

## UM MÉTODO HÍBRIDO DE OTIMIZAÇÃO APLICADO À AVALIAÇÃO NÃO-DESTRUTIVA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO POR MEIO DA TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA

Franciane Conceição Peters<sup>a</sup>, Luis Paulo da Silva Barra<sup>b</sup> e Afonso Celso de Castro Lemonge<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Programa de Engenharia Civil, COPPE / Universidade Federal do Rio de Janeiro, CP 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro - RJ - Brasil, franciane.peters@engenharia.ufff.br, <http://www.coc.uffrj.br>

<sup>b</sup>Mestrado em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Campus Universitário, CEP 36036-330, Juiz de Fora - MG - Brasil, luis.barra@ufff.edu.br, afonso.lemonge@ufff.edu.br, <http://www.mmc.ufff.br>

**Palavras Chave:** Problemas Inversos, Otimização, Método de Levenberg-Marquardt, Algoritmos Genéticos.

**Resumo.** A Tomografia por Impedância Elétrica é uma técnica que busca reconstruir uma imagem que represente a distribuição de condutividades no interior do domínio condutor a partir da injeção de corrente elétrica e medidas de potencial apenas no contorno externo deste corpo. Entre suas principais aplicações destacam-se investigações geofísicas, monitoramento de atividades industriais e aplicações clínicas. Esta técnica de reconstrução de imagem é um problema inverso e não-linear que pode ser resolvido como um problema de otimização no qual busca-se encontrar a distribuição de condutividades que minimiza a função objetivo, dada pela diferença entre potenciais elétricos calculados para esta distribuição de condutividades e potenciais medidos. No presente trabalho, considera-se um domínio condutor bidimensional, correspondente à seção transversal de uma estrutura de concreto armado, no qual busca-se identificar a posição e tamanho de inclusões referentes às barras de aço. Para tanto, utiliza-se uma estratégia de parametrização para a distribuição de condutividades que consiste na aproximação dos contornos das inclusões por circunferências, sendo o número de barras, suas posições e seus raios os parâmetros utilizados como variáveis de otimização. Deste modo, o número desconhecido de inclusões demanda uma estratégia capaz de resolver problemas com variáveis inteiras. Assim, um método híbrido que explora as vantagens dos Algoritmos Genéticos (AGs) e do Método de Levenberg-Marquardt (MLM) é proposto. Embora AGs demandem um grande número de avaliações da função objetivo para atingir o mínimo, a convergência para mínimos locais pode ser evitada. Por outro lado, como utiliza as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de otimização, o MLM é mais rápido e converge para a solução desejada caso tenha uma boa aproximação inicial. Neste trabalho, apresenta-se uma estratégia de hibridização na qual o MLM é utilizado como um dos operadores do AG, além dos operadores usuais de cruzamento e mutação. Neste caso, o indivíduo sorteado é fornecido ao MLM, que minimiza o resíduo gerando uma nova aproximação que é passada ao AG como um novo indivíduo. Os experimentos numéricos apresentados neste trabalho, comprovam a eficácia da estratégia proposta para o solução do problema inverso em questão e compara o desempenho do AG com o da estratégia híbrida, mostrando quanto o acoplamento do MLM com o AG melhora sua convergência.

## 1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, considera-se uma aplicação da Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) (Brown et al., 1985; Borcea, 2002) como uma técnica não-destrutiva de avaliação de estruturas de concreto armado (Karhunen et al., 2009). Nesta técnica, injeta-se corrente elétrica entre eletrodos fixados no contorno externo da estrutura e os valores do potencial elétrico gerado são medidos nos demais eletrodos. Estas medidas são utilizadas em um processo iterativo de reconstrução da imagem da distribuição de condutividades dentro da estrutura. Tal processo consiste na minimização do erro entre os potenciais elétricos medidos e os calculados através da solução de um modelo computacional do problema físico, o que é conhecido como problema direto. Este problema de minimização é um problema inverso não-linear, uma vez que existe uma dependência não-linear entre as medidas de potencial e a distribuição de condutividade no interior do corpo.

Uma abordagem usual de solução utiliza o Método dos Elementos Finitos para resolver o problema direto. Neste caso, os valores da condutividade nos elementos são utilizados como parâmetros de otimização. Para que soluções aceitáveis sejam obtidas com esta estratégia, isto é, suaves distribuições de condutividade, é necessária a aplicação de técnicas de regularização. Além disso, técnicas de limiarização são necessárias para que as bordas das inclusões sejam identificadas, o que introduz outras aproximações.

Neste trabalho, uma estratégia diferente é utilizada. O problema direto é resolvido pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), as barras de aço da estrutura são tratadas como inclusões de condutividade infinita e as variáveis de otimização são os parâmetros que definem suas posições e forma geométrica. Uma vez que o objetivo do trabalho é identificar a posição e o tamanho de um número desconhecido de barras de aço em uma seção da estrutura de concreto, o número de variáveis é, a princípio, desconhecido. Tal fato justifica a escolha de uma estratégia híbrida de otimização, similar à proposta por Hsiao et al. (2001).

A estratégia híbrida aqui utilizada consiste de um Algoritmo Genético (AG) (Eiben e Smith, 2003; Michalewicz, 1996; Goldberg e Samtani, 1986) que, além dos operadores usuais de cruzamento e mutação, utiliza o Método de Levenberg-Marquardt (MLM) (Dennis e Schnabel, 1996; Fletcher, 1980) como um operador para gerar um novo indivíduo. No AG, as variáveis de otimização são o número de inclusões e a posição e raio de cada uma delas. Quando um indivíduo é selecionado para passar pelo operador baseado no MLM, este é dado como aproximação inicial ao método, que após minimização da função objetivo, retorna sua solução como um novo indivíduo para a população. Note que, nesta minimização, o número de inclusões é pré-definido pelo indivíduo genitor, isto é, no MLM, o número de variáveis de otimização é conhecido.

Embora os AGs demandem um grande número de avaliações da função objetivo para que o mínimo seja atingido, a convergência para um mínimo local pode ser evitada. Por outro lado, métodos como o de Levenberg-Marquardt, que utiliza a informação da derivada da função objetivo em relação aos parâmetros de otimização, apresentam velocidade de convergência maior, além de convergirem para a solução esperada quando uma aproximação inicial adequada é fornecida. Portanto, o objetivo da estratégia híbrida é explorar as vantagens de ambos os métodos.

## 2 PROBLEMA INVERSO

O problema inverso consiste na identificação do tamanho e posição de um número desconhecido de barras de aço em uma seção de concreto armado. Tal identificação é feita a partir de medidas de potencial elétrico em eletrodos dispostos no contorno externo da estrutura, gerado

pela injeção de corrente elétrica segundo um protocolo previamente estabelecido.

