

EL MÉTODO DE HOMOGENIZACIÓN DIRECTO APLICADO AL TEJIDO ÓSEO TRABECULAR

Ariel A. Ibarra Pino, Adrián P. Cisilino

*División Soldadura y Fractomecánica –INTEMA-CONICET–, Universidad Nacional de Mar del Plata, Av. Juan B. Justo 4302, 7200 Mar del Plata, Argentina, aibarra@fi.mdp.edu.ar,
<http://www.fi.mdp.edu.ar>*

Palabras Clave: Constantes Elásticas Aparentes, Tejido Óseo Trabecular, Elementos Finitos.

Resumen. El método directo de homogenización es utilizado en este trabajo para determinar las propiedades elásticas homogéneas anisótropas del hueso trabecular. Para ello, se emplean análisis mediante elementos finitos de modelos tridimensionales construidos a partir de imágenes de microtomografía computada. El trabajo incluye la presentación de los aspectos teóricos fundamentales del método y su implementación. En especial se discute el efecto de las condiciones de contorno sobre el valor de las componentes del tensor elástico. Se estudia también el efecto del método de construcción de los modelos (incluidos el proceso de segmentación y la discretización) y el tamaño de la muestra. Las propiedades elásticas calculadas son comparadas con las cotas de Reuss y Voigt y con los resultados de otros autores.

1 INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas el empleo de prótesis para el reemplazo de articulaciones se ha convertido en una práctica habitual de la cirugía ortopédica. Se ha reportado que las prótesis cementadas implantadas en pacientes jóvenes tienen tasas de falla del orden del 33% dentro del período que va de los 5 a 15 años posteriores a su implante (Dorr et al, 1990). En muchos casos, esto es consecuencia del deterioro mecánico de la fijación debido, al menos en parte, al llamado proceso de adaptación o remodelado del tejido óseo.

En general, todas las teorías de remodelado consideran que algún tipo de estímulo es responsable de la composición, forma, estructura y densidad de la estructura ósea. Los mecanismos que gobiernan este proceso se clasifican según se apliquen al tejido cortical o trabecular (Hart, 2001). En particular, para este último, se emplean las teorías de elasticidad adaptiva (Cowin, 1986), densidad de energía de deformación (Mattheck, 1990), daño mecánico (García Aznar, 1999) o, funciones de influencia para predecir la densidad y orientación de las trabéculas (Mullender et al., 1994).

Para la evaluación de tales teorías es necesario de un vínculo entre las múltiples escalas del problema. En ese sentido, puesto que el hueso puede considerarse como un material heterogéneo (Keaveny et al., 2001) pueden aplicarse las técnicas desarrolladas para el estudio de materiales polifásicos. Así, la respuesta mecánica de una muestra de hueso trabecular resulta una función de las propiedades mecánicas del tejido y su arquitectura (van Rietbergen et al., 1995). Pese a que en la actualidad no existe consenso sobre cuál es el mecanismo que controla el proceso de adaptación, se considera que los esquemas de homogenización, las técnicas numéricas y otras desarrolladas para el estudio micromecánico de materiales heterogéneos pueden proveer de una base tanto para el entendimiento del proceso de adaptación como para mejorar el diseño de los implantes (Ching-Chang et al., 1996).

Puesto que el análisis de la respuesta mecánica de un material heterogéneo considerando cada una de sus características microestructurales es un problema numéricamente intratable (Zohdi and Wriggers, 2005) se emplean propiedades de material homogenizadas o efectivas. Tales propiedades son usualmente difíciles o imposibles de medir experimentalmente (Kanouté et al., 2009) por cuanto el uso de técnicas numéricas se vuelve mandatorio.

En este trabajo se consideran sólo dos fases: el tejido trabecular y el espacio hueco adyacente sin interacción con la médula. Puesto que las deformaciones fisiológicas son pequeñas, el comportamiento mecánico de ambas fases se consideró lineal, elástico e isotrópico (Kabel et al., 1999). De este modo, la respuesta mecánica aparente de las muestras de tejido trabecular queda completamente caracterizada mediante el tensor elástico E o el de compliancia S que puede determinarse mediante el método de homogenización directo (Hashin, 1983). A lo largo del trabajo el módulo de Young del tejido trabecular fue considerado igual a $E_{\text{hueso}} = 1000 \text{ Mpa}$ y el coeficiente de Poisson igual a $\nu_{\text{hueso}} = 0.3$ mientras que los parámetros homólogos de la fase hueco

fueron $E_{\text{hueco}}=10^{-5}$ Mpa y $\nu_{\text{hueco}}=0.3$.

En este artículo, se emplean modelos de elementos finitos de muestras de hueso trabecular obtenidos mediante microtomografía computarizada con el objeto de hallar el tensor elástico que caracteriza el comportamiento mecánico macroscópico de tales muestras. Se discute la influencia del método de construcción de los modelos, el tamaño de las muestras, el tipo y orden de los elementos empleados. Las propiedades elásticas calculadas se compran con las cotas impuestas por los métodos tradicionales de Reuss y Voigt y con los resultados de otros autores.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 El método de homogenización directo y los elementos de volumen representativo

Con el objeto de determinar las propiedades elásticas efectivas o aparentes de una muestra de tejido, mediante el método de homogenización directo, se emplean cuatro etapas a saber: separar el análisis en al menos dos niveles o escalas, para ello es necesario definir el tamaño de la muestra a evaluar; seleccionar las condiciones de contorno que se aplicarán a la muestra; resolver problemas de valores de contorno para hallar el llamado tensor estructural M que relaciona un campo de interés entre escalas adyacentes y; finalmente computar el tensor elástico o el de compliancia de la muestra.

En lo sucesivo se emplearán dos niveles o escalas: la escala de la muestra corresponderá a nuestro nivel "más macroscópico" y, la escala en la que podemos diferenciar los campos de tensiones y deformaciones de las fases será nuestro nivel microscópico.

Para seleccionar el tamaño de la muestra, es necesario considerar el concepto de elemento de volumen representativo o RVE. La determinación y definición del RVE excede el alcance de este trabajo (para una revisión de distintas definiciones de RVE con énfasis en técnicas numéricas ver [Kanit et al., 2003](#)), por cuanto sólo diremos que, considerando su definición clásica, la respuesta mecánica de un RVE debe ser independiente de las condiciones de contorno empleadas. Esta condición es excesivamente estricta para tejidos biológicos al punto que muchas veces requiere de muestras tan grandes que quizás no existan en la naturaleza. Esto es consecuencia de la naturaleza heterogénea de los materiales biológicos que no satisfacen la definición convencional de continuo. Por consiguiente para los materiales heterogéneos a lo sumo puede hallarse un tamaño de muestra en la cual la fluctuación de una propiedad respecto de su valor medio es mínima. [Harrigan, et al. \(1988\)](#) estudió la evolución del error en la desviación estándar de la fracción volumétrica ósea¹ de

¹ En el artículo original los autores se refieren a la densidad de la muestra bajo estudio como la relación entre la fracción de área de tejido óseo respecto del área considerada. A raíz de las múltiples confusiones detectadas aún en la literatura especializada, en este artículo redefinimos esta cantidad como fracción volumétrica ósea.

muestras de tejido trabecular en dos dimensiones y sugirió que, en tres dimensiones, se requiere de un volumen cúbico de 5 longitudes intratrabeculares por lado para minimizar el error en la determinación de dicha propiedad. En el resto del trabajo, debilitamos el concepto de RVE y usamos volúmenes en los cuales se satisface la condición precedente. De este modo, las propiedades computadas ya no serán efectivas sino propiedades aparentes del volumen bajo estudio.

Las condiciones de contorno deben producir campos homogéneos dentro de una muestra homogénea. En cuerpos elásticos, dos condiciones de contorno que satisfacen este requisito son los desplazamientos lineales y las tracciones uniformes, es decir

$$u_k = \varepsilon_{kl}^0 \cdot x_l \quad \text{y} \quad T_k = \sigma_{kl}^0 \cdot n_l, \quad (1)$$

donde u_k y T_k corresponden a los desplazamientos y tracciones aplicados sobre el contorno de la muestra, x_l y n_l representan la posición de los puntos sobre el contorno y la normal al contorno respectivamente, mientras que ε_{kl}^0 y σ_{kl}^0 representan deformaciones y tensiones constantes del material homogéneo aparente en la escala de la muestra.

Por su importancia, las cuestiones relacionadas tanto con la resolución de los problemas de valor de contorno como la influencia de las condiciones de contorno y el cómputo de los tensores se describen en los párrafos siguientes.

2.2 Implementación: aspectos prácticos del método de homogenización directo

Puesto que los análisis mediante RVE pueden aplicarse en estudios multiescala (Hollister y Kikuchi, 1994), es usual el empleo de supraíndices para denotar el nivel o escala sobre la cual se está operando. El tensor de deformaciones o de tensiones de las fases del nivel estructural k se relaciona con el tensor homólogo del nivel inmediato superior $k-1$ mediante

$$\{\varepsilon^k\} = [M^k] \cdot \{\varepsilon^{k-1}\} \quad \text{y} \quad \{\sigma^k\} = [M^k] \cdot \{\sigma^{k-1}\}, \quad (2)$$

donde el supraíndice k indica el nivel estructural de los microconstituyentes (fases); $k-1$ el nivel inmediato superior (de la muestra), mientras que M^k representa el tensor estructural o de localización del nivel k -ésimo.

