picos máximos de tensões para deformações de 0,2% e na compressão não uniforme o limite de deformação do concreto varia de 0,2% a 0,35%. Na flexão, a capacidade máxima de absorver os esforços ocorre aproximadamente a 0,35% de deformação. O máximo alongamento do aço permitido foi estipulado em 1%. Assim, no presente trabalho, os valores limites de encurtamento do concreto e de alongamento do aço são adotados de acordo com a Tabela 1. O limite de encurtamento do aço à compressão obedece os critérios impostos ao concreto à compressão.

Condição	Deformação
Alongamento da armadura tracionada	$\varepsilon_s \leq 0,010$
Encurtamento do concreto em seções parcialmente comprimidas	$\varepsilon_c \leq 0,0035$
Encurtamento do concreto em seções submetidas à compressão não-uniforme	$0,002 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035$
Encurtamento do concreto em seções submetidas à compressão uniforme	$\varepsilon_c \leq 0,002$

Tabela 1: Limites de deformação do concreto e do aço

4 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Alguns procedimentos numéricos foram utilizados para: calcular a resultante do concreto levando em conta a não-linearidade física; calcular os deslocamentos; incluir as não-linearidades física e geométrica; e calcular a armadura longitudinal. Esses procedimentos são apresentados a seguir.

4.1 Cálculo da resultante R_{cc}

A resultante R_{cc} é dada pela equação (13), já apresentada anteriormente:

Desprezando-se as contribuições do concreto tracionado, as integrais de concreto podem ser resolvidas numericamente, dividindo-se a seção em faixas de largura b e altura Δh (Figura 7). As tensões de concreto são calculadas dentro de cada faixa. A variável k indica o número de faixas a ser utilizado e é obtida pela razão entre a altura da linha neutra, x , e a altura da faixa, Δh , previamente estabelecida pela equação (22). A resultante R_{cc} é então obtida pela equação (23):

$$k = \frac{x}{\Delta h} \quad (22)$$

$$R_{cc} = \sum_{j=1}^k \Delta h \cdot b \cdot \sigma_{cj} \quad (23)$$

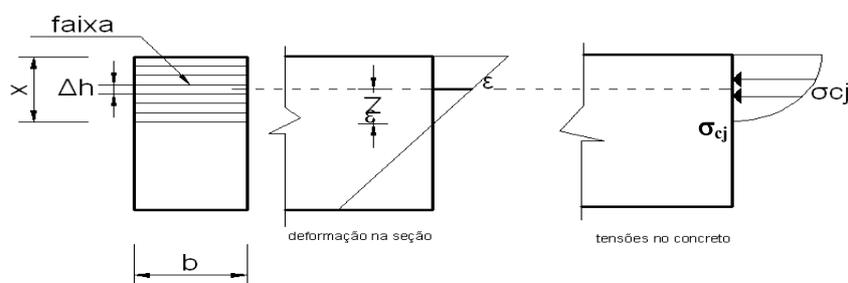


Figura 7: Divisão da seção em faixas para integração numérica

4.2 Cálculo dos Deslocamentos

O procedimento numérico desenvolvido para o cálculo dos deslocamentos é baseado no Método dos Elementos Finitos (Segerlind, 1984; Zienkiewicz, 1980). O eixo do pilar é discretizado em pequenos elementos que são interligados por seus nós. Cada nó possui um deslocamento transversal, um deslocamento axial e uma rotação (Figura 8).

Através das funções de interpolação (equações (24) a (29)), os deslocamentos em um ponto genérico do elemento finito são obtidos em função dos deslocamentos nodais.

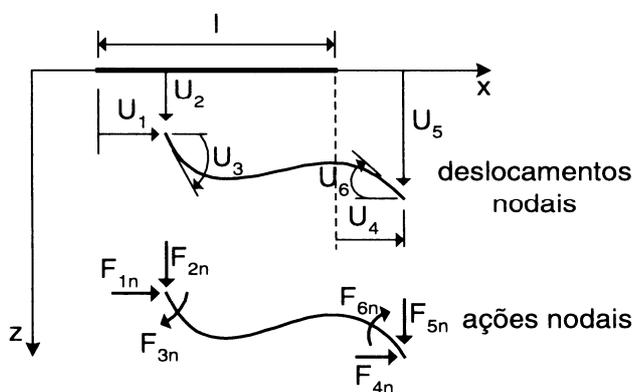


Figura 8: Ações e deslocamentos nodais do elemento

$$\phi_1 = 1 - \left(\frac{x}{\ell}\right) \quad (24)$$

$$\phi_2 = 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 1 \quad (25)$$

$$\phi_3 = \ell \left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right) \right) \quad (26)$$

$$\phi_4 = \left(\frac{x}{\ell}\right) \quad (27)$$

$$\phi_5 = -2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \quad (28)$$

$$\phi_6 = \ell \left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right) \quad (29)$$

