

CORRECCIÓN DE SUBDOMINIOS DE INTERPOLACIÓN USANDO UNA ESTRATEGIA HÍBRIDA, PARA LA APLICACIÓN DE MÉTODOS SIN MALLA.

Luis C. Pérez^a, Orlando M. Duran^b, Fernando A. Pérez^b

^a*Departamento de Ingeniería Mecánica, Aula UTFSM-CIMNE, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España 1680, Valparaíso, Chile, luis.perez@usm.cl, <http://www.mec.utfsm.cl>*

^b*Escuela de Ingeniería Mecánica, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Av. Los Carrera 1567, Quilpué, Chile, orlando.duran@ucv.cl, fernando.perez.j@mail.ucv.cl, <http://www.mecanica.ucv.cl>*

Palabras claves: Métodos sin malla, Método de Puntos Finitos, Algoritmos Genéticos, Subdominios de Interpolación.

Resumen. En el presente trabajo se describe una técnica que permite la generación de subdominios de interpolación, utilizando metaheurísticas poblacionales, para la implementación de métodos sin mallas en la resolución de ecuaciones diferenciales y problemas de elasticidad lineal en dos dimensiones. Se ha empleado una estrategia híbrida basada en un Algoritmo Genético (AG) desarrollado específicamente como una técnica de búsqueda y optimización. Este algoritmo emplea una población inicial basada en subdominios de interpolación creados por el método de mínima distancia, para la generación de nubes de puntos, necesarias para la resolución de problemas aplicando el método sin malla de Puntos Finitos (MPF). Los problemas abordados en este trabajo, muestran un correcto desempeño de la metodología propuesta, cuyos resultados se traducen en una disminución del error global, así como de la cantidad de puntos necesarios para conformar el dominio.

1 INTRODUCCIÓN

Los métodos sin malla o libres de malla comprenden un conjunto de nuevas técnicas numéricas que, a diferencia de los métodos tradicionales como el Método de Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz y Taylor, 2000) no requieren de una subdivisión del dominio en una malla. Estas técnicas han sido utilizadas ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales parciales a partir de distribuciones de puntos regulares o irregulares. Aspectos generales, clasificación, ventajas y desventajas de estos métodos pueden encontrarse en las referencias (Belytschko et al., 1996; Chen et al., 2006; Duarte y Oden, 1996; Fries y Matthies, 2003; Gu, 2005; Li y Liu, 2004; Liu, 2002; Oñate et al., 1996b).

El problema de generar subdominios de interpolación sobre dominios acotados unidimensionales (1D) y bidimensionales (2D) a partir de un conjunto de puntos aleatorios, se enmarca en el contexto de la programación matemática combinatoria y de gran dimensión. Por lo que la implementación de metaheurísticas poblacionales como lo son los *Algoritmos Genéticos* (AG) (Goldberg, 1989) los cuales se basan en los principios de la *selección natural* de Charles Darwin, estos se presenta como una alternativa válida de estudiar para abordar el problema de la generación de *nubes*, en la aplicación de métodos sin malla. La formación de *nubes* no es una tarea fácil considerando que generalmente los problemas abordados por los métodos sin malla, son resueltos sobre dominios discretizados en un gran número de puntos, de manera de obtener soluciones con el menor error global posible. De esta forma se puede evidenciar que la búsqueda de aquellos puntos asociados a cada una de las *nubes*, tiene una influencia directa sobre la calidad de la solución obtenida.

El objetivo principal de este trabajo es obtener y desarrollar una metodología basada en un *Algoritmo Genético* (AG), con el fin de seleccionar los puntos que conformaran cada uno de los subdominios de interpolación (*nubes*), de manera tal de mejorar la calidad de las soluciones encontradas por el *Método sin malla de Puntos Finitos* (MPF) en discretizaciones con poca cantidad de puntos y cuyos subdominios son generados a partir de métodos comúnmente empleados para este fin.

2 METODO DE PUNTOS FINITOS

El MPF fue propuesto por Oñate et al. (Oñate et al., 1996a; Oñate et al., 1996b) inicialmente, con el propósito de resolver problemas de transporte convectivo y fluidos. Posteriormente su aplicación se extendió a transporte difusivo advectivo (Oñate y Idelsohn, 1998) y fluidos incompresibles (Oñate et al., 2000). En el contexto de la mecánica de sólidos el MPF ha sido aplicado exitosamente en problemas de elasticidad (Martin, 2006; Oñate et al., 2001; Perazzo, 2002; Perazzo et al., 2006), dinámica de sólidos, refinamiento adaptativo (Angulo et al., 2009; Perazzo et al., 2007; Pérez-Pozo et al., 2009), y recientemente en comportamiento no-lineal de materiales (Pérez-Pozo y Perazzo, 2007; Pérez-Pozo et al., 2009;).

En el MPF, la aproximación local de la función incógnita $u(\mathbf{x})$ en el subdominio Ω_I o nube se construye de la siguiente forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cong \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{p}_k(\mathbf{x}) \alpha_k = \mathbf{P}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\alpha} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I, \quad I = 1, \dots, N \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_m]$ corresponde a un vector de parámetros constantes, es decir válidos únicamente en la nube Ω_I e independiente de las coordenadas espaciales de \mathbf{x} , mientras que $\mathbf{P}(\mathbf{x})^T = [p_1, \dots, p_k, \dots, p_m]$ corresponde a una base de interpolación formada generalmente por monomios. Tal como en una interpolación por mínimos cuadrados, la condición de que el número de puntos n en la *nube* sea mayor que el número de términos m

de la base de interpolación, impide que la aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$ se ajuste a todos los valores nodales $u(\mathbf{x}_j) = u_j^h$ con $j=1, \dots, n$. Para solventar esto se recurre a la minimización de la suma del error en cada punto, ponderado por una función fija, como

$$J_I = \sum_{j=1}^n \omega_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \left(u_j^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)^T \boldsymbol{\alpha} \right)^2 \tag{2}$$

cuya forma compacta matricial es

$$J_I = [\mathbf{U}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)\boldsymbol{\alpha}]^T \mathbf{W}_I [\mathbf{U}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)\boldsymbol{\alpha}] \tag{3}$$