Las deformaciones y tensiones aparentes en la escala de la muestra, $k-1$, son iguales al promedio en volumen de las cantidades respectivas dentro del volumen de la muestra en la escala k obtenidas bajo las condiciones de contorno indicadas en la Ec. (1), esto es

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{Vrve} \int_{Vrve} \varepsilon_i \, dVrve \quad \text{o} \quad \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Vrve} \int_{Vrve} \sigma_i \, dVrve, \quad (3)$$

donde los corchetes de McCauley denotan la operación de promedio de la variable en el volumen de la muestra; $Vrve$ es el volumen del elemento de volumen representativo que, en este caso, es idéntico al de la muestra y; el subíndice i denota

la componente del tensor bajo consideración. Nótese que se aprovecha la simetría de los tensores de deformación y tensión por cuanto i toma valores desde 1 hasta 6.

Por su parte el tensor elástico aparente, nivel $k-1$, puede calcularse a partir de la ley de Hooke en el nivel microscópico k

$$\{\sigma_i^k\} = [E_{ij}^k] \cdot \{\varepsilon_j^k\}. \quad (4)$$

Integrando en el volumen del RVE, dividiendo por el volumen del mismo V_{rve} y, reemplazando ε^k según Ec. (2), se obtiene una expresión que es función de la deformación ε_i^{k-1} , una constante dentro de la integral. Luego, se llega a

$$[E^{k-1}] = \frac{1}{V_{rve}} \int [E^k] \cdot [M^k] dV_{rve}, \quad (5)$$

donde E^{k-1} es el tensor elástico del nivel estructural $k-1$, E^k es el de las fases del nivel estructural k -ésimo y, M^k es el tensor estructural en el nivel k -ésimo. Usando un razonamiento similar y, mutatis mutandis, se obtiene el tensor de compliancia S^{k-1}

$$[S^{k-1}] = \frac{1}{V_{rve}} \int [S^k] \cdot [M^k] dV_{rve}. \quad (6)$$

El siguiente nivel macroscópico, de existir, puede ser analizado usando las propiedades efectivas calculadas el nivel $k-1$ siempre y cuando se satisfagan las mismas hipótesis efectuadas hasta aquí.

2.3 Cotas del método: importancia de las condiciones de contorno

Una vez definido el tamaño de la muestra se emplean desplazamientos lineales o tracciones uniformes como condiciones de contorno sobre la muestra para resolver un problema de valores de contorno y hallar alguno de los tensores de localización. Puesto que las condiciones in-situ en la muestra se desconocen, cualquiera sean las condiciones de contorno empleadas para este análisis serán, en general, diferentes de las reales. Para acotar los errores asociados a este tipo de análisis se emplean los principios de la Mínima Energía Potencial (PMEP) y de la Mínima Energía Potencial Complementaria (PMEPC) (ver Kanouté et al., 2009).

El PMEP establece que de todos los estados de deformaciones admisibles que satisfacen el equilibrio, el correcto es aquel que minimiza la energía potencial del cuerpo o estructura bajo análisis. Cuando no se aplican esfuerzos externos sobre la muestra, la energía potencial es idéntica a la energía interna de deformación. Por lo tanto, en un análisis en el que se usan como condiciones de contorno desplazamientos lineales, esto puede ser escrito como

$$U_{rve} = \int_{V_{rve}} \frac{1}{2} \{\varepsilon^{k-1}\}^T [E_{rve}^{k-1}] \{\varepsilon^{k-1}\} dV_{rve}, \quad (7)$$

donde U_{rve} representa la energía potencial en el nivel $k-1$ y, E_{rve}^{k-1} es el tensor elástico aparente calculado. Sin haberlo hecho explícito, en la operación anterior admitimos que se satisface la llamada condición de Hill, $\langle \sigma \rangle \cdot \langle \varepsilon \rangle = \langle \sigma \cdot \varepsilon \rangle$ (Zohdi y Wriggers, 2005).

La energía potencial para las condiciones in-situ o reales del RVE se puede expresar como

$$U_{in-situ} = \int_{V_{rve}} \frac{1}{2} \{\varepsilon^{k-1}\}^T [E^{k-1}] \{\varepsilon^{k-1}\} dV_{rve}, \quad (8)$$

donde todas las cantidades fueron definidas previamente.

Puesto que las condiciones de contorno empleadas en el análisis de la muestra pueden diferir, o a lo sumo, ser idénticas a las condiciones in-situ, la energía potencial del volumen analizado bajo las condiciones supuestas debe ser mayor o igual a la existente in-situ de acuerdo al PMEP, por lo tanto

$$\int_{V_{rve}} \frac{1}{2} \{\varepsilon^{k-1}\}^T [E_{rve}^{k-1}] \{\varepsilon^{k-1}\} dV_{rve} \geq \int_{V_{rve}} \frac{1}{2} \{\varepsilon^{k-1}\}^T [E^{k-1}] \{\varepsilon^{k-1}\} dV_{rve} \quad (9)$$

y, puesto que las deformaciones en el nivel $k-1$ son idénticas, se deduce que

$$[E_{rve}^{k-1}] \geq [E^{k-1}]. \quad (10)$$

Cuando se aplican tracciones uniformes sobre el contorno de la muestra se considera el PMEPC. Operando de forma análoga se obtiene la siguiente desigualdad

$$\int_{V_{rve}} \frac{1}{2} \{\sigma^{k-1}\}^T [S_{rve}^{k-1}] \{\sigma^{k-1}\} dV_{rve} \geq \int_{V_{rve}} \frac{1}{2} \{\sigma^{k-1}\}^T [S^{k-1}] \{\sigma^{k-1}\} dV_{rve} \quad (11)$$

donde S denota los tensores de compliancia. Resulta evidente que

$$[S_{rve}^{k-1}] \geq [S^{k-1}] \text{ por lo tanto } [S_{rve}^{k-1}]^{-1} = [E_{rve}^{k-1}] \leq [E^{k-1}] = [S^{k-1}]^{-1}. \quad (12)$$

Por consiguiente, si se emplean desplazamientos lineales como condiciones de contorno se obtiene una cota superior a las propiedades aparentes del material. En cambio, cuando se emplean tracciones uniformes se obtiene una cota inferior.

Pese a la rigurosidad matemática del método, no es posible hacer una estimación de cuán apartadas están estas cotas. En particular, cuando se emplean tracciones uniformes como condiciones de contorno en una muestra de material bifásico con espacio vacío sobre el contorno de ésta, las propiedades del material equivalente resultan fuertemente subestimadas (Ibarra Pino y Cisilino, 2010). Por este motivo, se emplearon desplazamientos lineales como condiciones de contorno. En las próximas secciones presentaremos el procedimiento utilizado para determinar el valor del tensor elástico aparente de la muestra E_{rve}^{k-1} . Para ello, es necesario hallar el tensor de localización de deformaciones M^k . En lo que resta del trabajo omitiremos el subíndice RVE.

2.4 Cómputo de los tensores de localización de deformaciones y elástico aparente

Puesto que los modelos son tridimensionales, para el cálculo del tensor M^k es necesario resolver seis problemas de valores de contorno o casos de carga linealmente independientes, Figura 1. En este trabajo tales casos de carga fueron resueltos empleando el método de los elementos finitos mediante el programa de cálculo Abaqus (Simulia, 2007).

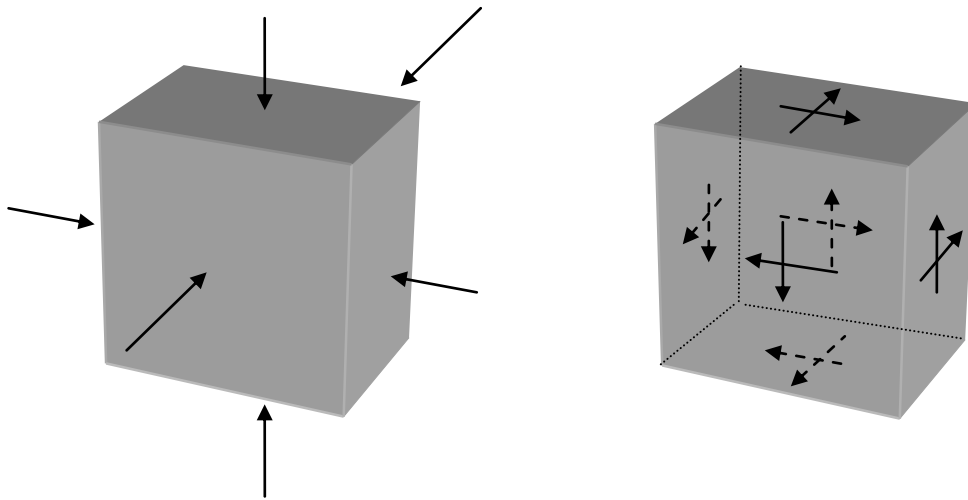


Figura 1: Seis casos de carga empleados para el cómputo del tensor de localización de deformaciones