Uma vez que assume-se que as inclusões são homogêneas e suas formas são conhecidas, as interfaces entre o concreto e as barras de aço podem ser definidas por meio de um conjunto de parâmetros geométricos. Cada inclusão é considerada circular e seu contorno é determinado pelo seu raio ( $r$ ) e posição de seu centro ( $x_c, y_c$ ). Assim, o problema recai em encontrar o conjunto de parâmetros geométricos ( $\mathbf{X}$ ) que defina a distribuição de condutividade que minimiza a diferença entre os valores medidos de potencial elétrico  $\bar{\mathbf{V}}$  e os valores calculados  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ . Matematicamente, pode-se escrever:

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}), \quad (1)$$

com

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{X})^T \mathbf{R}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{V}} \quad (2)$$

sendo  $f(\mathbf{X})$  a função objetivo e  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  a função resíduo. O número de medidas ( $m$ ) no vetor  $\bar{\mathbf{V}}$  depende do protocolo escolhido para injeção de corrente elétrica e medição de potencial. Neste trabalho, utiliza-se um dos protocolos mais relatados na literatura, o protocolo diametral. Neste, os 8 casos de injeção de corrente elétrica, Tabela 1, geram 104 medidas de potencial, considerando um dispositivo com 16 eletrodos. A escolha deste protocolo foi baseada nos trabalhos de [Stephenson et al. \(2008\)](#) e [Peters e Barra \(2010\)](#), entre outros.

Tabela 1: Protocolo diametral de injeção de corrente elétrica.

Caso	Eletrodos de Injeção	Eletrodo de Potencial Nulo	Caso	Eletrodos de Injeção	Eletrodo de Potencial Nulo
1	1 e 9	5	5	5 e 13	9
2	2 e 10	6	6	6 e 14	10
3	3 e 11	7	7	7 e 15	11
4	4 e 12	8	8	8 e 16	12

Em trabalhos anteriores ([Peters et al., 2009](#); [Peters e Barra, 2010](#)), assumia-se conhecido o número de inclusões. Neste caso, o número de variáveis de otimização ( $n$ ) é previamente determinado e o problema de minimização descrito pela Eq. (1) poderia ser resolvido por um método clássico para solução de problemas de mínimos quadrados não-lineares, como o método de Levenberg-Marquardt (MLM). Entretanto, no problema aqui tratado, o número de inclusões é considerado desconhecido. Assim, uma estratégia híbrida, que combina as características de um AG e do MLM, é proposta.

Tal estratégia consiste de um AG que utiliza o MLM como um operador para gerar um novo indivíduo, além de seus operadores usuais de cruzamento e mutação. Quando o AG seleciona um indivíduo para passar pelo operador baseado no MLM, este é dado como aproximação inicial a este método, que após minimização da função objetivo, retorna sua solução como um novo indivíduo para a população. Durante a minimização pelo MLM o número de variáveis de otimização é conhecido, definido pelo indivíduo genitor. Assim, o MLM minimiza a função objetivo somente alterando a posição e o tamanho das inclusões que lhe foram dadas como aproximação inicial.

O principal objetivo da estratégia híbrida é explorar a capacidade do AG em tratar problemas complexos com restrição e sem um número pré-definido de variáveis, melhorando a velocidade de convergência com o MLM, que tende a ser mais rápido porque utiliza informação sobre as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de otimização.

## 2.1 Algoritmos Genéticos

Algoritmos Genéticos (Eiben e Smith, 2003; Michalewicz, 1996; Goldberg e Samtani, 1986) são procedimentos de busca inspirados no processo biológico de evolução. Estas estratégias de otimização tem sido usadas para resolver com sucesso uma grande variedade de problemas complexos de otimização. Os AGs são baseados na genética e seleção natural das espécies e eles não demandam o cálculo das derivadas da função objetivo em relação às variáveis de otimização. Nesta estratégia, cada indivíduo é uma solução candidata e a população é um conjunto de indivíduos. O indivíduo é representado pelo cromossomo, que representa as variáveis de otimização. Neste trabalho, o cromossomo possui codificação real, isto é, os valores para as variáveis de otimização estão armazenadas no cromossomo por meio do tipo real. Outras possibilidades, como a representação binária, também são possíveis. A aptidão do indivíduo é dado pelo valor da função objetivo. De acordo com o valor de sua aptidão, os indivíduos são classificados.

As principais operações que compõem um AG são a seleção, a mutação e o cruzamento. Os mecanismos de seleção, baseando-se na classificação, são responsáveis pela escolha adequada dos indivíduos que darão origem a novos por meio da mutação e do cruzamento. A idéia básica é a de que um indivíduo com boa aptidão origine um novo bom indivíduo. Desta forma, espera-se que a população convirja para a solução desejada. Quanto aos operadores de mutação e cruzamento, no presente trabalho são utilizados o cruzamento de dois pontos, o cruzamento discreto, o cruzamento BLX-alpha e a mutação randômica. A estratégia híbrida aqui proposta conta também com um operador baseado no Método de Levenberg-Marquardt que, a partir de um genitor, gera um novo descendente.

Neste trabalho, utiliza-se um esquema de evolução conhecido como “steady-state”. Neste esquema cada novo indivíduo gerado é avaliado e, caso seja melhor que o pior indivíduo da população, passa a integrá-la, substituindo-o. No AG utilizado, a população inicial é gerada aleatoriamente. O único critério de parada é o máximo número de indivíduos avaliados.

No AG implementado, o cromossomo é formado pela concatenação das variáveis de otimização da seguinte forma:

$$\{N|x_{c_1}|y_{c_1}|r_1|x_{c_2}|y_{c_2}|r_2|\dots|x_{c_N}|y_{c_N}|r_N\} ,$$

onde  $N$  é o número de inclusões,  $(x_{c_i}, y_{c_i})$  são as coordenadas do centro da  $i$ -ésima inclusão e  $r_i$  seu raio. Uma abordagem semelhante a esta codificação pode ser encontrada em [Burczynski et al. \(2004\)](#) e [Mera \(2007\)](#).

No problema tratado neste trabalho, observa-se que um dado conjunto de inclusões pode ser representado pelo cromossomo de diferentes formas. Consequentemente, dois diferentes cromossomos poderiam eventualmente representar a mesma solução. Assim, para que uma dada configuração de inclusões tenha representação única no cromossomo, a cada novo indivíduo gerado, as inclusões são ordenadas e passam a ser representadas pelo cromossomo nesta ordem. Para a ordenação, utiliza-se como critério o tamanho das inclusões em ordem decrescente. Inclusões de mesmo tamanho são ordenadas levando-se em consideração suas distâncias em relação à origem do sistema de coordenadas.