donde

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^h = \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ u(\mathbf{x}_j) \\ \vdots \\ u(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} u_1^h \\ \vdots \\ u_j^h \\ \vdots \\ u_n^h \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad u(\mathbf{x}_j) = u_j^h \quad \forall j = 1, \dots, n \tag{4}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & \mathbf{p}_k(\mathbf{x}_k) & \cdots & \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_m) \\ \vdots & & \ddots & & \\ \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_j) & \cdots & \mathbf{p}_k(\mathbf{x}_j) & \cdots & \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_m) \\ \vdots & & & & \ddots \\ \mathbf{p}_1(\mathbf{x}_n) & \cdots & \mathbf{p}_k(\mathbf{x}_n) & \cdots & \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} \in \mathbf{mat}(n \times m) \tag{5}$$

$$\mathbf{W}_I = \begin{bmatrix} \omega_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \omega_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_I \in \mathbf{mat}(n \times n) \tag{6}$$

siendo $\omega_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$ la función de ponderación fija de Gauss (Oñate et al., 1996a; Oñate et al., 1996b), dada por

$$\omega_I(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_j}{c}\right)} - e^{-\left(\frac{r}{c}\right)}}{1 - e^{-\left(\frac{r}{c}\right)}} & \text{si } d_j \leq r \\ 0 & \text{si } d_j > r \end{cases} \tag{7}$$

con $d_j = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\|$, $r = q \max \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\| \quad \forall j = 1, \dots, n \in \Omega_I$ y $c = \beta \cdot r$. El soporte de esta función es isotrópico, circular y esférico en dos y tres dimensiones respectivamente. Una descripción detallada de los efectos de los parámetros q y β junto con algunos comentarios

para su elección se presenta en (Ortega et al., 2007). La minimización estándar del funcional J_I , ec.2, respecto del vector permite obtener

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \mathbf{U}^h \quad (8)$$

siendo $\mathbf{A}_I = \mathbf{A}_I(\mathbf{x}_I)$ (matriz de momentos) y $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}_I(\mathbf{x}_I)$

$$[\mathbf{A}_I]_{m \times m} = [\mathbf{P}^T(\mathbf{x})]_{m \times n} [\mathbf{W}_I]_{n \times n} [\mathbf{P}(\mathbf{x})]_{n \times m} \quad (9)$$

$$[A_I]_{ij} = \sum_{k=1}^n p_i(\mathbf{x}_k) \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) \quad i, j = 1, \dots, m \quad (10)$$

$$[\mathbf{B}_I]_{m \times n} = [\mathbf{P}^T(\mathbf{x})]_{m \times n} [\mathbf{W}_I]_{n \times n} \quad (11)$$

$$[B_I]_{ij} = p_i(\mathbf{x}_j) \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

La aproximación final en el MPF se consigue reemplazando la expresión ec.7 en la ec.1, con lo que se obtiene

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})^T \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \mathbf{U}^h \quad (13)$$

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} u_i^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (14)$$

siendo las funciones de forma

$$\phi_i^j(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})^T \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

Si en ec. 2 se elige una función de ponderación igual a la unidad, se obtiene una aproximación por mínimos cuadrados estándar. Se debe notar, de acuerdo con la expresión ec.1, que la aproximación se define para cada subdominio de interpolación Ω_I . En consecuencia, un punto i que pertenezca a dos nubes Ω_I y Ω_J respectivamente, y entre las cuales exista cierto traslape, tendrá asociadas diferentes funciones de forma según si se adscribe a una u otra nube, lo que significa $\phi_i^j(\mathbf{x}) \neq \phi_j^i(\mathbf{x})$. De esta forma la aproximación resulta ahora multivaluada en el punto i , por lo que se debe implementar una metodología que permita la elección de un único valor. En el MPF este problema se resuelve utilizando el procedimiento de *colocación puntual* (Oñate et al., 1996a; Oñate et al., 1996b; Oñate, 1996).

3 ALGORITMOS GENÉTICOS

Los Algoritmos Genéticos son métodos evolutivos que pueden utilizarse para resolver problemas de búsqueda y optimización (Goldberg, 1989; Holland, 1975). Están basados en el proceso genético que realizan los seres vivos, en el cual a lo largo de las generaciones, las poblaciones evolucionan en la naturaleza de acuerdo a los principios de la selección natural y supervivencia de los más fuertes. Por medio de la imitación de este proceso, los Algoritmos Genéticos son capaces de ir creando soluciones para el mundo real. El poder de los Algoritmos Genéticos, proviene del hecho de que se trata de una técnica robusta, y puede tratar con éxito una gran variedad de problemas, proveniente de diferentes áreas, incluyendo aquellos en los que otros métodos encuentran dificultades.

El proceso comienza generando un conjunto de soluciones al problema de manera aleatoria, cada una de estas soluciones se codifica de manera tal de que cada una de estas

soluciones representa un punto del dominio del problema a resolver. La transformación de los individuos se lleva a cabo mediante una serie de operadores genéticos. Previamente se escoge a los individuos que participarán de la modificación producida por los operadores genéticos. Mediante la aplicación de estos operadores sobre el conjunto de soluciones seleccionadas, es posible obtener nuevos individuos que hereden las características de sus predecesores. Para que un algoritmo pueda ser aplicado a la resolución de un problema de optimización, es necesario determinar un método de codificación de las posibles soluciones sobre las cuales trabajará el algoritmo genético. Podemos considerar tres tipos básicos de representaciones, representaciones de tipo real, entera y binaria (Fogel L. y Fogel D., 1994).



Figura 1: Representación del cromosoma. a) Representación binaria b) Representación entera

Para poder evolucionar a poblaciones cada vez más adaptadas es necesario conocer el grado de aptitud de los individuos, es decir, tiene que poderse evaluar cada individuo y ser comparado con el resto de la población. El mecanismo de selección posterior dependerá de la medición de la aptitud de los individuos, por lo que se utiliza una *función fitness* (Coello, 2008). La función fitness corresponde a una función evaluadora de la calidad de un determinado individuo como solución a un problema. Permite que los individuos de la población puedan ser ordenados en cuanto a la calidad de los mismos. Se utiliza a su vez una *función evaluación*, que representa en sí el objetivo del problema planteado (Coello, 2008).