Puesto que $\langle \varepsilon_i \rangle$ representa el valor de las componentes del tensor de deformaciones del material homogéneo equivalente ε_i^{k-1} , las condiciones de contorno aplicadas a la muestra Ec. (1) para cada problema de valor de contorno se obtuvieron imponiendo que la deformación del material homogéneo aparente sea

$$\varepsilon_{kl}^{11} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{11}, \quad \varepsilon_{kl}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{22}, \quad \varepsilon_{kl}^{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{bmatrix}^{33},$$

$$\varepsilon_{kl}^{12} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12}^0 & 0 \\ \varepsilon_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{12}, \quad \varepsilon_{kl}^{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}^0 \\ 0 & \varepsilon_{23}^0 & 0 \end{bmatrix}^{23} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{kl}^{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{31}^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31}^0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{31} \quad (13)$$

donde los pares de supraíndices representan cada uno de los seis pq casos de carga. En lo que sigue omitiremos tales supraíndices en los términos de las deformaciones constantes en la escala de la muestra ε^0 que, a su vez son de idéntico valor para cada uno de los pq casos de carga. De este modo, las condiciones de contorno para cada uno de los casos de carga fueron

$$u_k^{11} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \cdot x_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad u_k^{22} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon^0 \cdot x_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad u_k^{33} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon^0 \cdot x_3 \end{Bmatrix}, \quad u_k^{12} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \cdot x_2 \\ \varepsilon^0 \cdot x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad u_k^{23} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon^0 \cdot x_3 \\ \varepsilon^0 \cdot x_2 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad u_k^{31} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \cdot x_3 \\ 0 \\ \varepsilon^0 \cdot x_1 \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

donde pq toma los valores 11, 22, 33, 12, 23 y 31.

Una vez resueltos los casos de carga, los valores de deformación en la escala k se computaron en el centroide de los elementos dentro del RVE (Hollister y Kikuchi, 1992). Las deformaciones en la escala k se post-procesaron para hallar sus homólogos en la escala $k-1$ usando la primera de las Ecs. (3) a efectos de verificar el valor de ε^0 impuesto.

La Ec. (2) se satisface para cualquiera de los pq casos de carga, esto es,

$$\{\varepsilon_i^k\}^{pq} = [M_{ij}^k] \cdot \{\varepsilon_j^{k-1}\}^{pq}, \quad (15)$$

es decir, el valor de cada componente del tensor de deformaciones en el nivel k para el caso de carga pq es igual a

$$\{\varepsilon_i^k\}^{pq} = [\varepsilon_1^{k-1} \quad \varepsilon_2^{k-1} \quad \varepsilon_3^{k-1} \quad \varepsilon_4^{k-1} \quad \varepsilon_5^{k-1} \quad \varepsilon_6^{k-1}]^{pq} [M_{i1}^k \quad M_{i2}^k \quad M_{i3}^k \quad M_{i4}^k \quad M_{i5}^k \quad M_{i6}^k]^T, \quad (16)$$

donde las componentes del primer vector de la derecha son, por definición, los valores promediados en el volumen para el caso de carga pq respectivo, Ec. (3).

Utilizando la igualdad anterior para cada uno de los pq casos de carga se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma $B=A.X$ de cuya solución se obtiene una de las filas del tensor de localización. Repitiendo la misma operación hasta completar las seis componentes i es posible hallar las 6 filas del tensor de localización. Este procedimiento se implementó empleando un código desarrollado en el entorno MatLab (MathWorks Inc, 2004). Nótese que deben hallarse tantos tensores de localización como elementos existan en el modelo ya que, en su versión discretizada, la Ec. (5) se reemplaza por una sumatoria sobre el volumen de todos los elementos. Finalmente, mediante otro programa desarrollado en MatLab se computó empleando el tensor elástico aparente E^{k-1} .

2.5 Cotas de Voigt y de Reuss

Los dos métodos más sencillos comúnmente empleados para estimar las propiedades efectivas son los de Voigt y de Reuss, (Kanouté et al., 2009). En ellos no se hacen suposiciones específicas acerca de las condiciones de contorno sobre los RVE sino sobre la distribución de deformaciones o tensiones en las fases constituyentes dentro del RVE.

En el modelo de Voigt se supone que la deformación dentro de cada fase dentro del RVE es idéntica, esto es, una deformación constante dentro del RVE. En el modelo de Reuss, en cambio, se supone que la tensión es constante dentro las fases del RVE. Por lo tanto, los tensores de localización de deformaciones para el primero de los modelos y, de localización de tensiones para el segundo, son iguales a la matriz identidad. De este modo, los tensores elástico y de compliancia quedan determinados solamente por las propiedades mecánicas y las fracciones volumétricas de las fases constituyentes según

$$[E_{rve}^{k-1}] = \frac{1}{V_{rve}} \sum_{l=1}^n [E_l^k] [M_l^k] V_l \quad \text{y} \quad [S^{k-1}] = \frac{1}{V_{rve}} \sum_{l=1}^n [S_l^k] [M_l^k] V_l, \quad (17)$$

donde V_l representa el volumen de los elementos del modelo y las demás cantidades fueron definidas previamente.

3 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE LA ESTRUCTURA TRABECULAR

3.1 Adquisición y segmentación de las imágenes

La microtomografía computarizada (mTC) es una herramienta poderosa para el

análisis tridimensional de muestras de de tejido óseo puesto que permite la caracterización cuantitativa de la arquitectura de una muestra con alta resolución en forma no destructiva. En este trabajo se emplearon imágenes obtenidas utilizando equipos Skyscan 1072 (Skyscan Inc. Bélgica).

Se empleó la información de dos estudios de mTC provenientes de muestras que denominaremos Muestra #1 y Muestra #2. La primera corresponde a una porción de una cabeza femoral de un adulto de 61 años (Perilli y Baruffaldi, 2003) y, la segunda se obtuvo de un cráneo vacuno (Silva et al., 2009). Para la construcción de los modelos se emplearon 150 imágenes del primero de los estudios y 750 imágenes del segundo con un tamaño de píxel de $19.5\mu\text{m}$ y $6.62\mu\text{m}$ respectivamente.

El proceso de segmentación constituye un paso crítico para lograr una adecuada representación de la geometría trabecular. En ambas muestras se empleó un proceso de segmentación global, esto es, los parámetros empleados para diferenciar al tejido óseo de la médula/espacio vacío adyacente fueron uniformes sobre cada imagen y, tales parámetros se aplicaron a todas las imágenes que conforman cada estudio. En la Figura 2 se aprecian las imágenes originales de cada estudio: en la imagen de la Muestra #1 se observa al tejido trabecular en gris oscuro las mientras que en la correspondiente a la Muestra# 2 el tejido se aprecia en un tono gris claro.

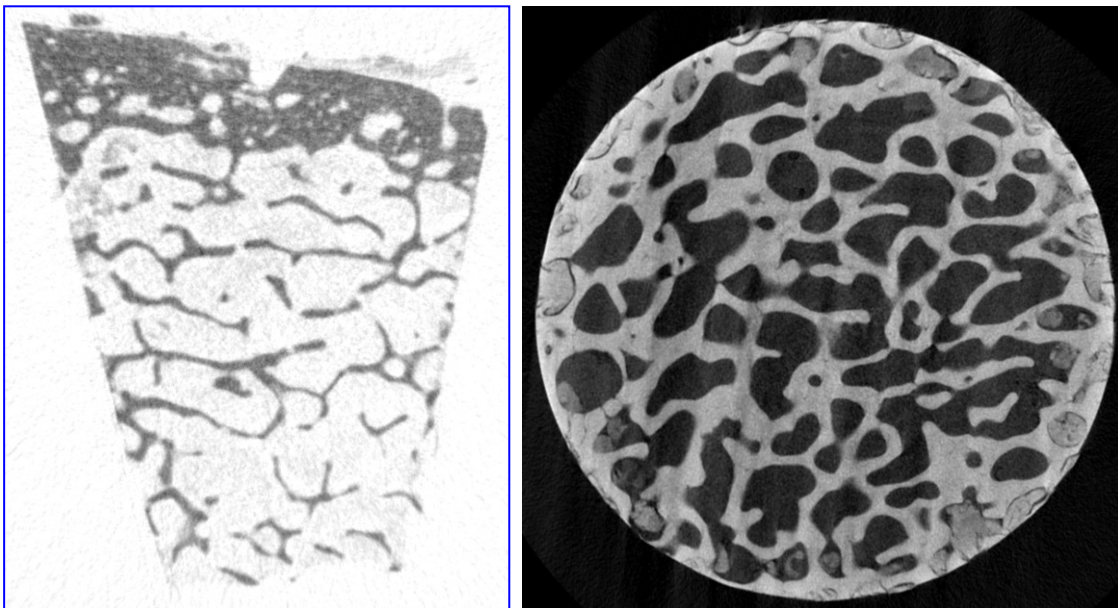


Figura 2: Detalle de dos imágenes empleadas en las reconstrucciones: Muestra#1 (izq.), y Muestra#2 (der.).