Os deslocamentos u_o e W do eixo do elemento são obtidos pelas expressões:

$$u_o = \phi_1 U_1 + \phi_4 U_4 \quad (30)$$

$$W = \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 + \phi_5 U_5 + \phi_6 U_6 \quad (31)$$

As equações que determinam as ações nodais não lineares de cada elemento são dadas por:

$$F_{1n} = \int_0^l N_d \phi_1' dx \quad (32)$$

$$F_{2n} = \int_0^l -M_d \phi_2'' dx + \int_0^l N_d (\phi_2' U_2 + \phi_3' U_3 + \phi_5' U_5 + \phi_6' U_6) \phi_2' dx \quad (33)$$

$$F_{3n} = \int_0^l -M_d \phi_3'' dx + \int_0^l N_d (\phi_2' U_2 + \phi_3' U_3 + \phi_5' U_5 + \phi_6' U_6) \phi_3' dx \quad (34)$$

$$F_{4n} = \int_0^l N_d \phi_4' dx \quad (35)$$

$$F_{5n} = \int_0^l -M_d \phi_5'' dx + \int_0^l N_d (\phi_2' U_2 + \phi_3' U_3 + \phi_5' U_5 + \phi_6' U_6) \phi_5' dx \quad (36)$$

$$F_{6n} = \int_0^l -M_d \phi_6'' dx + \int_0^l N_d (\phi_2' U_2 + \phi_3' U_3 + \phi_5' U_5 + \phi_6' U_6) \phi_6' dx \quad (37)$$

Para a resolução dessas equações é utilizada a Quadratura de Gauss-Legendre, considerando-se três pontos de integração. Os pontos, as coordenadas dos pontos e seus respectivos pesos estão apresentados na Tabela 2.

i	ξ_i	ϖ_i
1	$\sqrt{0,6}$	5/9
2	0	8/9
3	$-\sqrt{0,6}$	5/9

Tabela 2: Pontos de Integração da Quadratura de Gauss-Legendre

onde i é o número do ponto de integração, ξ_i é a coordenada do ponto i e ϖ_i é o peso associado ao ponto i .

Com os deslocamentos nodais e as funções de interpolação conhecidas, através das seis equações de equilíbrio, chega-se ao sistema de equações:

$$\underline{F} = \underline{K}\underline{U} \quad (38)$$

onde \underline{F} é o vetor de ações nodais, \underline{U} é o vetor com os deslocamentos nodais e \underline{K} é a matriz de rigidez do elemento.

A matriz de rigidez \underline{K} do elemento será:

$$[\underline{K}] = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & 6bL & 4bL^2 \end{vmatrix} \quad (39)$$

Para o cálculo das rigidezes axial e à flexão é considerada a seção transversal de concreto armado homogeneizada. As variáveis a e b mostradas na matriz de rigidez K de cada elemento finito (equação (39)), são dadas por:

$$a = E_c A_c + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \quad (40)$$

$$b = E_c I_c + E_s \sum_{i=1}^n I_{si} \quad (41)$$

4.3 Inclusão das não linearidades física e geométrica

A inclusão da não linearidade geométrica é feita através do último termo das equações (33), (34), (36) e (37). A não-linearidade física é considerada no cálculo do esforço normal N_d (equação (14)) e do momento fletor M_d (equação (15)).

A inclusão das não linearidades através do vetor de ações nodais não lineares dá origem a uma diferença $\Delta \underline{F}$ entre o vetor de cargas externas (\underline{F}) e o vetor de ações nodais não lineares

(\underline{F}_n). Para reduzir essa diferença a um valor residual, um procedimento iterativo é introduzido nessa etapa (Kwak and Filippou, 1990). O Método de Newton–Raphson modificado com rigidez constante (Figura 9) foi adotado como ferramenta numérica e os deslocamentos nodais são as incógnitas do problema.