Una parte fundamental del funcionamiento de los algoritmos genéticos, lo representa la selección de los candidatos que pasarán a la etapa de reproducción. El proceso de *selección* suele ser de tipo probabilístico. Dentro de las técnicas de selección empleadas más comúnmente se encuentran la selección por *ruleta*, *jerárquica*, por *torneo* y de *estado uniforme* (Goldberg, 1989; Whitley, 1989). El proceso de selección por sí solo no introduce específicamente variabilidad genética en la población de la siguiente generación, sino que más bien hace aumentar la presencia de los individuos mejor dotados. La tarea de combinación de información de diferentes individuos es realizada en los Algoritmos Genéticos por el *operador de cruce* (Coello, 2008; Fogel L. y Fogel D., 1994), mientras que la variación aleatoria de esta, es realizada por el *operador de mutación* (Coello, 2008; Fogel L. y Fogel D., 1994). El proceso de selección combinado con el operador de cruce permite la transmisión de la información de aquellos *genotipos* que han logrado expresarse en *fenotipos* exitosos.

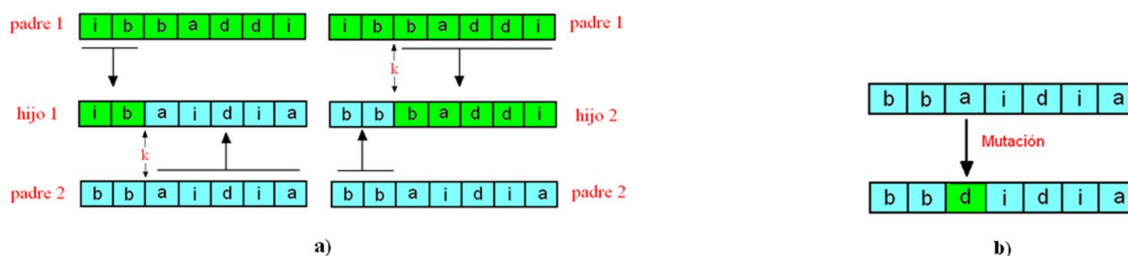


Figura 2: Operadores genéticos. a) Cruza monopunto b) Mutación

4 IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGIA PROPUESTA

El dominio sobre el cual se representará la solución del problema, será discretizado en un número N de puntos, los cuales serán enumerados correlativamente de manera de asociar a

cada punto del dominio Ω un número representativo. Cada una de las nubes Ω_I asociadas a un determinado nodo estrella e_I , estará conformada por un total de n nodos, fig. 3a, tal que:

$$\begin{aligned} \Omega(e_I) = \Omega_I &= \{e_I, q_2^I, \dots, q_j^I, \dots, q_n^I\} \\ e_I \in \Omega; \quad J &= 2 \dots n; \quad I = 1 \dots N \\ n = \text{card}(\Omega_I); \quad n &\ll N \end{aligned} \tag{16}$$

donde q_j^I representa cada uno de los $n - 1$ restantes que conforman la nube Ω_I .

4.1 Representación de la población

En el presente trabajo e_I representa el nodo estrella asociado a la nube Ω_I , tal que $e_I \equiv q_1^I$. De esta manera se representa el conjunto total de subdominios conformados por n puntos como una matriz de $N \times n$, fig. 3b, en la cual cada una de las filas representa los elementos que conforman una nube en particular, siendo el primer elemento de cada fila el nodo estrella e_I asociado a cada nube.

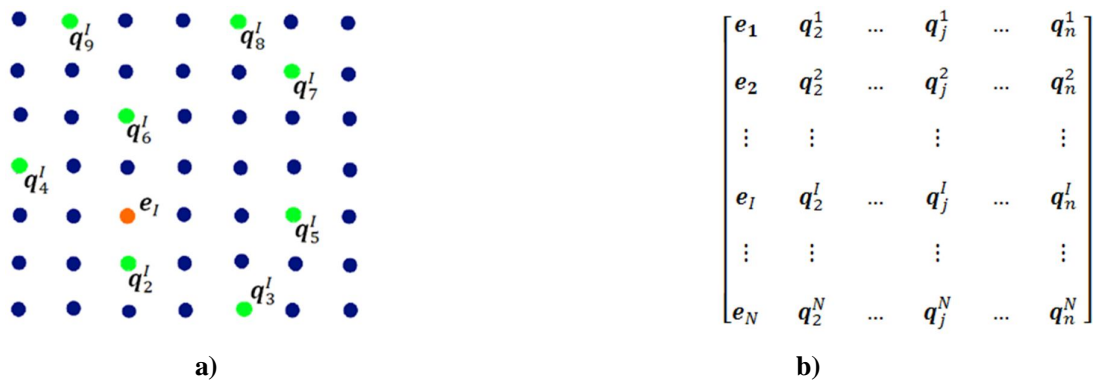


Figura 3: a) Nube asociada al nodo e_I . b) Matriz de puntos asociados al dominio Ω

De esta forma, el cromosoma que representa el genotipo de la solución estará conformado por una cadena de valores enteros, cuyos valores están acotados al intervalo $[1, N]$, fig. 4, mientras que su largo esta dado por la cantidad de puntos que conforman el dominio (N) y cada una de las nubes (n). El ensamble del cromosoma se realizará a partir del conjunto de puntos que acompaña a cada uno de los nodos estrella, fig. 5.

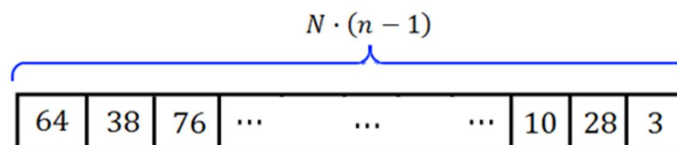


Figura 4: Estructura del cromosoma.