En su estado original las imágenes de la Muestra #1 poseían ruido en forma de píxeles negros en la zona de la médula debido al bajo valor del umbral (escala de grises) seleccionado durante el proceso de segmentación. A efectos de eliminarlos, se modificó el contraste y brillo de todas las imágenes que conforman el estudio mediante el software Picasa™ (<http://picasa.google.com/>).

3.2 Binarización de las imágenes de microtomografía computada

Una vez realizada la segmentación de las imágenes es necesario realizar la binarización de las mismas, es decir, la conversión de las imágenes disponibles en escalas de grises a imágenes que contienen únicamente píxeles blancos y negros representando alguna de las fases consideradas. Esta operación y el posterior almacenamiento de las imágenes en formato .tif se efectuó mediante un programa desarrollado a tal efecto en el entorno MatLab.

3.3 Construcción de la nube de puntos

Puesto que para la construcción de estos modelos se requieren varias centenas de imágenes de mTC y, normalmente, idéntica cantidad de píxeles al cuadrado por cada una de ellas, el uso de toda la información disponible implicaría procesar datos de decenas de millones de píxeles por cada modelo. Aún si semejante modelo puede construirse, éste tendría tantas incógnitas que sólo sería posible resolverlo empleando grandes sistemas de cómputo. Por ello y a efectos de minimizar el tamaño del modelo, durante su construcción se define el paso, esto es, cada cuántos píxeles y cada cuántas imágenes se leen los datos.

Con el objeto de incluir solamente hueso trabecular las muestras fueron recortadas digitalmente. Las dimensiones de los modelos resultantes fueron 4.91x4.91x2.81 mm y 4.96x4.96x4.96 mm para los modelos de las Muestras# 1 y 2 respectivamente. Tales dimensiones permiten emplear las hipótesis de la mecánica del continuo en estructuras trabeculares ([Harrigan et al., 1988](#)).

La técnica para discretizar la microestructura fue adaptada del trabajo de [Buroni et al. \(2004\)](#). Ésta comienza con la exploración de las imágenes binarizadas de mTC donde el analista define el tamaño del paso, a modo de ejemplo en la

[Figura 3](#) se muestra una imagen de mTC y un detalle con los píxeles empleados para la construcción de la nube de puntos con un paso igual a seis píxeles. El procedimiento se repite en la dirección del apilamiento de las imágenes aprovechando que la separación entre estas es idéntica al tamaño de píxel. De este modo, sólo se exploran las imágenes del estudio que son múltiplos del paso seleccionado.

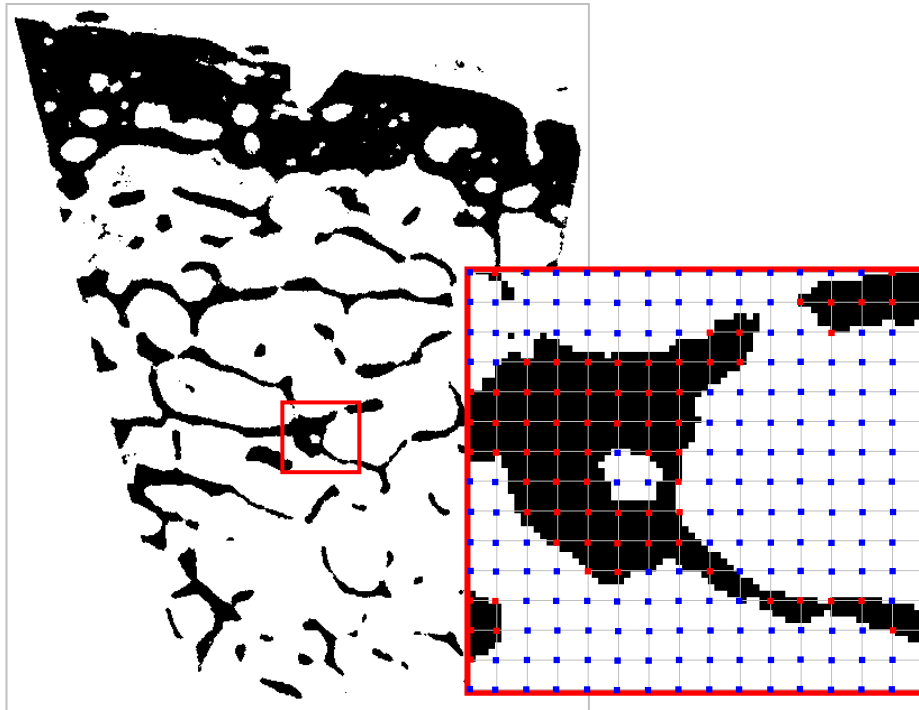


Figura 3: Imagen de mTC y detalle de una región con píxeles empleados en la construcción de la nube de puntos.

La información obtenida mediante la exploración de las imágenes con el paso especificado se almacena en archivos de datos en formato ASCII que contienen las coordenadas de cada uno de los puntos y un valor que identifica el color del píxel que, a su vez, está asociado a una de las fases bajo estudio.

3.4 Generación de la malla de elementos finitos

A partir de los archivos con la información de la nube de puntos se construyó la red de elementos finitos haciendo que cada uno de tales puntos coincida con el vértice de un elemento. Para ello, se emplearon dos estrategias en función del tipo de elemento empleado para la construcción de los modelos: para los modelos discretizados con elementos tetraédricos se utilizó el código MeshSuite (Calvo, 2005) mientras que para los modelos construidos con elementos hexaédricos se usó un código desarrollado por los autores en el entorno MatLab. La salida de estos códigos se almacena en archivos de texto ASCII capaces de ser interpretados por un programa que elimina elementos de volumen nulo (sólo para tetraedros), asigna las propiedades mecánicas a los elementos y escribe archivos en formato .inp que luego pueden ser importados al programa de cálculo Abaqus. Estas operaciones también fueron realizadas con códigos específicos desarrollados en el entorno MatLab. Considerando la excesiva rigidez de los elementos lineales de integración completa, en este trabajo sólo se emplearon elementos de integración reducida.

3.5 Sobre los errores asociados al método de construcción de los modelos

Una de las fuentes de error del método de construcción de los modelos reside en el proceso de segmentación. En este proceso, es el usuario quien define el rango de la escala de grises "que le parece adecuado" para diferenciar el tejido óseo de lo que no lo es. Puede ocurrir que parte del tejido óseo quede por debajo/arriba del rango definido, en ese caso, las imágenes resultan con un defecto en la cantidad de hueso. El caso opuesto también es posible, esto es, que el rango de la escala de grises sea suficientemente amplio como para que los defectos de la imagen o incluso otros tejidos puedan ser confundidos con hueso por lo tanto, las imágenes resultan con hueso por exceso. Estos errores, llamados de segmentación, por defecto o exceso se arrastran hacia la etapa cómputo afectando la estimación de las propiedades mecánicas.

Puesto que en este trabajo se emplearon imágenes de estudios de mTC halladas en la bibliografía (Perilli y Baruffaldi, 2003 y Silva et al., 2009) en los cuales el proceso de segmentación ya había sido efectuado, sólo fue posible corregir el ruido observado en las imágenes del estudio de la Muestra# 1. La calidad y resolución superior de las imágenes de la Muestra# 2 hizo innecesario cualquier ajuste que preceda a la etapa de binarización. Con el objeto de detectar cambios significativos en la fracción volumétrica ósea como consecuencia del proceso de binarización se seleccionaron imágenes binarizadas al azar de ambos estudios que fueron inspeccionadas visualmente y comparadas con las imágenes originales.

Debido al método empleado para la generación de los modelos, y en particular al procedimiento empleado para la construcción de la nube de puntos, los modelos son susceptibles de un error llamado de discretización. Esto es, no todo el contorno de las interfaces es delineado, por cuanto puede existir fase hueso por defecto o exceso en el modelo resultante,

Figura 3. Puesto que este error también es arrastrado a la fase de cómputo y, con el objeto de mitigar sus efectos se implementó un algoritmo que minimiza el error en la fracción volumétrica de una fase elegida por el usuario.

Dicho algoritmo se incorporó al código que asigna las propiedades mecánicas de las fases a los elementos. El criterio empleado para modelos discretizados con tetraedros consistió en asignar las propiedades de una determinada fase a un elemento si y sólo si al menos tres de los cuatro nodos (vértices) de un elemento corresponden a la fase seleccionada. El procedimiento es ligeramente diferente cuando se emplean elementos hexaédricos. En este caso el algoritmo identifica cuál es la fase dominante dentro del dominio del elemento utilizando como patrón de comparación un cubo formado por seis tetraedros, **Figura 4**. Las propiedades de una determinada fase se asignan si y sólo si al menos cinco de los seis tetraedros corresponden a la fase seleccionada. De este modo, el algoritmo de asignación de propiedades opera privilegiando la detección de una u otra fase y por lo tanto, minimizando el error en la fracción volumétrica de la fase elegida.