Cada novo indivíduo gerado deve satisfazer às restrições geométricas do problema: as inclusões devem estar dentro do domínio e não podem interceptar-se. Se um novo indivíduo viola estas restrições, o AG descarta este indivíduo e um novo é gerado. Embora existam tais restrições, o problema pode ser tratado como sem restrições, uma vez que, na vizinhança da solução, estas restrições não estão ativas.

## 2.2 Método de Levenberg-Marquardt

Como dito anteriormente, frequentemente um indivíduo é escolhido para gerar um novo por meio do operador baseado no método de Levenberg-Marquardt. Neste caso, tal indivíduo é fornecido a este método como uma aproximação inicial. Neste caso o número de variáveis de otimização é conhecido, uma vez que o cromossomo do indivíduo genitor contém a informação do número de inclusões.

O Método de Levenberg-Marquardt, descrito em [Dennis e Schnabel \(1996\)](#) e [Fletcher \(1980\)](#), entre outros, pode ser considerado como uma modificação baseada na estratégia de região de confiança do método de Gauss-Newton:

$$\text{minimize } \|\mathbf{R}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)\|_2 \quad (3)$$

$$\text{subject to } \|\mathbf{X}_+ - \mathbf{X}_0\|_2 \leq \delta_0 . \quad (4)$$

Com este método, os valores das variáveis do próximo passo ( $\mathbf{X}_+$ ) são calculados da seguinte maneira:

$$\mathbf{X}_+ = \mathbf{X}_0 - (\mathbf{J}(\mathbf{X}_0)^T \mathbf{J}(\mathbf{X}_0) + \mu_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{X}_0)^T \mathbf{R}(\mathbf{X}_0) , \quad (5)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mu$  é o parâmetro que modifica o método de Gauss-Newton. Se  $\delta_0 \geq \|(\mathbf{J}(\mathbf{X}_0)^T \mathbf{J}(\mathbf{X}_0))^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{X}_0)^T \mathbf{R}(\mathbf{X}_0)\|_2$  então  $\mu = 0$  e  $\mu \neq 0$  caso contrário.  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz Jacobiana, cujos elementos são as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de otimização ( $J_{ij} = \partial f_i / \partial X_j$ ).

Neste trabalho, o cálculo dos elementos da matriz Jacobiana é feito de forma aproximada por diferenças finitas. Assim, o elemento  $J_{ij}$  da matriz Jacobiana é calculado como se segue:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \approx \frac{f_i(\mathbf{X} + h_j \mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{X})}{h_j} \quad (6)$$

onde  $h_j$  é uma perturbação finita no  $j$ -ésimo elemento do vetor de variáveis de otimização  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{e}_j$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz identidade.

O valor do parâmetro  $h_j$  é calculado pelo produto  $\sqrt{\varepsilon} X_j$ , onde  $\varepsilon$  é um parâmetro fornecido pelo usuário. Se a precisão da máquina for maior que o valor calculado de  $h_j$ , tal valor é substituído pela precisão da máquina.

O MINPACK-1, um pacote padrão de subrotinas implementado em Fortran para resolver numericamente sistemas de equações não-lineares e problemas de mínimos quadrados não-lineares, foi utilizado neste trabalho e está disponível no repositório Netlib (<http://www.netlib.org/minpack>). Mais detalhes sobre a implementação do método de Levenberg-Marquardt, subrotina LMDIF, pode ser encontrada em [Moré et al. \(1980\)](#).

## 3 PROBLEMA DIRETO

O problema direto consiste em, considerando o protocolo de injeção de corrente elétrica, calcular o potencial elétrico nos eletrodos do contorno externo de um corpo com distribuição

de condutividade conhecida. Este problema é governado pelas Equações de Maxwell que, adotando-se hipóteses simplicadoras pertinentes ao problema, recaem na equação de Laplace (Cheney et al., 1999). Assim, um domínio composto por um material condutor principal com inclusões homogêneas com diferentes condutividades, Fig. 1, pode ser dividido em sub-domínios homogêneos nos quais o valor do potencial elétrico  $u$  em cada ponto  $\mathbf{x}$  do domínio deve satisfazer a Equação de Laplace:

$$\nabla^2 u_k(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_k, \quad (7)$$

onde  $\Omega_k$  é o  $k$ -ésimo sub-domínio. Neste trabalho, o valor da condutividade ( $\sigma_k$ ) de cada sub-domínio é considerado conhecido e constante. O sub-domínio principal é representado por  $\Omega_0$  e as inclusões são representadas por  $\Omega_k$ , com  $k > 0$ .

As condições de contorno são:

$$u_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0^U; \quad (8)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = J(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0^J; \quad (9)$$

e as condições nas interfaces são:

$$u_0(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{0k}; \quad (10)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -\sigma_k \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{0k}; \quad (11)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno,  $\partial u_k / \partial \mathbf{n} = \nabla u_k \cdot \mathbf{n}$  é o fluxo elétrico,  $\Gamma_0$  é o contorno externo do domínio,  $\Gamma_{0k}$  é a interface entre os sub-domínios  $\Omega_0$  e  $\Omega_k$  e  $J(\mathbf{x})$  é a densidade de corrente prescrita. Para cada caso de injeção de corrente, dois eletrodos ( $\Gamma_0^J$ ) são usados para injeção e tem densidade de corrente unitária prescrita. Um terceiro eletrodo ( $\Gamma_0^U$ ) é tomado como referencial para o potencial, tendo potencial nulo prescrita. O restante do contorno externo ( $\Gamma_0^J$ ) tem densidade de corrente elétrica prescrita.

Neste trabalho, um caso particular do problema de identificação de inclusões é tratado. O domínio é composto por concreto com inclusões de aço. Assim, o modelo de distribuição de condutividade assume que o corpo é composto por um material principal com propriedades elétricas homogêneas e inclusões de condutividade infinita. Neste caso, as condições na interface devem ser tratadas de uma forma especial:

$$u_0(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}) = U_k, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{0k}; \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_{0k}} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{0k}. \quad (13)$$

Para resolver a Eq. (7) para cada sub-domínio, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é utilizado. Mais detalhes sobre esta técnica pode ser encontrado, por exemplo, em Brebbia et al. (1984). A equação integral do MEC para este problema é:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi; \mathbf{x})u(\xi; \mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{x})p(\xi; \mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (14)$$

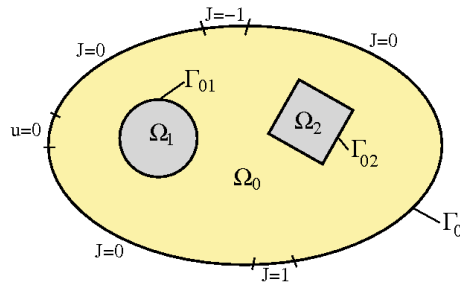


Figura 1: Domínio heterogêneo dividido em três sub-domínios homogêneos e suas condições de contorno.

onde  $\xi$  é o ponto de colocação,  $\Gamma$  é o contorno do sub-domínio,  $u$  é o potencial elétrico,  $p$  sua derivada direcional,  $u^*$  e  $p^*$  são as soluções fundamentais para o potencial e sua derivada direcional respectivamente, e  $c(\xi)$  é uma função da forma do contorno, cujo valor é 0 se  $\xi$  está fora do domínio, 1 se  $\xi \in \Omega$  e  $\beta/2\pi$  se  $\xi \in \Gamma$ . O parâmetro  $\beta$  é o ângulo entre as tangentes esquerda e direita no ponto de colocação  $\xi$ .