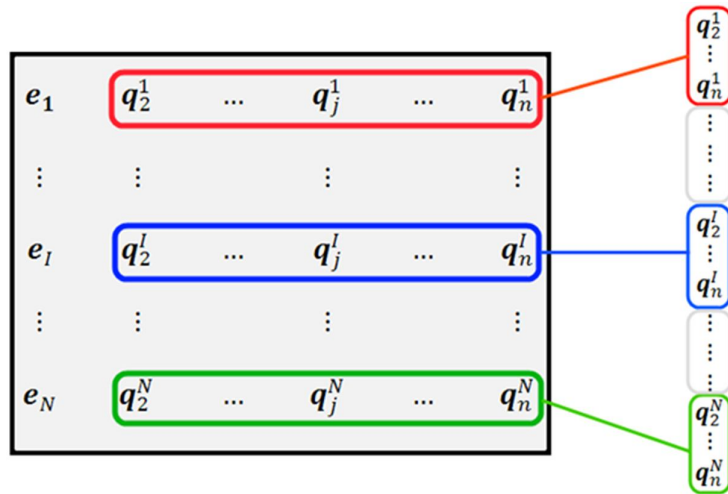


Figura 5: Ensamble del cromosoma a partir de la matriz de puntos.

4.2 Generación de la población inicial

La iniciación de la población corresponde al proceso por el cual se obtienen los individuos que formarán parte de la primera generación. Para fomentar la diversidad en la población inicial, el algoritmo se inicia con un conjunto Q de individuos generados aleatoriamente.

4.3 Función objetivo

El algoritmo genético planteado, tiene por finalidad la búsqueda de aquellos puntos que conformarán cada una de las nubes Ω_I , de forma tal de minimizar el error global de la solución asociada a cada configuración de puntos. Para implementar tal objetivo se utilizará como medida del error global la *norma* L_2 , definida como:

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N (u_I - \hat{u}_I)^2}{\sum_{I=1}^N (u_I)^2}} \quad (17)$$

siendo u_I , \hat{u}_I la solución exacta y aproximada respectivamente de la función $u(\mathbf{x})$ en el punto I del dominio Ω , el cual se discretiza mediante un número finito de N puntos. Finalmente se define la función objetivo $F.O$, como:

$$F.O : \min\{L_2\} \quad (18)$$

4.4 Función de aptitud.

La aptitud de cada individuo estará dada por:

$$(Aptitud)_i = \frac{1}{(L_2)_i} \quad i = 1, \dots, Q \quad (19)$$

donde $(L_2)_i$ y Q representa la norma del error de cada uno de los individuos y la población total de individuos de la generación, respectivamente.

4.5. Selección.

En el proceso de selección se determina el número de veces que un individuo es elegido para reproducirse. Los individuos seleccionados para el proceso de reproducción se denominan *padres*. Para esto se ha optado por la implementación de la selección por *torneo* (Coello, 2008).

4.6. Operadores Genéticos.

En el algoritmo desarrollado se ha implementado un operador de tipo “cruza de dos puntos”. Posteriormente al proceso de cruce se aplica el operador de mutación sobre la población, más específicamente sobre los alelos de alguno de los individuos. Ambos operadores actúan aleatoriamente, basados en una probabilidad de cruce P_c y en una probabilidad de mutación P_m , respectivamente.

4.7. Manejo de restricciones e individuos no factibles.

Debido a la implementación de una codificación de tipo entera y a la aplicación de operadores de cruce y mutación sobre la población, se pueden producir individuos infactibles. Se considera que un individuo no es factible si luego de la decodificación de su genotipo al fenotipo correspondiente, algunas de las nubes que componen la solución presentan algún nodo repetido, por lo cual deben ser reparadas (Pérez, 2010). Para reparar una nube, se procede a reemplazar uno de los nodos repetidos, por un nodo que no pertenezca a la nube generada.

4.8. Clonación.

Dada la aplicación de los operadores de mutación y cruce sobre la población resultante del proceso de selección, no es posible garantizar que los mejores individuos pasen a formar parte de la siguiente generación, por lo que se producirá una pérdida de las características deseables que poseen aquellos individuos más aptos. Para evitar esta pérdida de *información genética*, se implementó el uso de una estrategia elitista denominada *clonación* (Pérez, 2010), la cual consiste en clonar (copiar) el individuo más apto de la población. La clonación se realiza, si se cumple la siguiente condición:

“Si la aptitud del individuo de elite de la generación \tilde{n} presenta una mejor aptitud que el individuo elite de la generación $\tilde{n}+1$, se realiza la clonación. En caso contrario la clonación no se realiza.”