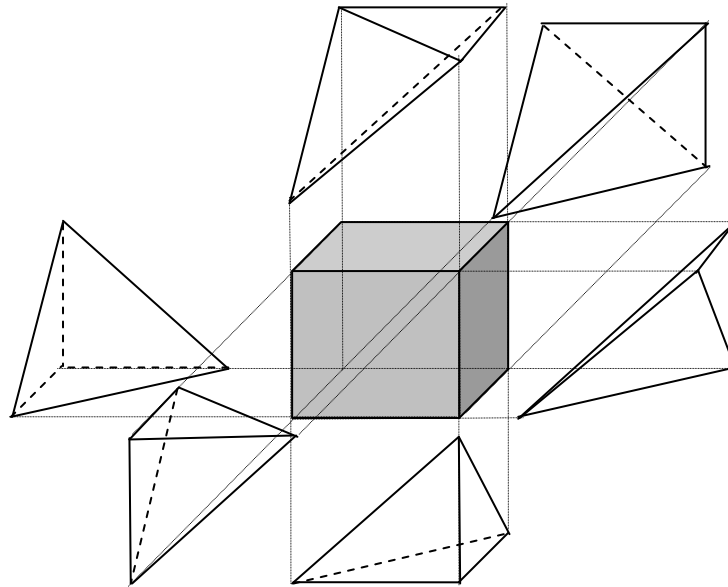


Figura 4: Detalle del elemento patrón y los tetraedros que lo componen.

Con el objeto de cuantificar el error de discretización se estudió el efecto que el tamaño del paso tiene sobre la fracción volumétrica ósea. Para ello se determinó un valor de fracción volumétrica ósea de referencia (FVR) para la Muestra #1. Dicho valor se calculó como el cociente entre el número de píxeles de la fase hueso y número total de píxeles de todas las imágenes empleadas para la construcción de los modelos. Resulta evidente que este valor de FVR es el más preciso que puede calcularse a partir de los datos que resultan de las imágenes de mTC. La FVR fue comparada con las fracciones volumétricas óseas que resultan de discretizar el modelo usando pasos de 6, 5, 4 y 3 píxeles.

Puesto que el error de discretización disminuye con el aumento del número de píxeles leídos a expensas de obtener un modelo computacionalmente más costoso, se analizó la diferencia existente entre las fracciones volumétricas y el número de elementos correspondientes a la fase hueso en modelos construidos con igual número de nodos pero, en los que durante la fase de asignación de propiedades, se selecciona una u otra fase con el objeto de hallar un parámetro cuantitativo que permita obtener un error de discretización bajo y un modelo con un costo computacional accesible.

4 RESULTADOS

La fracción volumétrica de referencia FVR calculada para la Muestra #1 es igual a 0,1774. En la [Tabla 1](#) se reportan los datos de las redes de elementos finitos que resultan de construir los modelos empleando distintos tamaños de paso, priorizando la detección de la fase hueso y la fase vacío. Los modelos se construyeron utilizando tanto elementos tetraédricos como hexaédricos. Para cada modelo se reportan: el número de nodos; el número de elementos de la fase hueso y el número total de elementos. Con estos datos se determinó: la fracción de volumen óseo (FV)

computada como el cociente entre el número de elementos que corresponden a la fase hueso y el número total de elementos del modelo; el error de discretización (ED), calculado como la diferencia porcentual entre la FV y el valor de referencia FVR; y un indicador para la estimación de la calidad de la representación geométrica del modelo (IG) que se definió como la diferencia porcentual entre el número de elementos de la fase hueso que resultan de priorizar la detección de una u otra fase.

Pas o	Tipo de Elemento y Fase	Nro. Nodos	Nro. Elementos Hueso	Nro. Total de Elemento s	FV	ED [%]	IG [%]
6	Tetraedros/vacío	46.225	27.509	248.342	0,11077	-60,219	
	Tetraedros/hueso	46.225	53.301	248.342	0,21462	17,310	48,389
	Hexaedros/vacío	46.225	6.593	42.336	0,15573	-13,963	
	Hexaedros/hueso	46.225	7.767	42.336	0,18346	3,263	15,115
5	Tetraedros/vacío	81.120	55.092	442.263	0,12457	-42,472	
	Tetraedros/hueso	81.120	93.812	442.263	0,21212	16,332	41,274
	Hexaedros/vacío	81.120	12.305	75.429	0,16313	-8,791	
	Hexaedros/hueso	81.120	13.757	75.429	0,18238	2,691	10,555
4	Tetraedros/vacío	155.648	118.031	860.959	0,13709	-29,456	
	Tetraedros/hueso	155.648	178.809	860.959	0,20768	14,546	33,990
	Hexaedros/vacío	155.648	24.692	146.853	0,16814	-5,551	
	Hexaedros/hueso	155.648	26.687	146.853	0,18172	2,339	7,475
3	Tetraedros/vacío	369.800	307.805	2.075.862	0,14828	-19,691	
	Tetraedros/hueso	369.800	418.764	2.075.862	0,20173	12,024	26,497
	Hexaedros/vacío	369.800	60.632	354.025	0,17126	-3,626	
	Hexaedros/hueso	369.800	63.992	354.025	0,18075	1,815	5,250

Tabla 1: Resumen de los datos de los modelos para la Muestra# 1.

La definición del IG se fundamenta sobre el hecho que, para un paso igual a un píxel, el número de elementos asociados a la fase hueso es idéntico sin importar cuál es la fase cuya detección se priorice. En ese sentido, en la [Tabla 1](#) se observa que el IG disminuye conforme se reduce el tamaño del paso para ambos tipos de elementos. Nótese además que, los valores de IG obtenidos con modelos construidos con hexaedros son notablemente menores que los hallados en modelos construidos con tetraedros.

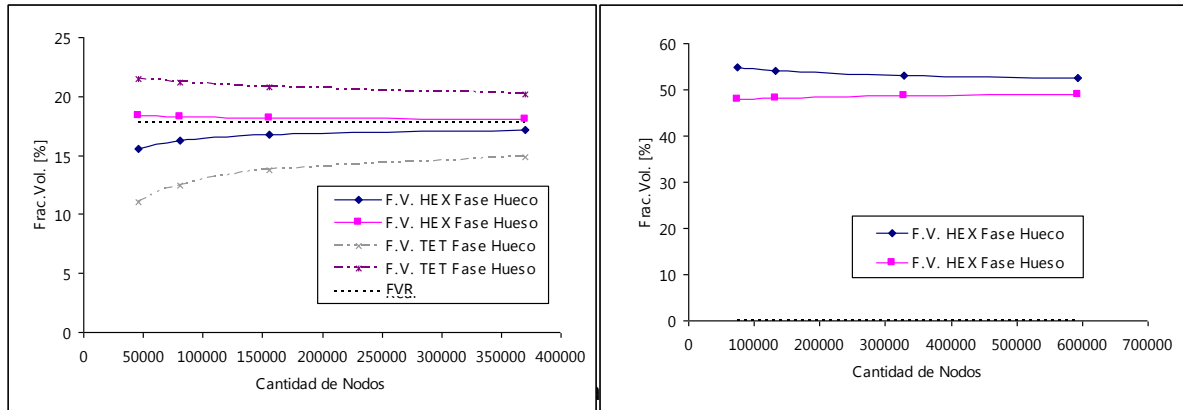
Debido al tamaño y resolución de las imágenes del estudio correspondiente a la

Muestra#2, resulta muy demandante hallar un valor de FVR, por este motivo el error de discretización para esta muestra se acotó utilizando únicamente el valor del IG. Los datos de las redes de elementos finitos para los modelos de la Muestra# 2 se reportan en la [Tabla 2](#).

Pas o	Tipo de Elemento y Fase	Nro. Nodos	Nro. Elementos Hueso	Nro. Total de Elemento s	FV	ED [%]	IG [%]
18	Hexaedros/vacío	74.088	32.969	68.921	0.4784	---	
	Hexaedros/hueso	74.088	37.781	68.921	0.5482	---	12.736
15	Hexaedros/vacío	132.651	60.228	125.000	0.4818	---	
	Hexaedros/hueso	132.651	67.509	125.000	0.5401	---	10.785
11	Hexaedros/vacío	328.509	153.347	314.432	0.4877	---	
	Hexaedros/hueso	328.509	166.920	314.432	0.5309	---	8.131
9	Hexaedros/vacío	592.704	280.570	571.787	0.4907	---	
	Hexaedros/hueso	592.704	300.585	571.787	0.5257	---	6.658

Tabla 2: Resumen de los datos de los modelos para la Muestra# 2.