Para obter a solução numérica para a Eq. (14), o contorno e as interfaces do corpo são discretizadas. O contorno externo é dividido em  $N_0$  elementos e cada interface entre inclusões em  $N_k$  elementos. Neste trabalho, o elemento adotado aproxima a geometria linearmente e os valores do potencial elétrico é considerado constante em cada elemento. Neste caso, o parâmetro  $\beta = \pi$  e conseqüentemente,  $c(\xi) = 0.5$  se  $\xi \in \Gamma$ . Cada elemento de contorno tem dois nós para definição da geometria e um nó central, chamado nó funcional, para definição do potencial e do fluxo. Deste modo, a forma discretizada da Eq. (14) para cada sub-domínio  $k$  permite avaliar o potencial em cada nó funcional da seguinte maneira:

$$c(\xi_i)u(\xi_i) + \sum_{j=1}^{N_k} u_j \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{N_k} p_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j, \quad (15)$$

onde  $u_j$  e  $p_j$  representam o potencial e o fluxo no  $j$ -ésimo nó funcional. As integrais regulares são calculadas numericamente por meio do esquema de Quadratura Gaussiana e as integrais singulares são calculadas analiticamente.

Em problemas com inclusões, tanto o potencial, quanto a densidade de corrente são desconhecidos nas interfaces. As soluções do MEC para este tipo de problema são usualmente obtidas pela aplicação da Eq. (15) para cada sub-domínio  $\Omega_k$  e consideração das condições de compatibilidade e equilíbrio, Eq. (10) e (11), para o potencial e densidade de corrente nos nós funcionais dos elementos da interface  $\Gamma_{0k}$ . No presente problema, entretanto, devido à aplicação das equações de compatibilidade (12) e (13), torna-se suficiente a aplicação da Eq. (15) ao sub-domínio principal.

Assim, o número de incógnitas no sistema de equações resultante é igual ao número de elementos utilizados na discretização do contorno externo e das inclusões mais um valor de potencial por inclusão.

Depois de determinar as incógnitas do contorno, os valores do potencial elétrico nos nós do centro dos eletrodos que não possuem potencial prescrito são coletados no vetor  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ , permitindo, posteriormente, avaliar a função objetivo, Eq. (2).

Conforme descrito acima, não há necessidade de calcular valores de potencial em pontos internos do domínio, o que contribui para o desempenho do MEC, favorecendo a escolha deste método para a resolução deste tipo de problema.

#### 4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados 3 experimentos numéricos para avaliar o desempenho da estratégia híbrida de otimização na solução do problema inverso em questão. Em cada um dos problemas, faz-se uma comparação entre o desempenho da estratégia híbrida e do AG convencional.

As medidas de potencial elétrico em todos os problemas foram obtidas computacionalmente por meio da solução do problema direto para a distribuição de condutividade considerada exata. Neste caso, o MEC foi utilizado para resolver o problema direto, tomando-se o cuidado de utilizar uma discretização das interfaces diferente da escolhida para a utilização durante a solução do problema inverso, evitando assim o chamado “inverse crime” (Holder, 2005). A Fig. 2 mostra a discretização utilizada e o potencial elétrico gerado por um dos casos de injeção de corrente elétrica em uma seção com 4 inclusões de condutividade infinita.

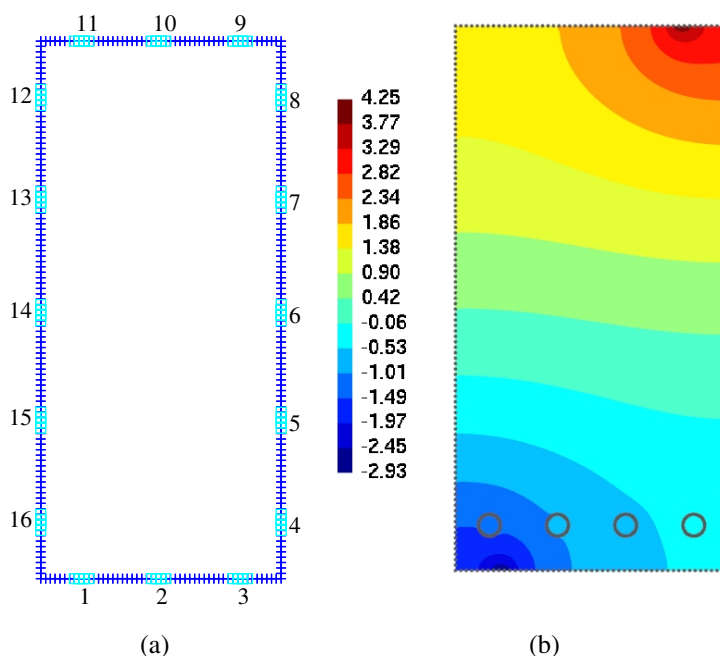


Figura 2: (a) Posição dos eletrodos e discretização do contorno externo e (b) distribuição de potencial para injeção de corrente elétrica entre os eletrodos 1 e 9.

Embora se saiba que a solução do problema inverso em questão é sensível ao ruído presente nas medidas, característica inerente aos procedimentos experimentais de medição, estudos anteriores (Peters e Barra, 2010) mostram que a taxa de ruído típico de equipamentos de aquisição de tomografia por impedância elétrica é baixa e não afeta significativamente o desempenho de estratégias de solução deste tipo. Deste modo, no presente trabalho, os valores de potenciais gerados computacionalmente, apenas tomados com limitado número de dígitos, são utilizados como valores medidos.

Em todos os problemas, as variáveis de otimização estão limitadas aos seguintes valores:  $1 \leq N \leq 5$ ;  $-15 \leq x_c \leq 15$ ;  $-30 \leq y_c \leq 30$  e  $0, 3 \leq r \leq 2$ .