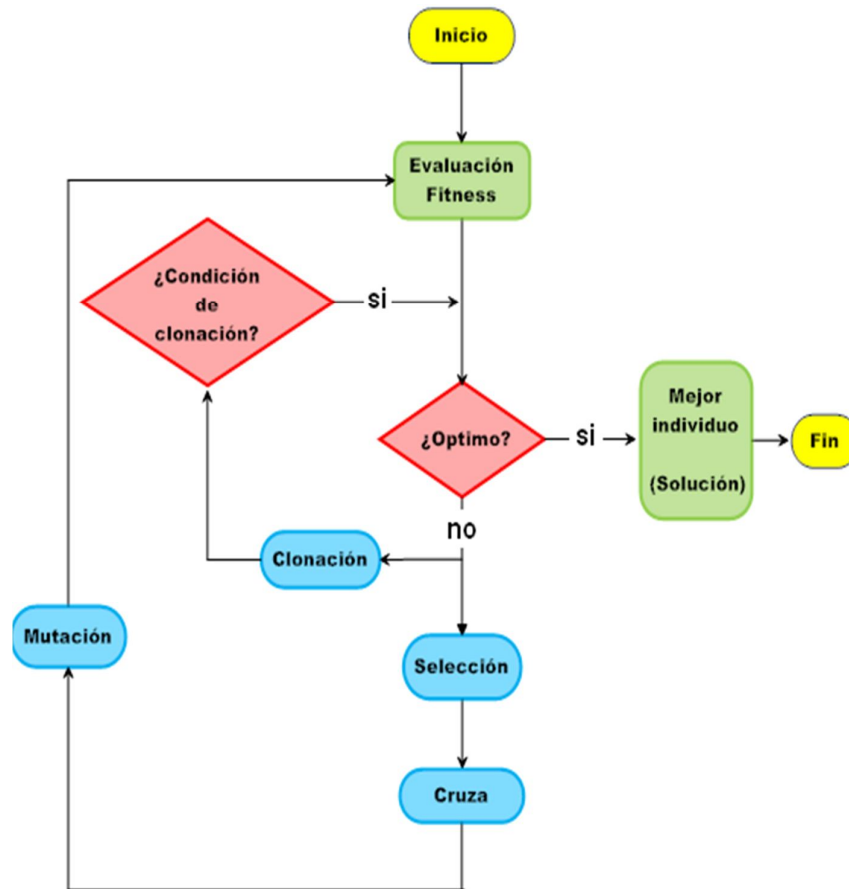


Figura 6: Esquema del Algoritmo Genético propuesto

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Los problemas seleccionados corresponden a problemas del tipo unidimensional (1D) y bidimensional (2D), los cuales permitieron estudiar la capacidad de la metodología propuesta en este trabajo para generar subdominios de interpolación. De manera de evaluar el error relativo de las soluciones encontradas \hat{u}_I , se define como el error relativo porcentual $e_r(\%)$:

$$e_r(\%) = \begin{cases} \frac{|u_I - \hat{u}_I|}{|u_I|} \cdot 100 & |u_I| \geq 10^{-8} \\ \frac{|u_I - \hat{u}_I|}{|u_I|_{max}} \cdot 100 & |u_I| < 10^{-8} \end{cases} \quad (20)$$

5.1 Ecuación de Poisson 1D

La ecuación de Poisson estudiada (Park et al., 2003), está dada por la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (40000x^2 - 200)e^{-100x^2} - 6x & -1 \leq x \leq 1 \\ u(x) &= 2 + e^{-100} & x = -1 \\ u(x) &= e^{-100} & x = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Siendo su solución exacta:

$$u_t(x) = 1 - x^3 + e^{-100x^2} \quad (22)$$

Nº de puntos del dominio	15	20	25
$L_2(AG)$	0,2733	0,0321	0,0453
$L_2(MPF)$	1,3233	0,0462	0,0286
$e_r(\%) \max$	81,1	8,75	13,96
<i>tiempo</i> [s]	7,47	631,2	732,7
<i>Pm</i> (%)	0,6	0,8	1
<i>Pc</i> (%)	100	100	100
<i>Nº de generaciones</i>	22	700	700
<i>Q</i>	50	100	100

Tabla 1: Principales resultados ecuación de Poisson 1D

Las fig. 7 y fig. 8, muestran la débil convergencia del MPF y el AG para discretizaciones de 15 y 20 puntos respectivamente, lo cual se explica por el hecho de utilizar en la discretización del dominio una cantidad pequeña de puntos. A pesar de la baja convergencia obtenida por ambos métodos, se puede apreciar un mejor desempeño del AG frente a la aproximación por el MPF, lo cual se refleja en un menor valor del error absoluto y una distribución más uniforme de este parámetro. Para una discretización de 25 puntos, fig. 9, se tiene una mejora en la convergencia de la solución obtenida por ambos métodos siendo el MPF el que presenta mejores resultados con menores valores del error relativo y del error global. Los resultados numéricos obtenidos, ver tabla 1, permiten inferir una disminución en la calidad de la aproximación realizada por el AG al aumentar la cantidad de puntos en los cuales se discretiza el dominio.

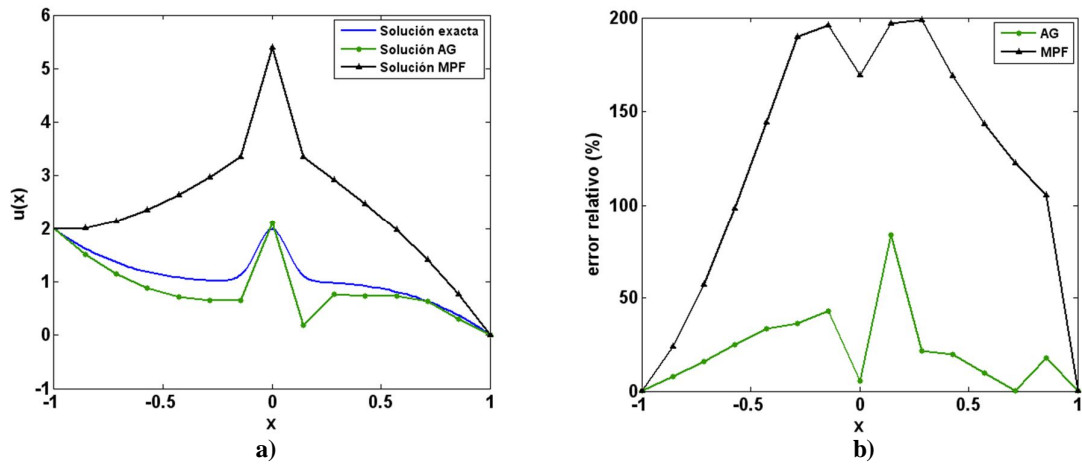


Figura 7: a) Convergencia de la solución para la ecuación de Poisson 1D b) Convergencia del error relativo, para $n=15$ pts.

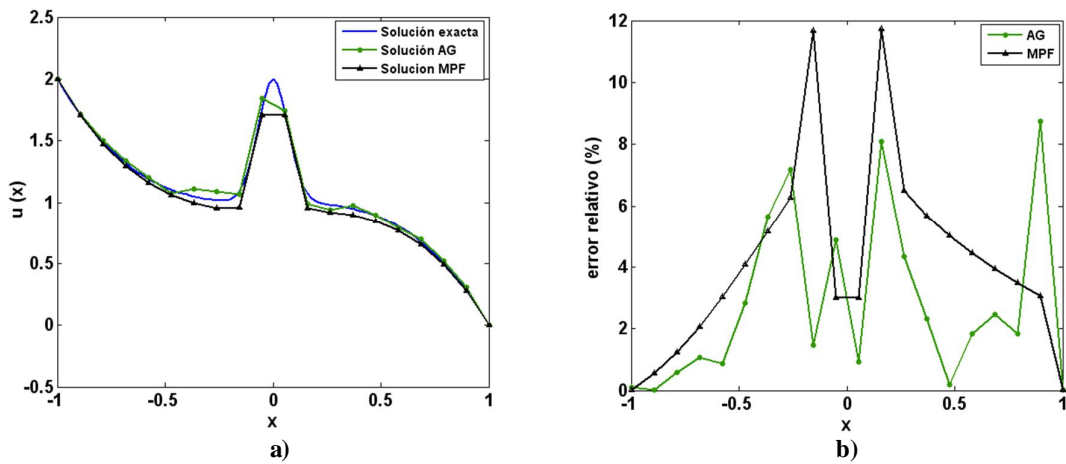


Figura 8: a) Convergencia de la solución para la ecuación de Poisson 1D b) Convergencia del error relativo, para $n=20$ pts.