En la [Figura 5](#) se muestra la evolución de la fracción volumétrica ósea FV, con el número de nodos para ambas muestras. Las curvas en líneas de trazos largos y cortos representan la evolución de la FV para los modelos construidos con tetraedros mientras que las líneas llenas representan los valores homólogos para los modelos construidos con hexaedros. A efectos de comparación, se muestra el valor de referencia FVR para la Muestra# 1. Se aprecia que el error en la discretización, ED, en los modelos construidos con hexaedros es menor que en aquellos construidos con tetraedros. Nótese además que ya sea empleando tetraedros o hexaedros el ED es menor cuando en el algoritmo de asignación de propiedades se selecciona la fase hueso. En los modelos de la Muestra# 1 el error en la FV supera el 12% cuando se emplean tetraedros mientras que se mantiene por debajo del 3.26% cuando se usan hexaedros. Por este motivo, para el análisis de la Muestra# 2 sólo se emplearon elementos hexaédricos.



Componente	Paso en Píxeles Hexaedros de 8 Nodos				Paso en Píxeles Hexaedros de 20 Nodos		
	3	4	5	6	4	5	6
E ₁₁	56,291	48,590	40,191	34,058	61,366	59,427	56,711
E ₁₂	10,944	8,630	6,392	4,757	11,704	10,809	9,740
E ₁₃	17,763	14,497	10,582	7,955	19,101	17,577	16,050
E ₁₄	1,130	1,210	0,795	0,583	1,326	1,366	1,189
E ₁₅	3,368	2,665	1,648	1,176	3,563	3,235	3,044
E ₁₆	6,989	6,304	5,303	4,030	6,883	6,551	5,933
E ₂₂	27,696	24,130	20,246	17,692	30,609	29,316	28,637
E ₂₃	16,058	13,318	10,332	7,742	16,666	15,417	13,746
E ₂₄	-0,170	0,122	0,115	0,204	-0,201	-0,004	-0,113
E ₂₅	8,453	7,343	5,926	4,742	8,379	7,863	7,288
E ₂₆	0,410	0,515	0,388	0,291	0,431	0,398	0,331
E ₃₃	77,721	67,330	53,048	41,847	82,948	78,000	73,192
E ₃₄	2,739	2,576	2,078	1,619	2,652	2,596	2,109
E ₃₅	19,243	16,099	11,991	8,440	19,386	17,746	15,928
E ₃₆	5,846	5,390	4,671	4,142	5,657	5,446	5,095
E ₄₄	11,529	9,758	8,004	6,570	12,273	11,929	11,524
E ₄₅	1,843	1,705	1,295	1,098	1,747	1,578	1,485
E ₄₆	6,423	5,376	4,065	3,097	6,509	5,976	5,476
E ₅₅	18,070	15,789	12,976	10,720	18,899	17,953	17,151
E ₅₆	2,959	2,610	1,985	1,673	2,746	2,647	2,429
E ₆₆	25,135	21,561	17,494	13,843	26,369	25,221	23,836
IG	5,250	7,475	10,555	15,115	7,475	10,555	15,115

Tabla 3: Componentes del tensor elástico computadas para la Muestra# 1.

En virtud de estos resultados, sólo se aplicó el método de homogenización directo a los modelos construidos con elementos hexaédricos en los que las propiedades mecánicas se asignaron priorizando la detección de la fase hueso. Para los modelos

de la Muestra# 1 se emplearon elementos hexaédricos de 8 y 20 nodos mientras que para los modelos de la Muestra# 2, de mayores dimensiones, se emplearon únicamente hexaedros de 8 nodos.

En la [Tabla 3](#) se reportan las componentes halladas del tensor elástico aparente E_{ij}^{k-1} en función del paso para la Muestra# 1. En la última línea se reporta el valor del IG correspondiente a cada modelo. Puesto que el tensor elástico es simétrico sólo se reportan las componentes de la diagonal principal y por encima de esta. La simetría del tensor elástico se verificó comparando los valores hallados para cada una de las componentes simétricas encontrándose diferencias a partir de la sexta cifra significativa.

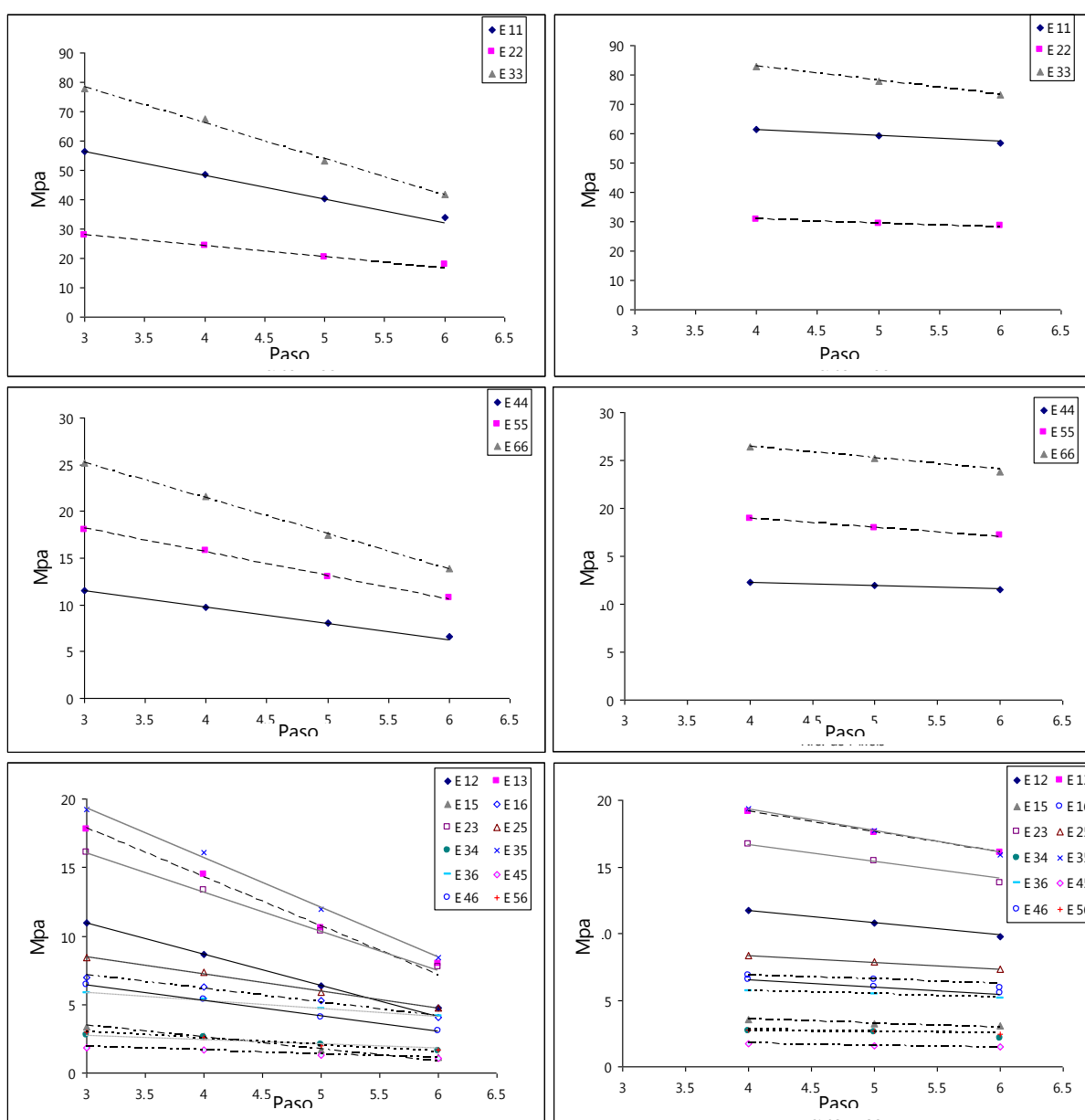


Figura 6: Evolución de las componentes del tensor elástico aparente en función del tamaño de paso, Muestra# 1: modelos construidos con hexaedros de 8 nodos (izq.), modelos construidos con hexaedros de 20 nodos (der.)

En la [Figura 6](#) se ilustra la evolución de las componentes del tensor elástico aparente como función del paso para los modelos de la Muestra# 1 construidos con hexaedros de 8 y 20 nodos. De los resultados de la [Tabla 3](#) se puede inferir que las componentes E_{14} , E_{24} y E_{26} permanecen prácticamente constantes, por este motivo sólo se graficó la evolución del resto de las componentes fuera de la diagonal principal. Para el trazado de las líneas de tendencia de los modelos discretizados con hexaedros de 8 nodos se utilizaron los resultados hallados para tamaño de paso 3,4 y 5. Para los modelos discretizados con hexaedros de 20 nodos, en cambio, se emplearon los resultados de los modelos construidos con un tamaño de paso 4 y 5.

En la [Tabla 4](#) se reporta la evolución de las componentes del tensor elástico aparente E_{ij}^{k-1} en función del paso para los modelos de la Muestra# 2, en la [Figura 7](#) se ilustra la evolución de las componentes del tensor elástico con sus respectivas líneas de tendencia. Debido a la diferencia en la magnitud de las componentes fuera de la diagonal principal se emplearon tres gráficos para mostrar su evolución.