Para o AG convencional, utiliza-se as seguintes probabilidades para os operadores: 30% para o cruzamento de dois pontos, 30% para o cruzamento discreto, 20% para o cruzamento BLX-alpha e 20% para a mutação randômica. Para a estratégia híbrida as probabilidades são: 15% para o cruzamento de dois pontos, 15% para o cruzamento discreto, 20% para o cruzamento



BLX-alpha, 20% para a mutação randômica e 30% para o operador baseado no MLM.

Para o MLM, os seguintes parâmetros são utilizados: tamanho da região de confiança  $\delta = 0.1$  e para a aproximação do Jacobiano por diferenças finitas  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Os critérios de parada deste método são: para as variáveis de otimização  $xtol = 10^{-3}$ , para a função objetivo  $ftol = 10^{-4}$  e para o gradiente  $gtol = 10^{-6}$ .

#### 4.1 Problema 1

No primeiro problema busca-se identificar três inclusões alinhadas com diferentes tamanhos próximas da extremidade inferior da seção. O problema é resolvido por meio da estratégia híbrida de otimização e também pelo AG. São realizadas 4 rodadas de cada método, sendo que a população inicial, com 150 indivíduos para cada uma das rodadas, é gerada pseudo-aleatoriamente. Cada rodada termina após 200 gerações, isto é, após a avaliação de 30.000 indivíduos.

A Fig. 3 apresenta as inclusões a serem identificadas e os resultados obtidos em cada rodada com a estratégia híbrida e o AG convencional. Nas legendas destas figuras, a primeira estratégia é identificada por “AG + MLM” e o AG convencional por “AG”. A Tabela 2 apresenta os valores da função objetivo atingidos em cada estratégia de otimização, por rodada. Na Fig. 4(a) é apresentado o valor da aptidão do melhor indivíduo ao longo do número de avaliações dos indivíduos. Porém, sabe-se que no caso da estratégia híbrida, quando o operador baseado no MLM é selecionado, a função objetivo é avaliada várias vezes de forma a aproximar as derivadas da função objetivo em relação às variáveis de otimização e promover a minimização da função para a dada aproximação inicial. Desta forma, a Fig. 4(b) apresenta o valor da aptidão do melhor indivíduo encontrado ao longo do número total de avaliações da função objetivo, ou seja, contabilizando as avaliações realizadas pelo MLM.

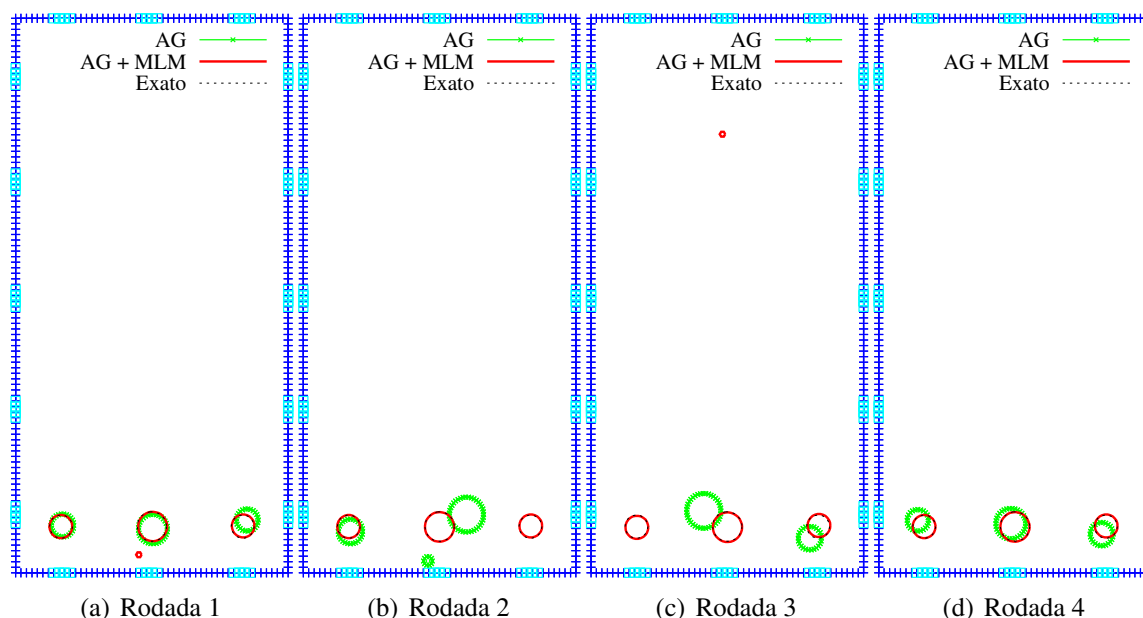


Figura 3: Resultados obtidos para o primeiro problema.

Rodada	AG	AG+MLM
1	0.0065	0.0017
2	0.0313	0.0018
3	0.0398	0.0032
4	0.0084	0.0018

Tabela 2: Valores alcançados da função objetivo.

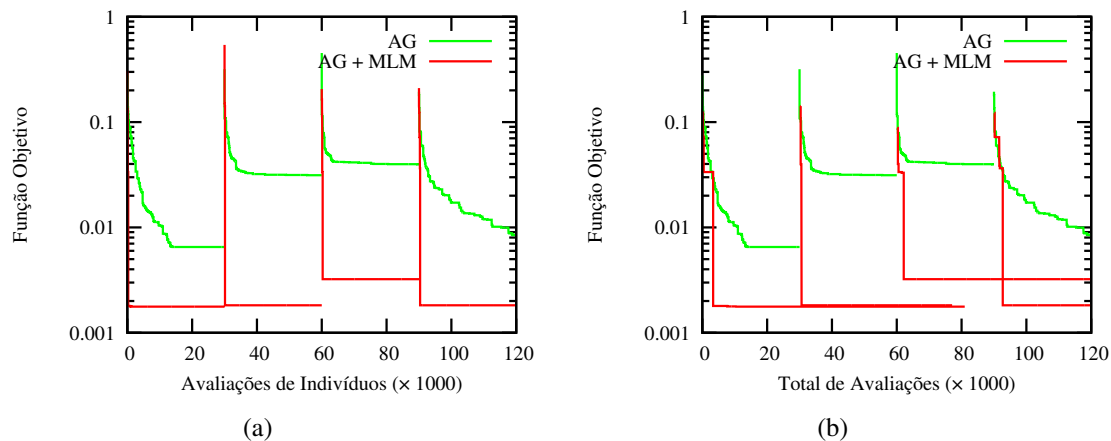


Figura 4: Curvas de convergência do AG e da estratégia híbrida. Considera-se em (a) o número de indivíduos avaliados e em (b) o número total de avaliações da função objetivo.