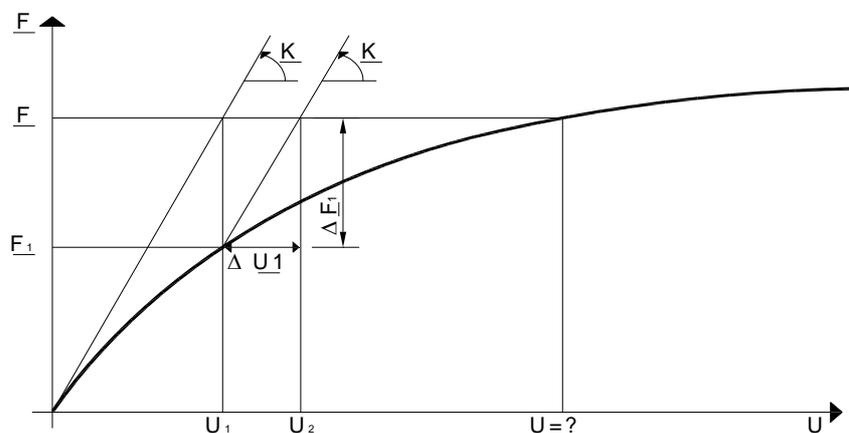


Figura 9: Método de Newton-Raphson modificado com rigidez constante

4.4 Cálculo da Armadura Longitudinal

No dimensionamento de pilares foi também utilizado um processo iterativo para a determinação da mínima área de aço (A_s) capaz de verificar a estabilidade do pilar.

Os valores limites utilizados como referência na determinação da armadura longitudinal de pilares foram extraídos da norma brasileira NBR 6118/2003 (ABNT, 2003).

A armadura longitudinal mínima deve ser:

$$A_{s_{\min}} \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,15 * N_d / f_y d \\ 0,004 * A_c \end{array} \right\} \quad (42)$$

A armadura longitudinal máxima deve ser:

$$A_{s_{\max}} = 0,08 * A_c \quad (43)$$

5 ALGORITMOS DO PROGRAMA (Pires, 2006)

São estabelecidos como dados de entrada os seguintes parâmetros: características geométricas da estrutura, propriedades mecânicas dos materiais, dimensões da seção do elemento, posição da armadura, cargas nodais, cargas distribuídas e condições de contorno.

Inicialmente é montado o vetor de cargas externas \underline{F} e a matriz de rigidez \underline{K} (equação (39)). Em uma iteração i , são conhecidos os deslocamentos nodais U_i de cada elemento finito através do sistema de equações (38). A partir desses deslocamentos é possível determinar os deslocamentos u_o e W (equações (30) e (31)) do eixo de cada elemento através das funções de interpolação (equações (24) a (29)).

É determinada uma área mínima de aço ($A_{s_{\min}}$) (equação (42)) e com essa área de aço é verificada a estabilidade do pilar, da seguinte forma: os esforços solicitantes N_d e M_d são inicialmente obtidos pelas expressões (14) e (15), respectivamente, onde a não linearidade física é introduzida. Os valores desses esforços são, por sua vez, utilizados na determinação

do vetor de ações nodais não lineares \underline{F}_i (equações (32) a (37)) para cada elemento finito. Nesse conjunto de equações é introduzida a não linearidade geométrica. O vetor de ações nodais não-lineares \underline{F}_i corresponde aos deslocamentos nodais U_i da iteração atual. O vetor $\Delta \underline{F}$ é obtido da diferença entre o vetor de ações nodais não lineares \underline{F}_i e o vetor de cargas externas \underline{F} . Para reduzir essa diferença são realizadas n iterações até a convergência do processo iterativo. O processo iterativo utilizado nesta fase é o método de Newton-Raphson Modificado com rigidez constante. Quando ocorrer a convergência, significa que o pilar é estável com a mínima área de aço possível, portanto o pilar está dimensionado com armadura mínima.

Se não ocorrer a convergência do processo, a estabilidade do pilar deve ser verificada com a máxima área de aço (A_{smax}) (equação (43)). Se a convergência do processo não for verificada, significa que o pilar não é estável com a máxima área de aço (A_{smax}) permitida, e portanto o pilar não pode ser dimensionado. Se for constatada a estabilidade do pilar, uma nova área de aço adotada será a média da máxima e da mínima área de aço, fazendo novamente o estudo da estabilidade do pilar. Este procedimento é repetido até que o pilar seja estável para a menor área de aço que o equilibre (Figura 10). O programa foi desenvolvido na linguagem Pascal.