Componente	Paso en Píxeles			
	Hexaedros de 8 Nodos			
	9	11	15	18
E_{11}	346,203	347,790	347,908	351,753
E_{12}	115,743	115,354	114,218	113,658
E_{13}	120,812	120,695	119,087	119,187
E_{14}	35,595	34,850	33,554	32,934
E_{15}	-1,290	-1,673	-2,065	-2,231
E_{16}	-5,840	-5,468	-4,831	-3,881
E_{22}	328,472	328,957	332,132	335,762
E_{23}	117,058	116,867	116,433	116,050
E_{24}	28,857	28,261	27,544	27,278
E_{25}	-2,154	-3,710	-5,393	-5,935
E_{26}	-0,600	-0,638	-0,446	-0,138
E_{33}	356,287	357,382	359,221	361,973
E_{34}	9,144	8,828	8,308	7,849
E_{35}	-2,719	-4,123	-6,270	-6,276
E_{36}	-8,320	-7,795	-6,986	-6,632
E_{44}	116,163	116,231	116,100	116,540
E_{45}	-2,674	-2,607	-2,562	-2,239
E_{46}	-2,465	-2,774	-3,228	-3,227
E_{55}	114,354	114,656	115,050	115,867
E_{56}	13,058	12,855	12,614	12,391
E_{66}	119,097	119,347	118,967	119,733
IG	6,659	8,131	10,785	12,737

Tabla 4: Componentes del tensor elástico computadas para la Muestra# 2.

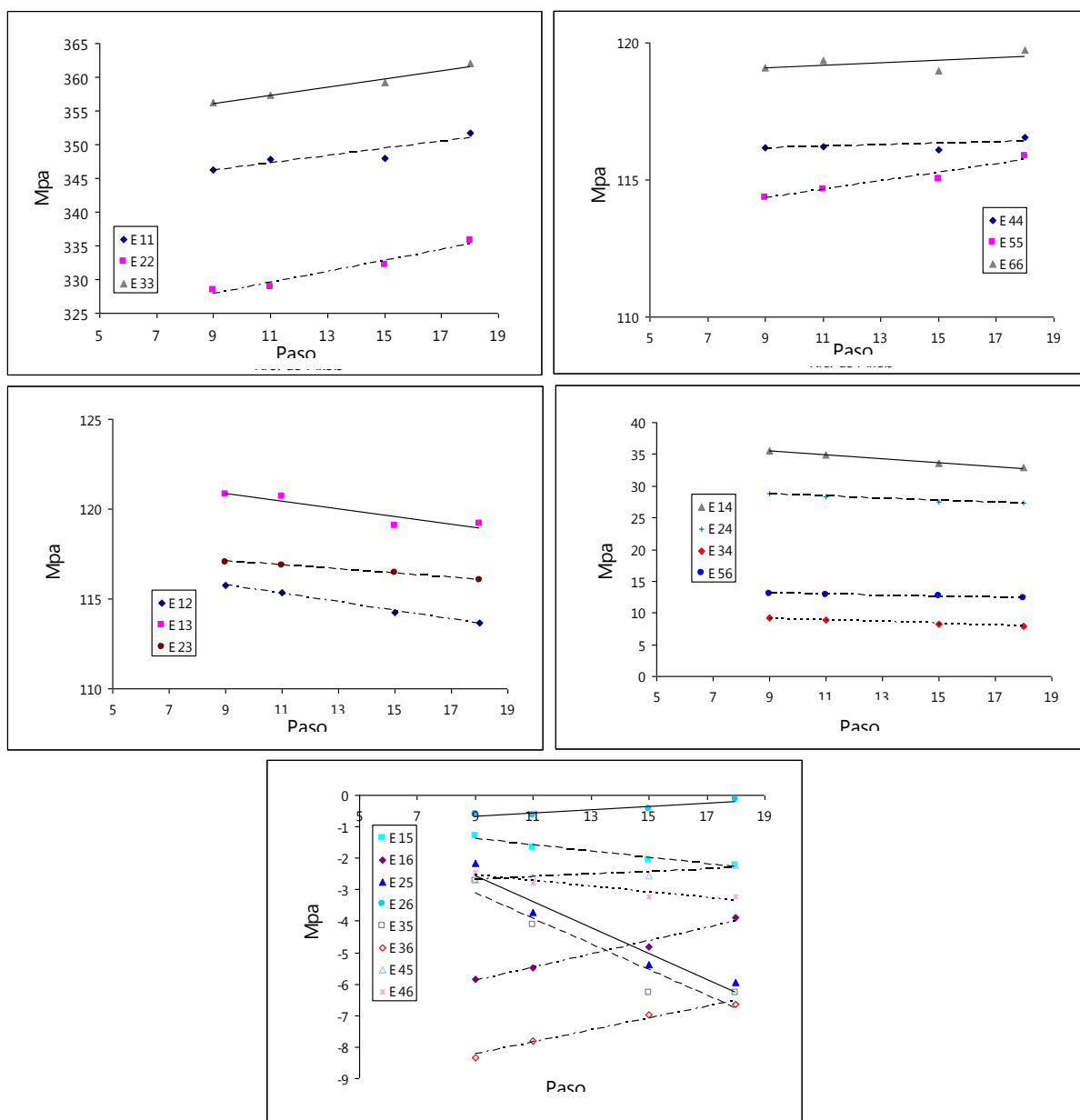


Figura 7: Evolución de las componentes del tensor elástico aparente en función del tamaño de paso, Muestra# 2.

5 DISCUSIÓN

De la observación de los resultados de la [Tabla 1](#) resulta evidente que el error en la discretización es menor cuando se prioriza la detección de la fase hueso. En este caso, y con los parámetros empleados, el error es siempre por exceso de hueso por cuanto se puede inferir que los modelos tendrán un comportamiento más rígido que la realidad bajo las mismas condiciones de contorno.

Un modelo poco detallado puede introducir tanto errores debido a una inadecuada representación geométrica, como también acrecentar aquellos inherentes al método de los elementos finitos. Sin embargo, identificar si un modelo es

representativo de la microestructura que se desea analizar es una tarea difícil. En este trabajo, este problema fue abordado mediante tres métodos: analizando la evolución del error en la fracción volumétrica, ED; mediante la inspección visual de los modelos reconstruidos y; analizando la evolución de la diferencia porcentual entre el número de elementos de la fase hueso que resultan de priorizar la detección de una u otra fase durante la asignación de propiedades, IG.

El error en la discretización considerando únicamente la FV es un pobre indicador de la calidad de la representación geométrica de la microestructura. A modo de ejemplo, en la [Figura 8](#) se comparan dos modelos de la Muestra# 1 en los que se emplearon dos tamaños de paso significativamente diferentes. Se observa que la calidad de la representación geométrica usando pasos pequeños es superior, aún cuando los errores en la FV para ambas muestras son similares (3,263 y 1,815 % respectivamente).

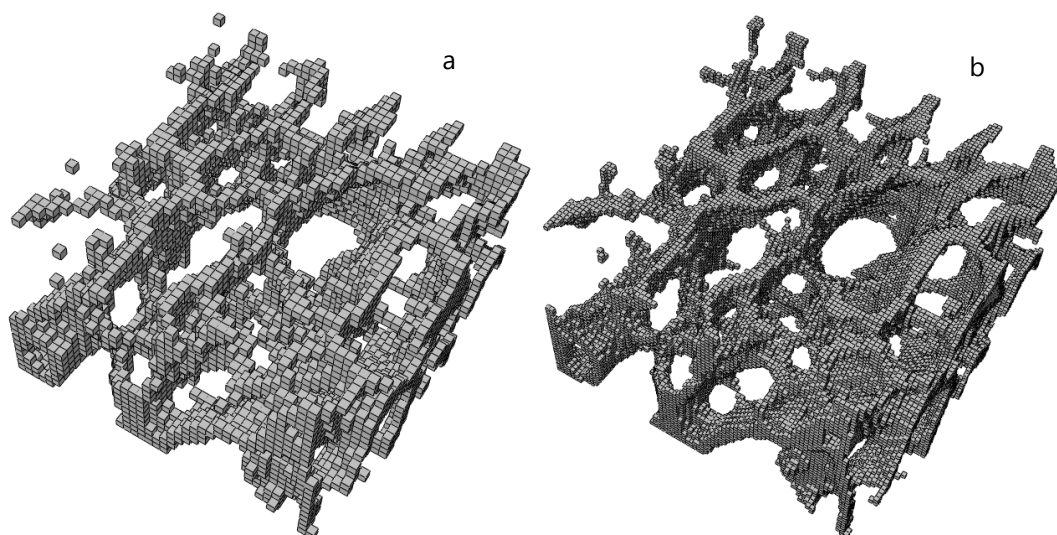


Figura 8: Modelos con elementos hexaédricos de la Muestra #1: (a) paso igual a 6; (b) paso igual a 3.

Hallar los valores de ED para cada modelo implica explorar exhaustivamente los píxeles que forman la región bajo análisis en un estudio de mTC. Ésta es una tarea formidable cuando el tamaño de píxel es pequeño aún en muestras de dimensiones reducidas. Por otro lado, es evidente que un análisis riguroso no debe emplear parámetros cualitativos como la comparación visual de los modelos reconstruidos. Una alternativa, consiste en analizar la evolución del IG y emplearlo como un indicador cuantitativo para evaluar la calidad de la representación geométrica.