Pode-se notar pela Fig. 3 que em todas as quatro rodadas, as inclusões identificadas pela estratégia híbrida estão mais próximas das inclusões verdadeiras do que inclusões obtidas pelo AG. Este resultado é confirmado pela Tabela 2, que mostra que a estratégia híbrida alcança valores mais baixos da função objetivo que o AG convencional. Ainda na Fig. 3 percebe-se que em 3 das 4 rodadas a estratégia híbrida fornece como solução uma configuração com uma inclusão além da configuração exata. Porém, esta inclusão em excesso tem dimensão muito inferior que as demais, não comprometendo o resultado. Uma estratégia simples, baseada na comparação dos tamanhos das inclusões, poderia ser implementado para eliminar as inclusões relativamente pequenas e sanar o problema. As curvas de convergência para as 4 rodadas de ambas as estratégias, Fig. 4(a), mostram que o emprego do MLM como operador, de fato, acelera a convergência do AG. Porém, esta aparentemente rápida redução da função objetivo tem um custo computacional que pode ser notado nas curvas da Fig. 4(b), associado ao número de avaliações da função pelo MLM. Porém, comparando as curvas de convergência das duas estratégias, considerando o número de avaliações da função ao final de cada rodada do AG, percebe-se que a estratégia híbrida apresenta menor valor da função objetivo, ou seja, melhor desempenho para um mesmo número de avaliações.

## 4.2 Problema 2

Neste problema busca-se identificar quatro inclusões de mesmo tamanho, cada uma em um canto da seção. Da mesma forma que no problema anterior, o problema é resolvido por meio da estratégia híbrida de otimização e também pelo AG. Neste caso, são realizadas 6 rodadas de cada método, sendo que a população inicial, com 100 indivíduos para cada uma das rodadas, é gerada pseudo-aleatoriamente. Cada rodada termina após 200 gerações, isto é, após a avaliação de 20.000 indivíduos.

A Fig. 5 mostra os resultados obtidos em cada rodada. A Tabela 3 apresenta os valores da função objetivo atingidos em cada estratégia de otimização, por rodada. Assim como feito para o problema anterior, a Fig. 6(a) apresenta o valor da aptidão do melhor indivíduo ao longo do número de avaliações dos indivíduos e a Fig. 6(b) considera o número total de avaliações da função objetivo, tornando mais justa a comparação entre as estratégias segundo o critério de custo computacional.

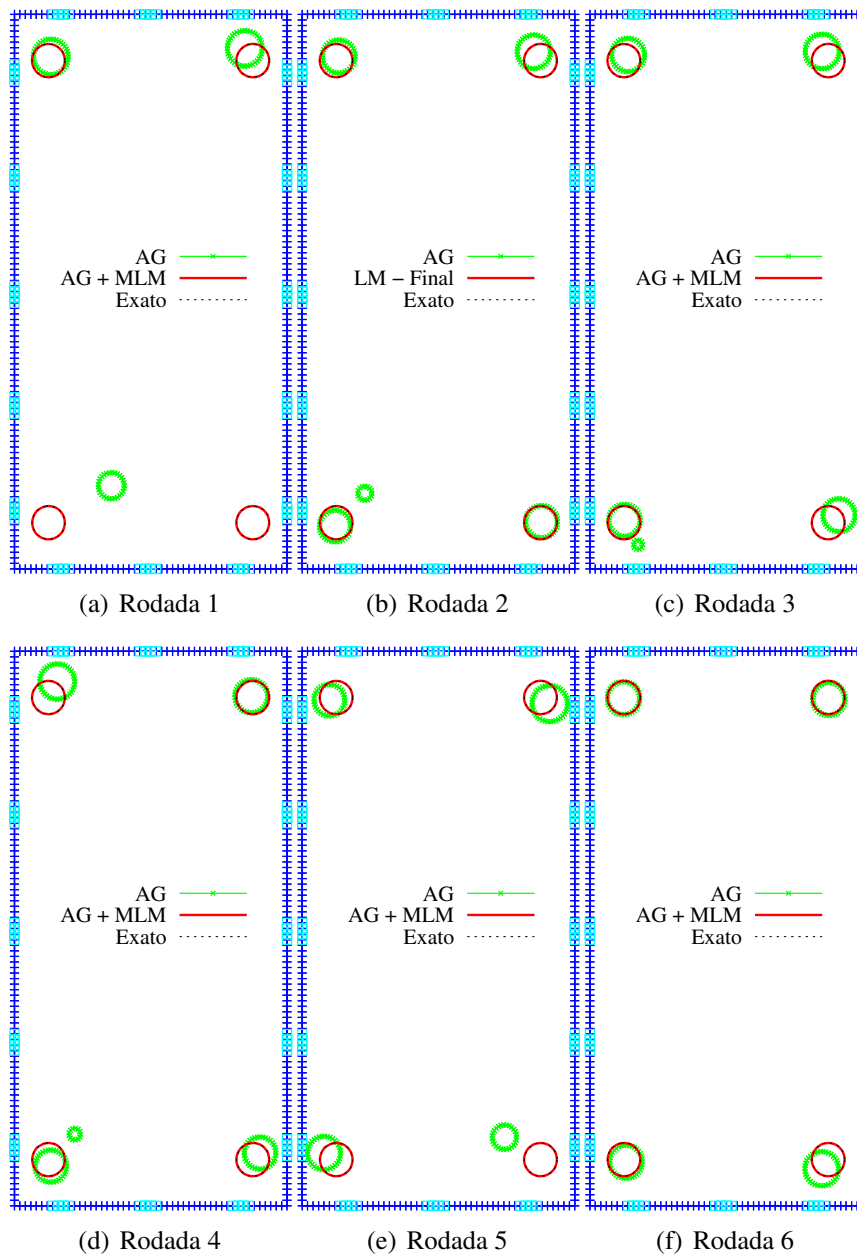


Figura 5: Resultados obtidos para o segundo problema de identificação.

Rodada	AG	AG+MLM
1	0.1240	0.0019
2	0.0185	0.0019
3	0.0253	0.0019
4	0.0289	0.0019
5	0.0907	0.0019
6	0.0137	0.0019

Tabela 3: Valores alcançados da função objetivo.