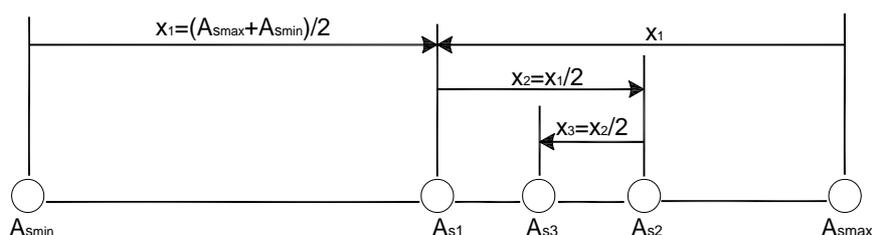


Figura 10: Convergência do processo iterativo

Um fluxograma simplificado do programa proposto está apresentado na Figura 11. O programa é composto por três módulos: dimensionamento do pilar, estudo da estabilidade do pilar, e cálculo dos esforços momento fletor e força normal.

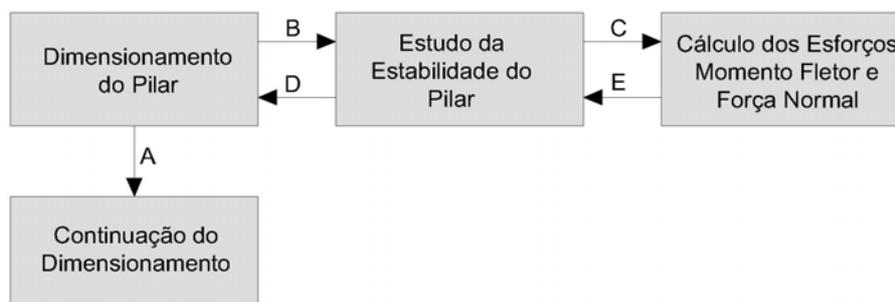


Figura 11: Fluxograma simplificado para dimensionamento e análise de estabilidade do pilar

Os fluxogramas detalhados dos três módulos que compõem o programa computacional são apresentados nas Figura 12, Figura 13 e Figura 14 respectivamente.