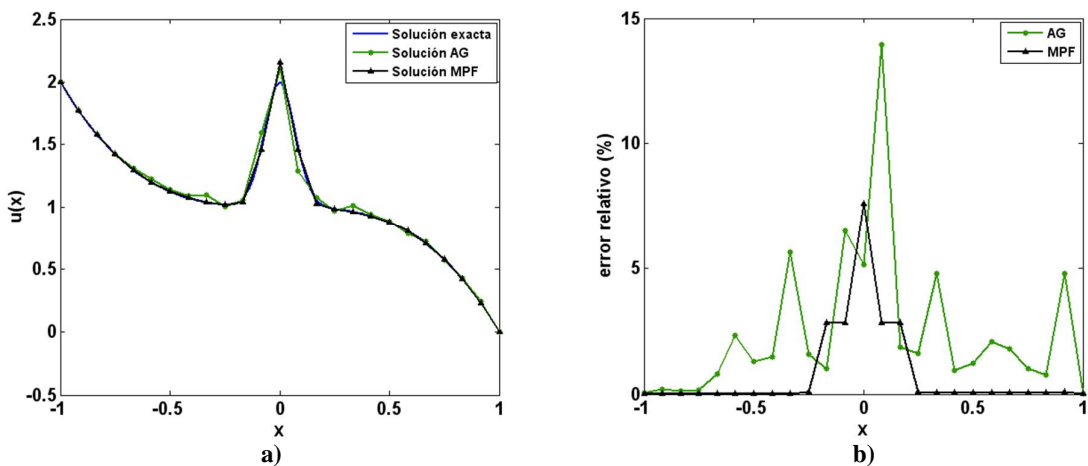


Figura 9: a) Convergencia de la solución para la ecuación de Poisson 1D b) Convergencia del error absoluto, para $n=25$ pts.

5.2 Viga simplemente apoyada con carga distribuida uniformemente

El problema consiste en una placa rectangular de espesor unitario, simplemente apoyada en sus extremos y sometida a una carga q distribuida uniformemente en su borde superior, bajo condiciones de tensión plana, fig. 10.

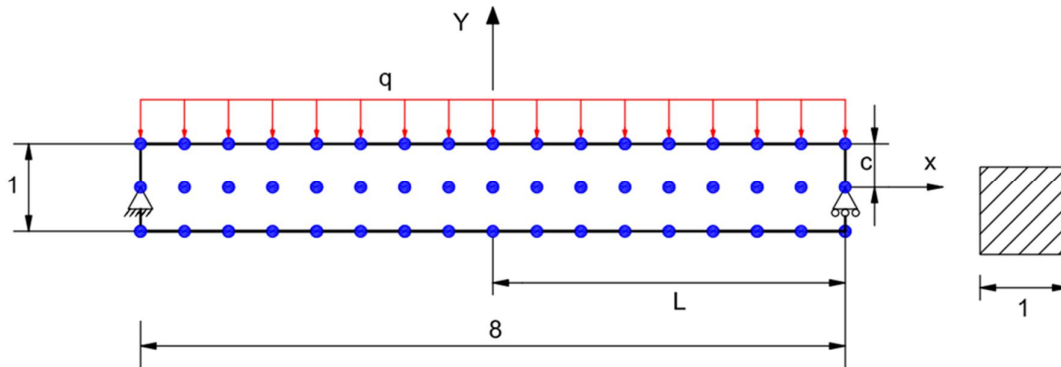


Figura 10: Viga simplemente apoyada, geometría y distribución regular de 51 puntos.

La solución analítica para este problema es entregada en (Timoshenko y Goodier, 1970). Se emplearán para la solución de este problema, los siguientes parámetros:

$$q = 50 \left[\frac{kp}{cm^2} \right], \quad L = 4[cm], \quad C = 0.5[cm], \quad E = 2.1 \cdot 10^6 \left[\frac{kp}{cm^2} \right], \quad \nu = 0.25$$

La geometría de la barra se discretizó con $N=165$ puntos distribuidos regularmente. Para medir el error global entre la solución analítica y la solución numérica, al igual que los ejemplos tratados anteriormente, pero en este caso, la norma L_2 se redefinirá en función de los desplazamientos, tal que:

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N [(u_I - \hat{u}_I)^2 + (v_I - \hat{v}_I)^2]}{\sum_{I=1}^N [u_I^2 + v_I^2]}} \quad (23)$$

Para este nuevo caso se implementó el AG propuesto, modificando el procedimiento de generación de la población inicial basado en una generación de tipo aleatoria, por una generación basada en individuos cuyos fenotipos representan nubes creadas de acuerdo al criterio de mínima distancia (Perazzo, 2002). Una vez generada esta nueva población se procede a la aplicación del operador de mutación, esto con el fin de evitar el estancamiento del AG, para luego una vez que la población inicial comienza a ser procesada bajo el esquema propuesto anteriormente, se considera $Pm=0,2\%$.

La solución entregada por el AG, para los desplazamientos en el borde superior de la viga, presenta una clara disminución del error relativo $e_r(\%)$, tanto para los desplazamientos horizontales como verticales, fig. 11. En general la solución encontrada presenta una clara convergencia hacia la solución exacta para distintas secciones de la viga, fig. 12 y fig. 13. Para los esfuerzos de compresión en el borde inferior de la viga, fig. 14, se tiene una clara convergencia de la solución entregada por el AG, siendo el $e_r(\%)$ máximo, inferior al 5%.