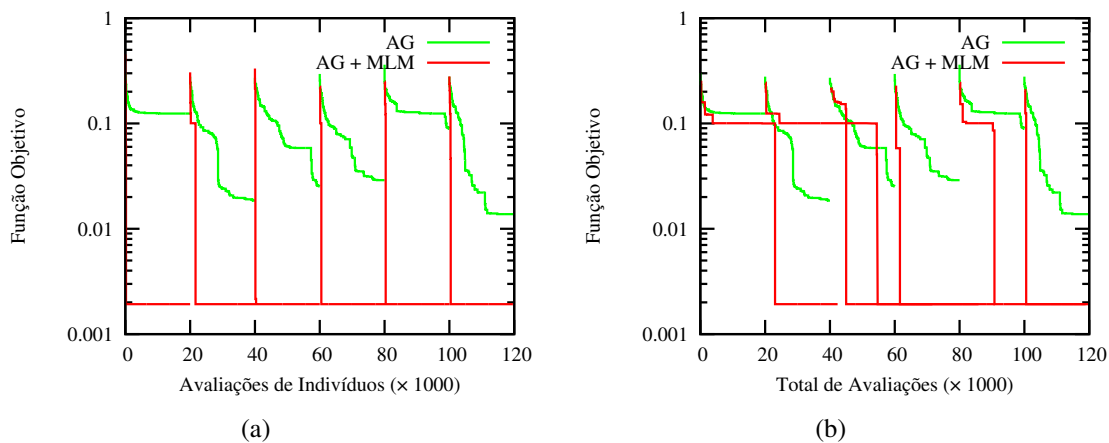


Figura 6: Curvas de convergência do AG e da estratégia híbrida. Considera-se em (a) o número de indivíduos avaliados e em (b) o número total de avaliações da função objetivo.

Pode-se perceber na Fig. 5 que a estratégia híbrida obteve sucesso ao identificar exatamente as inclusões em todas as rodadas, o que não acontece com o AG. Mas deve-se ressaltar que este resultado se deve, em parte, ao maior número de avaliações da função objetivo que a estratégia híbrida realizou. Apesar disso, a estratégia híbrida é, a princípio, mais eficiente, uma vez que as curvas de convergência da Fig. 6(b) mostram que, considerando o número de avaliações realizado pelo AG em cada rodada, a estratégia híbrida alcança um nível mais baixo da função objetivo em 5 das 6 rodadas.

### 4.3 Problema 3

Neste problema também busca-se identificar quatro inclusões de mesmo tamanho, porém todas alinhadas próximas da extremidade inferior da seção de concreto. Da mesma forma que no problema anterior, as duas estratégias de otimização são utilizadas. Para este problema, são realizadas 6 rodadas de cada método, sendo que a população inicial, com 150 indivíduos para cada uma das rodadas, é gerada pseudo-aleatoriamente. Cada rodada termina após 50 gerações, no caso do AG, e 25 gerações, no caso da estratégia híbrida. Nota-se assim, uma redução do número de indivíduos gerados em relação ao problema anterior.

A Fig. 7 mostra os resultados obtidos em cada rodada. A Tabela 4 apresenta os valores da função objetivo atingidos em cada estratégia de otimização. Assim como feito para o problema anterior, a Fig. 8(a) apresenta o valor mais baixo da função objetivo ao longo do número de avaliações dos indivíduos e a Fig. 8(b) considera o número total de avaliações da função objetivo.

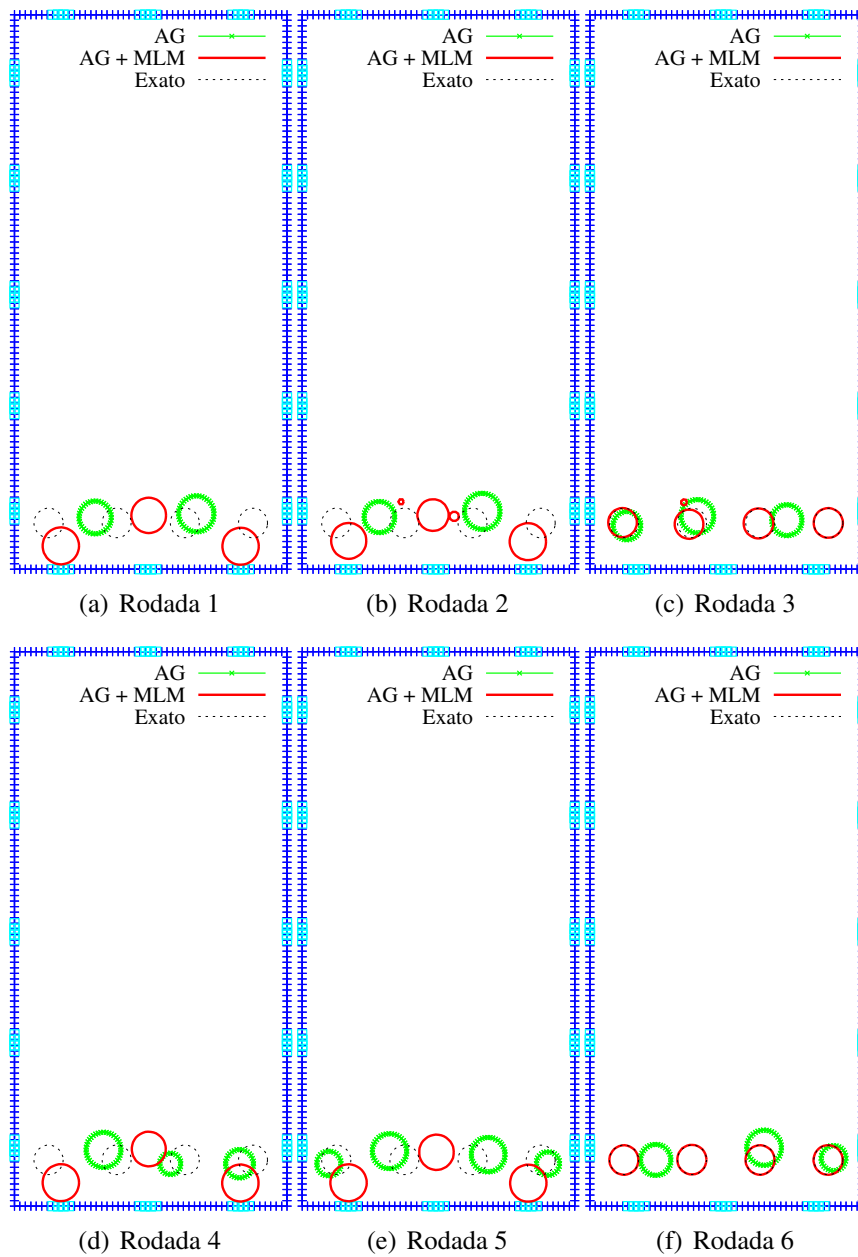


Figura 7: Resultados referentes ao terceiro problema de identificação.

Rodada	AG	AG+MLM
1	0.0790	0.0243
2	0.0806	0.0124
3	0.0574	0.0020
4	0.0639	0.0253
5	0.0199	0.0242
6	0.0631	0.0020

Tabela 4: Valores alcançados da função objetivo.