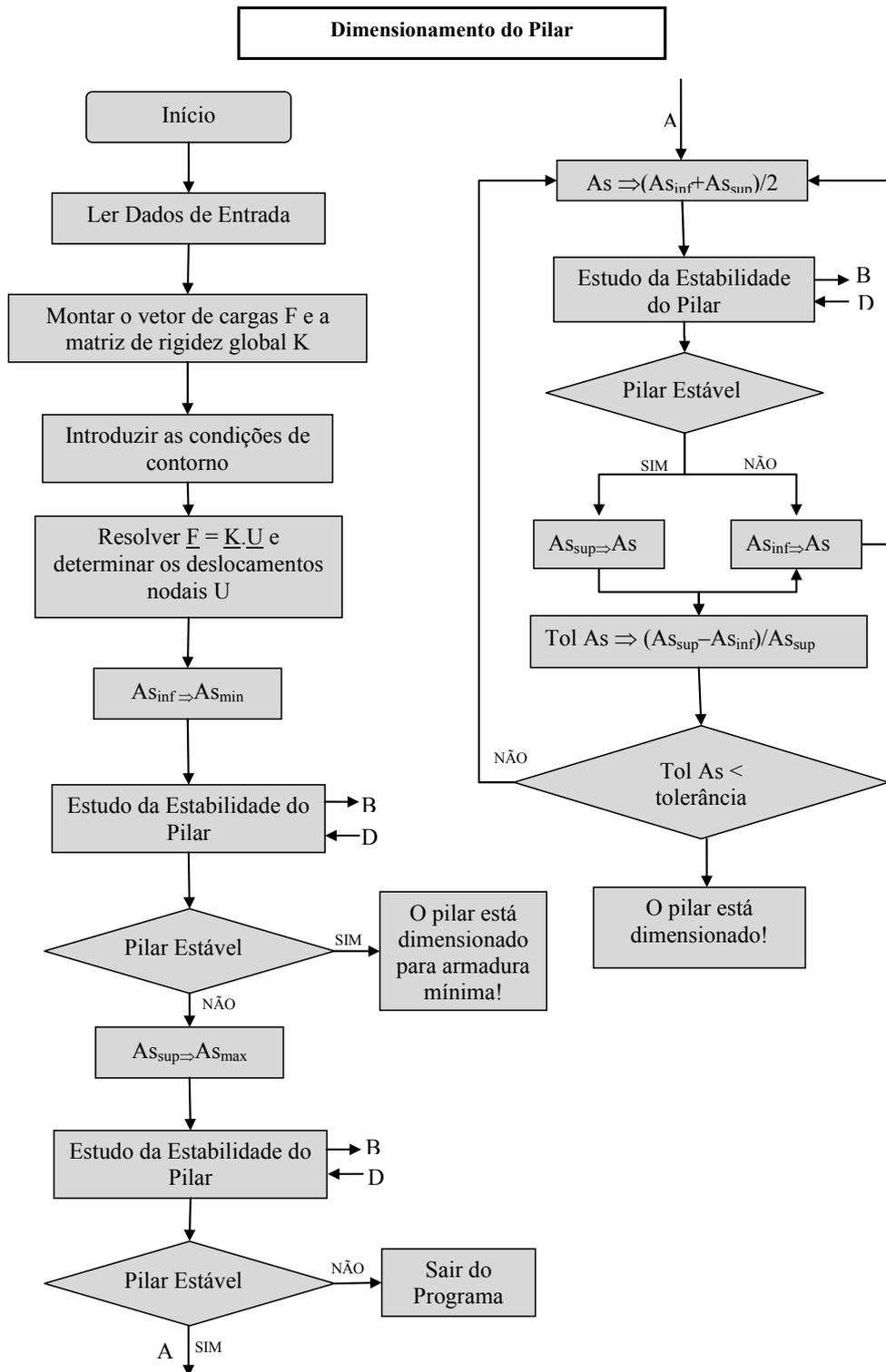


Figura 12: Fluxograma para dimensionamento do pilar

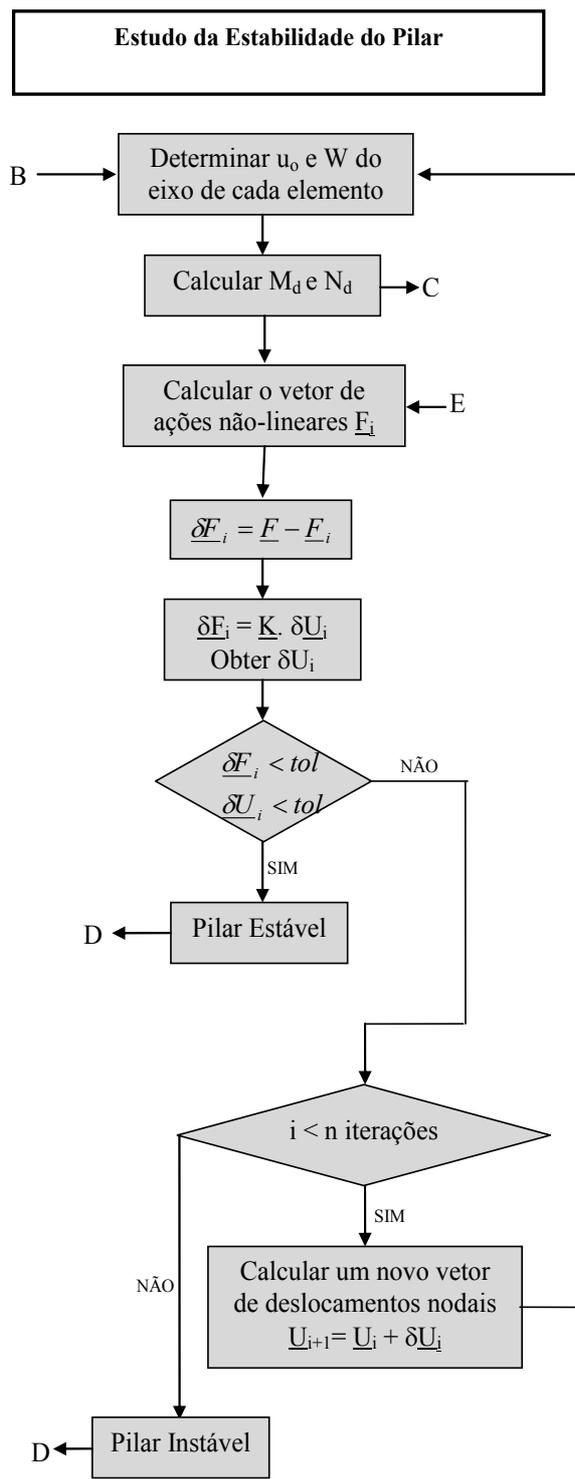


Figura 13: Fluxograma para estudo da estabilidade do pilar

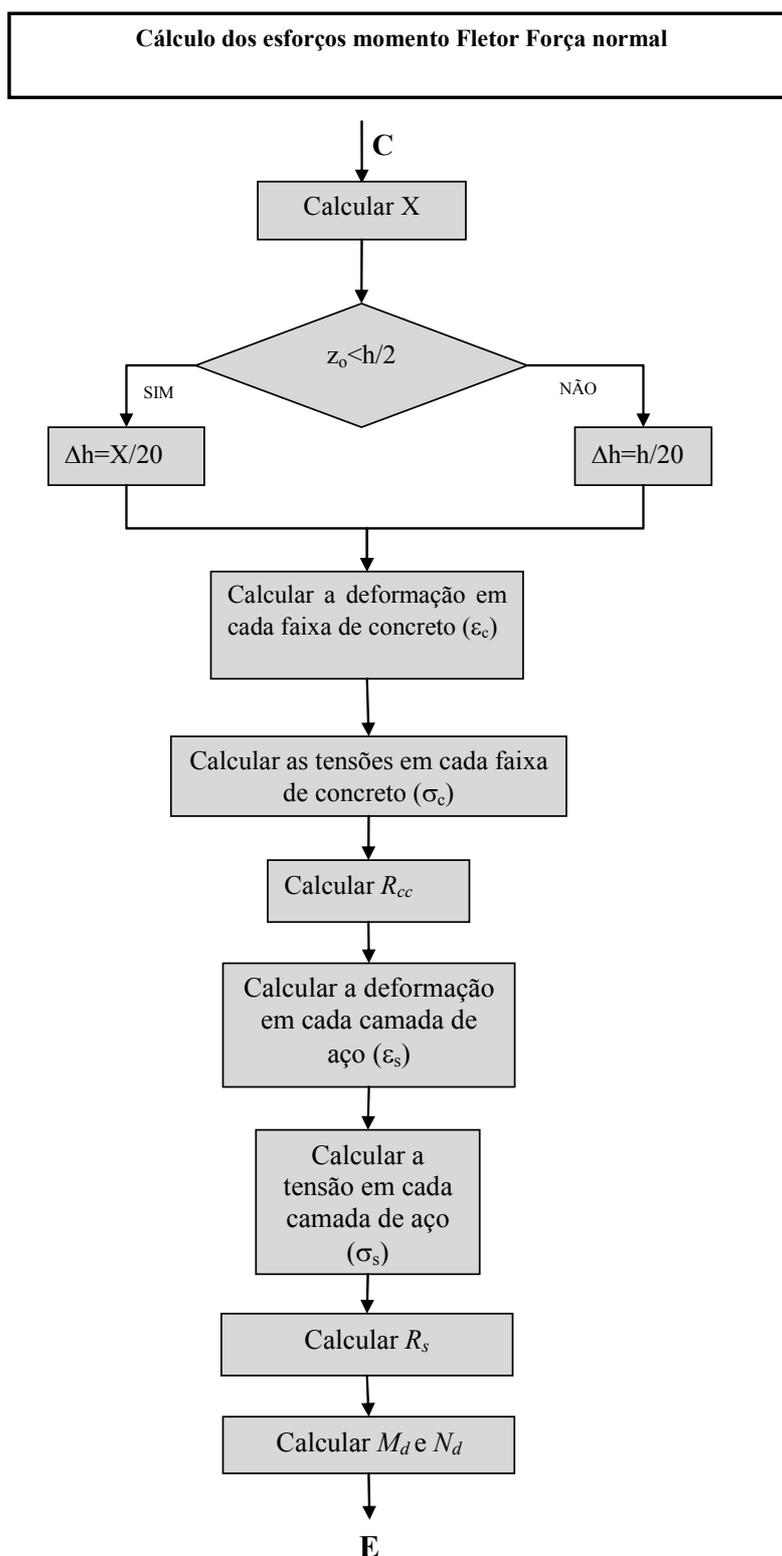


Figura 14: Fluxograma para cálculo dos esforços momento fletor e força normal

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para validar o programa de dimensionamento e de análise de estabilidade de pilares esbeltos (Dim_Pilar), é apresentada uma análise comparativa dos resultados obtidos no programa computacional com resultados experimentais obtidos por [Goyal and Jackson \(1971\)](#) em uma série de 17 pilares divididos em três grupos de acordo com os seguintes parâmetros: área de aço ($A_{s_{exp}}$), tensão de escoamento do aço (f_y) e comprimento do pilar (l). Os valores adotados são apresentados na Tabela 3. Os pilares têm seção transversal (Figura 15) constante ao longo de todo seu comprimento, inclusive armaduras, e foram levados à ruína aos 28 dias de idade.