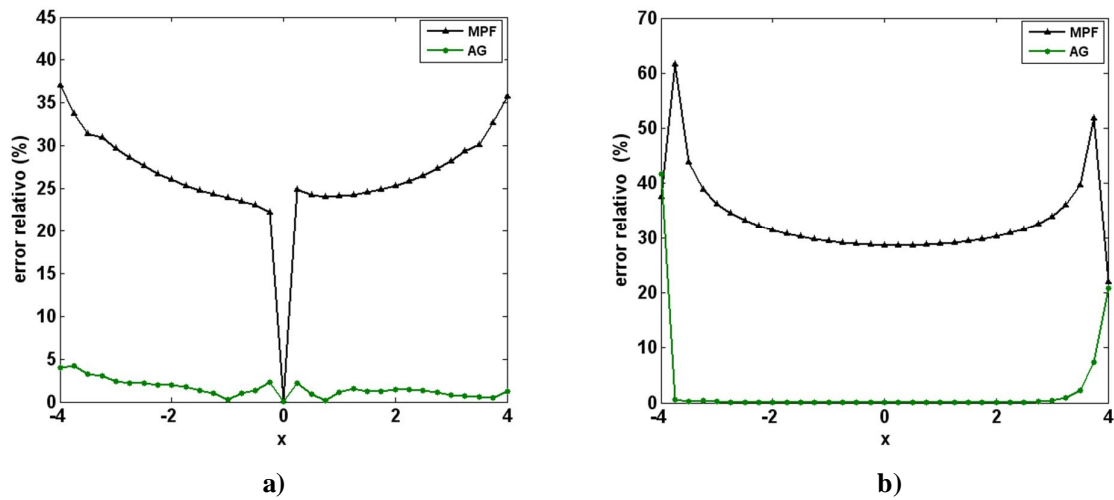


Figura 11: Error relativo. Viga simplemente apoyada con carga distribuida, $n=165$ Desplazamientos en el borde superior $y=0.5$. a) Desplazamientos horizontales b) Desplazamientos verticales.

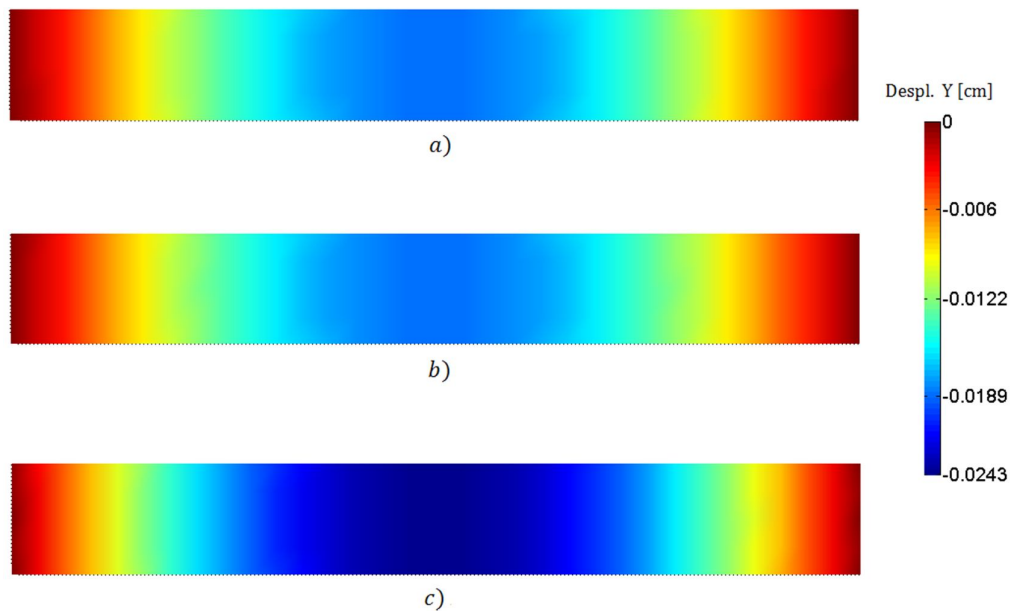


Figura 12: Desplazamientos verticales. Viga simplemente apoyada con carga distribuida uniforme, para $n=165$ puntos. a) Solución exacta b) AG c) MPF.

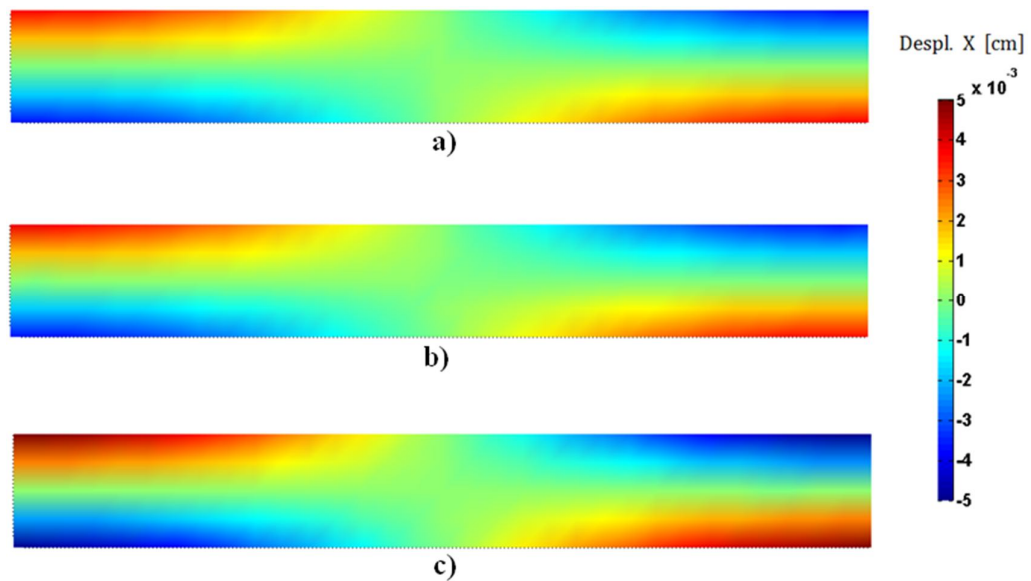


Figura 13: Desplazamientos horizontales. Viga simplemente apoyada con carga distribuida uniforme, para $n=165$ puntos. a) Solución exacta b) AG c) MPF