Neste experimento, com menor número de avaliações de indivíduos em relação aos experimentos anteriores, nota-se na Fig. 7, que a estratégia híbrida alcança solução satisfatória em

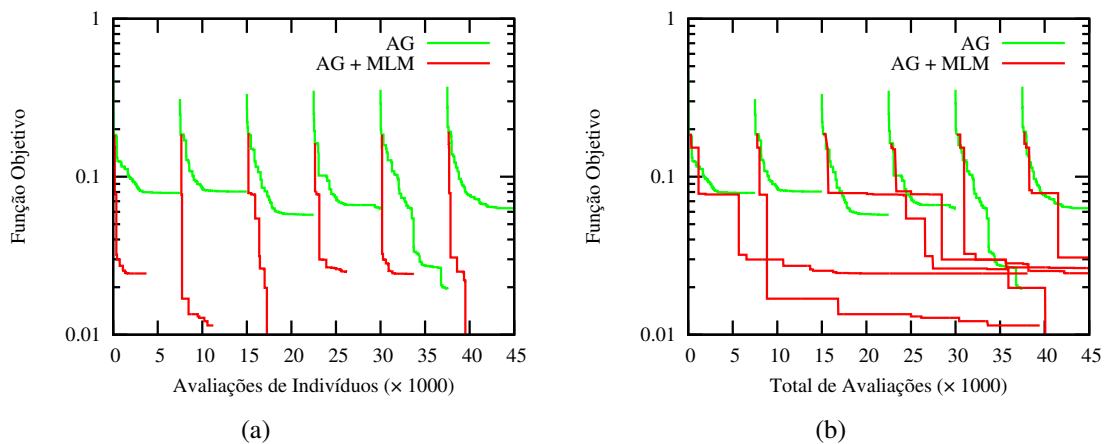


Figura 8: Curvas de convergência do AG e da estratégia híbrida. Considera-se em (a) o número de indivíduos avaliados e em (b) o número total de avaliações da função objetivo.

2 rodadas (rodadas 3 e 6) enquanto que o AG somente em 1 rodada (rodada 5). As curvas de convergência da Fig. 8(a) mostram que, mesmo avaliando metade do número de indivíduos, o AG atinge valores menores para a função objetivo ao final de todas as rodadas. Porém, se forem consideradas as avaliações da função objetivo realizadas pelo operador baseado no MLM, percebe-se que, em metade das rodadas, o AG termina atingindo mais baixo nível da função objetivo, Fig. 8(b).

## 5 CONCLUSÕES

A estratégia proposta mostrou-se capaz de resolver o problema inverso em questão, o que é comprovado pelos experimentos numéricos apresentados.

As curvas de convergência das estratégias de otimização mostram que a maior redução da função objetivo é alcançada pela estratégia híbrida, embora esta grande redução esteja associada ao número extra de avaliações da função pelo MLM. Apesar disso, a estratégia híbrida pode ser considerada melhor, uma vez que, embora aumente o número de avaliações, este aumento se reflete em redução da função objetivo enquanto que no AG, o valor da função objetivo já está estagnado e um aumento do número de avaliações parece não ser suficiente para provocar novas reduções no valor da função objetivo.

Embora os resultados obtidos possam ser considerados satisfatórios, a eficiência da estratégia híbrida pode ser melhorada através de um estudo da influência dos parâmetros do AG e do MLM na convergência do algoritmo. Tolerâncias muito pequenas para os critérios de parada do MLM podem levar a um número excessivo de avaliações da função objetivo sem proporcional ganho na redução da função. Assim, a consideração do ajuste destes parâmetros ao longo da rodada pode ser uma alternativa para elevar a eficiência da estratégia. Da mesma forma, no que se refere ao AG, deve ser feito um estudo sobre a influência do tamanho da população e da probabilidade de utilização dos operadores de modo a otimizar o procedimento de busca.

Para que estratégia híbrida apresentada seja utilizada para resolver problemas reais, com medidas de potencial obtidas experimentalmente, faz-se necessário, além do tratamento dos dados, modificações na modelagem computacional do problema de forma que o modelo seja capaz de representar ainda melhor o fenômeno físico real.

## Agradecimientos

A primeira autora agradece ao CNPq pela bolsa de Doutorado.

## REFERÊNCIAS

- Borcea L. Electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 18(6):R99–R136, 2002.
- Brebbia C., Telles J.C.F., e Wrobel L.C. *Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, 1984.
- Brown B.H., Barber D.C., e Seagar A.D. Applied potential tomography - possible clinical applications. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, 6(2):109–121, 1985.
- Burczynski T., Kus W., Dlugosz A., e Orantek P. Optimization and defect identification using distributed evolutionary algorithms. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 17(4):337–344, 2004. ISSN 0952-1976. doi:DOI:10.1016/j.engappai.2004.04.007. Selected Problems of Knowledge Representation.
- Cheney M., Isaacson D., e Newell J.C. Electrical impedance tomography. *SIAM Review*, 41(1):85–101, 1999.
- Dennis J. e Schnabel R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, 1996.
- Eiben A.E. e Smith J.E. *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer, 2003.
- Fletcher R. *Practical methods of optimization*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1980.
- Goldberg D. e Samtani M. Engineering optimization using genetic algorithms. In *Proc. Of the 9th Conference in Electronic Computation*, páginas 471–482. New York, NY, 1986.
- Holder D. Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications. *Medical Physics*, 32:2731, 2005. doi:10.1118/1.1995712.
- Hsiao C.T., Chahine G., e Gumerov N. Application of a hybrid genetic/powell algorithm and a boundary element method to electrical impedance tomography. *J. Comput. Phys.*, 173(2):433–454, 2001.
- Karhunen K., Seppanen A., Lehtikoinen A., Monteiro P.J.M., e Kaipio J.P. Electrical resistance tomography imaging of concrete. *Cement and Concrete Research*, 40(1):137–145, 2009.
- Mera N.S. Efficient optimization processes using kriging approximation models in electrical impedance tomography. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(1):202–220, 2007.
- Michalewicz Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer Verlag, 1996.
- Moré J.J., Garbow B.S., e Hillstom K.E. User guide for MINPACK-1. Relatório Técnico ANL-80-74, Argonne National Laboratory, Argonne, IL, USA, 1980.
- Peters F., Barra L., e Santos R. Determination of cardiac ejection fraction by electrical impedance tomography - numerical experiments and viability analysis. In *Computational Science - ICCS 2009*, volume 5544/2009 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 819–828. Springer Berlin / Heidelberg, 2009. ISSN 0302-9743 (Print) 1611-3349 (Online). doi:10.1007/978-3-642-01970-8\_82.
- Peters F.C. e Barra L.P.S. Some numerical results on the influence of measurement strategies and load patterns in the eit inverse problem. *Journal of Physics: Conference Series*, 224(1):012145, 2010.
- Stephenson D.R., Mann R., e York T.A. The sensitivity of reconstructed images and process engineering metrics to key choices in practical electrical impedance tomography. *Measurement Science and Technology*, (9):094013, 2008.