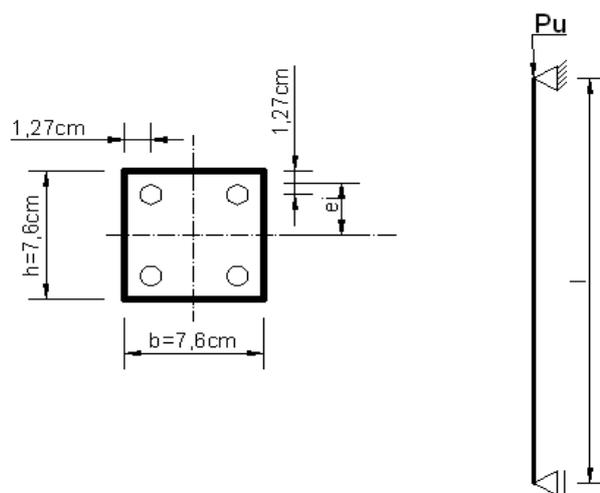


Figura 15: Detalhes dos pilares da série experimental

A resistência à compressão do concreto (f_{pr}) foi obtida por ensaio de corpos de prova prismáticos. O aço utilizado tem patamar de escoamento definido e uma tensão de escoamento denominada f_y . Para módulo de elasticidade do aço adotou-se o valor de 21000 KN/cm² sugerido pelo norma brasileira NBR-6118/2003 ([ABNT, 2003](#)), pela falta de determinação experimental. As cargas de ruína (P_u) e as excentricidades iniciais (e_i), obtidas nos ensaios, foram adotadas no programa computacional como cargas e excentricidades de projeto para os pilares.

Os valores obtidos para a armadura $A_{s_{calc}}$, calculada pelo programa Dim_Pilar, são comparados com a armadura existente nos pilares, $A_{s_{exp}}$. Na Tabela 4, além dos valores das áreas de aço calculadas, são apresentadas as taxas mecânicas de armadura calculada, as taxas mecânicas de armadura experimental e um fator Δ (equação (44)) que indica a variação dos valores das taxas mecânicas das armaduras calculadas em relação às taxas mecânicas das armaduras experimentais:

$$\Delta = \frac{\omega_{t, calc} - \omega_{t, exp}}{\omega_{t, exp}} \quad (44)$$

A taxa mecânica é calculada pela equação (45):

$$\omega_t = \frac{A_s}{A_{conc}} \cdot \frac{f_y}{f_c} \quad (45)$$

Essa taxa é utilizada como parâmetro de comparação já que a resistência à compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço variam de acordo com o grupo de pilares analisados experimentalmente.

Grupo	f_y (KN/cm ²)	L (cm)	b (cm)	h (cm)	$A_{s_{exp}}$ (cm ²)	λ
1	35,9	182,9	7,6	7,6	1,42	83
2	31,6	182,9	7,6	7,6	1,0	83
3	31,6	274,3	7,6	7,6	1,0	125

Tabela 3: Dados experimentais para os grupos de pilares analisados

Grupo	Pilar	P_u (KN)	e_i (cm)	f_c (KN/cm ²)	$A_{s_{cal}}$ (cm ²)	$A_{s_{cal}} / A_{s_{exp}}$	$\omega_{t,calc}$	$\omega_{t,exp}$	Δ (%)
1	P1	33.79	3.81	2	1.37	0.96	0.43	0.44	-2.3
1	P2	34.02			1.39	0.98	0.43		-2.3
1	P3	45.36	2.54	2.4	1.31	0.92	0.34	0.37	-8.1
1	P4	47.71			1.41	0.99	0.37		0
1	P5	68.03	1.27	2.25	1.39	0.98	0.38	0.39	-2.6
1	P6	66.67			1.33	0.94	0.37		-5.1
1	P7	56.47	1.91	2.25	1.50	1.06	0.41	0.39	+5.1
1	P8	54.06			1.39	0.98	0.38		-2.6
2	P9	61.23	1.27	2,3	1.04	1.04	0.25	0.24	+4.2
2	P10	58.51			0.91	0.91	0.22		-8.3
2	P11	47.49	1.91	2,3	1.10	1.10	0.26	0.24	+8.3
2	P12	46.49			1.06	1.06	0.25		+4.2
2	P13	37.87	2.54	2,3	1.04	1.04	0.25	0.24	+4.2
2	P14	37.74			1.03	1.03	0.25		+4.2
3	P15	31.75	1.27	2,2	0.86	0.86	0.21	0.25	-16.0
3	P16	24.81	1.91	2,1	1.08	1.08	0.28	0.26	+7.7
3	P17	20.95	2.54		1.11	1.11	0.29		+11.5