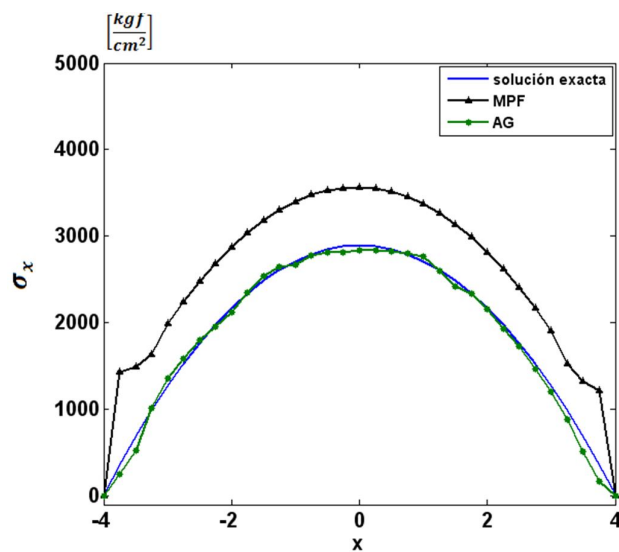


Figura 14: Error relativo. Viga simplemente apoyada con carga distribuida uniforme, para $n=165$ puntos. Esfuerzos σ_x en el borde inferior $y = -0.5$.

6. Conclusiones

Se ha presentado una metodología basada en un Algoritmo Genético, para la generación de subdominios de interpolación para la aplicación de métodos sin malla. Se han definido de forma global, las características que debe poseer un AG de manera de representar en forma eficiente el problema de la generación de nubes, sobre dominios discretizados regularmente en 1D y 2D.

En términos generales, la estrategia desarrollada ha presentado un buen comportamiento en la solución de los problemas abordados, esto a la luz de los positivos resultados obtenidos, basados en el análisis del error relativo y global de las soluciones encontradas.

La técnica implementada a permitido mejorar la calidad de las soluciones, en especial en aquellas zonas en donde se imponen las condiciones de tipo *Neumann* y *Dirichlet*.

Queda de manifiesto la importancia de un buen mecanismo generador de nubes, de manera de mejorar la calidad de las soluciones encontradas por los métodos sin malla, en especial el MPF.

Agradecimientos

Los autores agradecen el auspicio de la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del proyecto de investigación USM-251014 y al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y su red de Aulas CIMNE.

REFERENCIAS

- Angulo A., Pérez-Pozo L., and Perazzo F. A posteriori error estimator and an adaptive technique in meshless finite point method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:1322–1338, 2009.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996.
- Chen Y., Lee J., and Eskandarian A. *Meshless methods in solids mechanics*. Springer, New York, 2006.
- Coello C.; *Introducción a la computación evolutiva*. Apuntes de curso, CINVESTAV –IPN, Departamento de computación, México, 2008.
- Diego-Mas J.; *Optimización de la distribución en planta de instalaciones industriales mediante algoritmos genéticos. Aportación al control de la geometría de actividades*. Tesis Doctoral, Universidad Politecnica de Valencia, España, 2006.
- Duarte C. and Oden J. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262, 1996.
- Fogel L. & Fogel D.; *Evolutionary computation*. IEEE Transactions on neural networks, Vol. 5, 1-2, 1994.
- Fries T. and Matthies H. Clasification and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical University of Braunschweig*, 2003.
- Goldberg D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- Gu Y. Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 4:477–515, 2005.
- Holland J.; *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- Li S. and Liu W. *Meshfree particle methods*. Springer, Berlin, 2004.
- Liu G. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC press, USA, 2002.

- Martin A. *Análisis y formulación de un estimador del error en el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile, 2006. Trabajo de Título.
- Ortega E., Oñate E., and Idelsohn S. An improved finite point method for three-dimensional potential flows. *Computational Mechanics*, 40:949–963, 2007.
- Oñate E. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81, 1996.
- Oñate E. and Idelsohn S. A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 21:283–292, 1998.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., Taylor R., and Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346, 1996a.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., and Taylor R. A finite point methods in computational mechanics, *aplication to convective transport and fluid flow*. volume 39, pages 3839–3866. 1996b.
- Oñate E., Perazzo F., and J.Miquel. A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163, 2001.
- Oñate E., Sacco C., and Idelsohn S. A finite point method for incompressible flow problems. *Computer Visual Science*, 3:67–75, 2000.
- Park S., Kwon K., and Youn S. A posteriori error estimates and an adaptive scheme of least-square meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1213–1250, 2003.
- Perazzo F. *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona España, 2002. Tesis Doctoral.
- Perazzo F., Lohner R., and Perez-Pozo L. Adaptive methodology for meshless finite point method. *Advances in Engineering Software*, 22:153–168, 2007.
- Perazzo F., Oller S., Miquel J., and Oñate E. Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168, 2006.
- Pérez F. *Generación de subdominios de interpolación usando algoritmos genéticos para la aplicación de métodos sin malla*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso Chile, 2010. Trabajo de Título.
- Pérez-Pozo L. and Perazzo F. Non-linear material behaviour analysis using meshless finite point method. In *2nd ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, pag. 251–268. Porto, Portugal, 2007.
- Pérez-Pozo L., Perazzo F., and Angulo A. A meshless fpm model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Pérez-Pozo L., Duran O., Perazzo F. Una metodología adaptativa mediante algoritmos genéticos aplicada al método sin malla de puntos finitos. *Mecánica Computacional*, 18: 1119–1129, 2009
- Timoshenko S. and Goodier J.; *Teoría de la elasticidad*. 2ª edición en español, Urmo, 1970.
- Whitley D.; *The GENITOR Algorithm and Selection Pressure: Why Rank-Based Allocation of Reproductive Trials is Best*. Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, 116–121. Morgan Kaufmann Publishers, California, 1989.
- Zienkiewicz O. and Taylor R. *El método de los elementos finitos*, volumen 1. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona España, 2000.