Tabela 4: Comparação: Resultados Dim_Pilar x Dados Experimentais

Com base nos valores de Δ , verifica-se que para os pilares do grupo 1, com resistência do aço igual a 35,9 KN/cm², a armadura calculada apresentou valores inferiores à armadura experimental. A variação, contudo é pouco significativa: das oito pilares analisados, cinco apresentaram variação Δ menor que 2,3% , e dois apresentaram variação em torno de 5,1%. O único resultado não coerente neste bloco é o referente ao pilar P3, que apresentou variação de 8,1% , e que mostra inconsistência comparativamente ao pilar P4, que com as mesmas características do pilar P3, apresenta variação nula. Uma justificativa para explicar porque os valores obtidos para a armadura calculada foram inferiores à armadura experimental foi pautada no seguinte aspecto: no grupo 1, a resistência do aço é superior à resistência do aço utilizado nos pilares dos grupos 2 e 3. Assim a parcela de esforços absorvida pela armadura tende a ser mais significativa. Para o cálculo das tensões no aço, foi utilizado o módulo de elasticidade fixado pela norma brasileira que é de 21000 KN/cm², valor ligeiramente superior ao adotado pelo CEB, de 20000 KN/cm². Como o trabalho experimental não cita qual o valor do módulo de elasticidade do aço utilizado nos experimentos, é possível que esse valor fique mais próximo ao proposto pelo CEB. Nesse caso, o aço estaria sendo superestimado no cálculo, levando a valores menores de armadura. Essa diferença, contudo, não é significativa.

Já nos valores relativos aos pilares dos grupos 2 e 3, a armadura calculada apresentou, na

maioria dos casos, valores superiores a armadura experimental. Nesses grupos, a tensão de escoamento do aço adotada foi de 31,6 KN/cm², inferior ao adotado no grupo 1. Nesse caso, o concreto passa a absorver uma parcela maior dos esforços. Na análise experimental, há uma colaboração do concreto tracionado mas, no cálculo, essa colaboração é desprezada, o que possivelmente pode ter levado a valores mais conservadores para a armadura calculada. As diferenças nos pilares dos grupos 2 e 3 ficaram entre 4% e 11%. O pilar P15 não apresentou resultado consistente.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um programa para análise de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão normal composta. O programa proposto mostrou boa concordância com os dados experimentais extraídos da literatura corrente, apresentando variações na taxa mecânica de armadura entre 2% e 16%. O presente trabalho alcançou seu objetivo principal de desenvolver uma ferramenta computacional que permite dimensionar pilares esbeltos sujeitos à flexão normal composta e analisar seu comportamento quanto à estabilidade de forma simultânea, levando em consideração as não-linearidades física e geométrica de forma rigorosa. Entende-se, contudo, que esse é o término de uma primeira etapa de investigação. A consideração da deformação lenta e a ampliação do programa a fim de permitir a análise de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua deverão ser objeto de estudo em etapa subsequente.

8 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brasília –DF – Brasil, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araújo, J.M., *Pilares esbeltos de concreto armado – algoritmos para análise e dimensionamento*. UFRG, 1993.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, *NBR-6118 - Projetos de estruturas de concreto – Procedimento*. ABNT, 2003.
- Comitê Euro-International du Beton, *CEB-FIP model code 1990*. Thomas Telford, 1993.
- Goyal B.B, Jackson N., Slender concrete columns under sustained load. *Journal of the Structural Division - ASCE*, 97 (11): 2729-2750, 1971.
- Kwak H.G, Filippou F.C., *Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads*. Report no. UCB/SEMM-90/14. University of California, Berkeley, 1990.
- Pires S.L., *Análise de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando as não-linearidades física e geométrica*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.
- Simitses G.J., Hodges D.J., *Fundamentals of structural stability*. Elsevier, 2006.
- Seeger L.J., *Applied finite element analysis*, 2nd ed. John Wiley & Sons, 1984.
- Zienkiewicz O.C., *The finite element method*, 3rd ed. McGrawHill, 1980.