Con este último método se determinó que en los modelos de la Muestra# 1 discretizados con tetraedros empleando un paso igual a 6 el IG supera el 48%. Empleando hexaedros la diferencia es menor pero aún supera el 15%. En virtud de lo anterior y lo indicado respecto de la [Figura 8](#), se concluye que los resultados hallados mediante el método de homogenización directa en los modelos de la Muestra# 1 con paso igual a 6 poseen un error considerable. Es por esta razón que los valores de las componentes de los tensores elásticos aparentes hallados mediante el método de

homogenización para estos modelos fueron desestimados al momento de trazar las líneas de tendencia en la [Figura 6](#) y la [Figura 7](#).

En los demás modelos de la Muestra# 1 se observa que el valor de IG hallado para modelos construidos empleando tetraedros es hasta 5 veces el valor obtenido para su homólogo construido con hexaedros. De hecho, la diferencia crece conforme el paso se reduce. Estos resultados se complementan con los obtenidos a partir del análisis del error en la FV (ver [Figura 5](#)) que mostraba que los modelos de hexaedros poseen un error en la discretización menor que aquellos construidos con tetraedros. En los modelos de la Muestra# 2, se obtuvieron valores de IG inferiores al 13%, prácticamente del orden del mayor valor de IG confiable para la Muestra# 1.

Pese a que intuitivamente se espera que un modelo construido con tetraedros represente la microestructura con mayor detalle que uno construido con hexaedros, la evaluación de la calidad de la representación mediante los métodos descritos precedentemente permite inferir que los modelos construidos con hexaedros representan adecuadamente la geometría y minimizan el error en la fracción volumétrica. Por otro lado, desde un punto de vista estrictamente numérico los modelos construidos con hexaedros poseen ventajas sobre los construidos con tetraedros: proveen de una solución de precisión equivalente a un costo computacional menor y, con una tasa de convergencia superior.

[van Rietbergen et al., \(1995\)](#) concluyó, a partir del análisis de muestras de tejido trabecular de tibia humana que, para el cómputo del tensor elástico aparente de la muestra, el tamaño de los elementos no es tan importante si el modelo resulta representativo de la FV. Sin embargo, la FV de las muestras evaluadas es aproximadamente el doble de la correspondiente a la Muestra# 1, por cuanto un pequeño cambio en el tamaño de los elementos no provoca un cambio significativo en la FV. La Muestra# 2, cuya FV es alrededor de 1,5 veces el valor reportado por los mismos autores, resulta más insensible al tamaño de los elementos. Por lo tanto, en virtud de los resultados hallados, el tamaño de los elementos puede influir significativamente en el valor de las constantes elásticas computadas cuando la fracción volumétrica ósea es baja, por cuanto, durante la selección del tamaño de los elementos a emplear se debe considerar, entre otras variables, la FV de la región anatómica bajo análisis.

La existencia de flexión en las trabéculas que componen una muestra de tejido trabecular, incluso bajo cargas axiales, fue observada por [van Rietbergen et al. \(1995\)](#). Puesto que el tamaño de píxel del estudio de mTC de la Muestra# 1 es relativamente grande en comparación con el espesor de las trabéculas y, que la solución obtenida con elementos de integración reducida se ve afectada ante estados de flexión, se emplearon elementos de segundo orden (hexaedros de 20 nodos) a los efectos de verificar las predicciones efectuadas con elementos de primer orden (hexaedros de 8 nodos). Los resultados fueron comparados en términos de la energía potencial elástica almacenada para un estado de deformación en el que todas las componentes del tensor de deformaciones en la escala aparente (ϵ^{k-1}) son iguales a la unidad. Este

enfoque constituye una opción interesante considerando el proceso de adaptación ósea, ya que las teorías de remodelado usualmente requieren del cómputo de la energía elástica (Cowan, 1986 y Mattheck, 1990) y, por otro lado evita efectuar comparaciones componente a componente entre los tensores computados. De este modo, se determinó que la diferencia en la energía potencial almacenada E_c (7) usando elementos de primer y segundo orden difiere en un 4,74 % en los modelos construidos con un paso igual a 3.

En la Figura 6 se muestra que la evolución de las componentes del tensor elástico parece responder a una evolución lineal sin importar el orden de los elementos empleados. Pese a que los resultados están afectados por errores de discretización en distinto grado, se determinó el valor de las componentes del tensor elástico de las muestras extrapolando linealmente hacia un tamaño de paso nulo. Los resultados hallados de este modo también muestran discrepancias entre las predicciones efectuadas considerando los modelos discretizados con elementos de 8 y 20 nodos. No obstante, la diferencia en la energía potencial almacenada es de tan sólo un 13,73%.

Los resultados permiten inferir que, una vez acotados los errores asociados a la representación geométrica, los resultados que se obtienen extrapolando linealmente empleando elementos de 8 o 20 nodos no difieren significativamente. Los tensores elásticos aparentes calculados de este modo son:

$$E_{8\text{ nodos}}^{\text{Ext. Lineal}} = \begin{bmatrix} 80,56 & 17,76 & 28,64 & 1,72 & 6,00 & 10,10 \\ 17,76 & 38,92 & 24,69 & -0,55 & 12,29 & 0,48 \\ 28,64 & 24,69 & 115,38 & 3,79 & 30,28 & 7,65 \\ 1,72 & -0,55 & 3,79 & 16,81 & 2,71 & 9,82 \\ 6,00 & 12,29 & 30,28 & 2,71 & 25,80 & 4,47 \\ 10,10 & 0,48 & 7,65 & 9,82 & 4,47 & 36,68 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E_{20\text{ nodos}}^{\text{Ext. Lineal}} = \begin{bmatrix} 69,12 & 15,28 & 25,20 & 1,16 & 4,88 & 8,21 \\ 15,28 & 35,78 & 21,66 & -0,99 & 10,44 & 0,57 \\ 25,20 & 21,66 & 102,74 & 2,88 & 25,95 & 6,50 \\ 1,16 & -0,99 & 2,88 & 13,65 & 2,43 & 8,64 \\ 4,88 & 10,44 & 25,95 & 2,43 & 22,68 & 3,14 \\ 8,21 & 0,57 & 6,50 & 8,64 & 3,14 & 30,96 \end{bmatrix}$$

En virtud de los resultados calculados para la Muestra# 1, para la evaluación de la Muestra# 2 sólo se emplearon elementos de 8 nodos. Los resultados hallados se muestran en la Tabla 4 y la Figura 7. Se observó que la evolución de las componentes del tensor elástico, pese a sus pequeñas oscilaciones, puede ajustarse linealmente. Las pendientes de las líneas de tendencia son en algunos casos tan bajas que permiten inferir que las componentes E_{66} , E_{44} , E_{56} , E_{26} , E_{45} y E_{46} son constantes, ver Figura 7. De la comparación de la energía potencial almacenada calculada para los tensores elásticos aparentes obtenidos con el modelo construido con un paso igual a 9 y el hallado extrapolando linealmente hasta tamaño de paso nulo difiere en un 0,39%.

Las discrepancias entre los resultados de la extrapolación y las estimaciones del modelo con un paso igual a 9 son realmente bajas. Esto puede deberse a que el tamaño del elemento permite discretizar con al menos 4 elementos el espesor de las trabéculas, permitiendo que los elementos capturen los efectos de la flexión y, a que la simetría material presenta características cercanas a la ortotropía. Este aspecto está aún bajo análisis pero no debería afectar significativamente las conclusiones del

presente estudio.

Puesto que los resultados determinados mediante los métodos tradicionales de Reuss y Voigt dependen de la fracción volumétrica FV y ésta varía con el paso, sólo se reportan las cotas halladas considerando las FV de los modelos con el menor de los pasos. Para la Muestra# 1 las cotas de Voigt y Reuss son

$$E_{Voigt} = \begin{bmatrix} 243,32 & 104,28 & 104,28 & 0 & 0 & 0 \\ 104,28 & 243,32 & 104,28 & 0 & 0 & 0 \\ 104,28 & 104,28 & 243,32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 69,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 69,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 69,52 \end{bmatrix} \quad y \quad E_{Reuss} = \begin{bmatrix} 1,22E^{-5} & 8,08E^{-15} & 8,08E^{-15} & 0 & 0 & 0 \\ 8,08E^{-15} & 1,22E^{-5} & 8,08E^{-15} & 0 & 0 & 0 \\ 8,08E^{-15} & 8,08E^{-15} & 1,22E^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,10E^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,10E^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,10E^{-6} \end{bmatrix}$$

respectivamente. Mientras que para la Muestra# 2 son

$$E_{Voigt} = \begin{bmatrix} 707,66 & 303,29 & 303,29 & 0 & 0 & 0 \\ 303,29 & 707,66 & 303,29 & 0 & 0 & 0 \\ 303,29 & 303,29 & 707,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 202,19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 202,19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 202,19 \end{bmatrix} \quad y \quad E_{Reuss} = \begin{bmatrix} 1,25E^{-5} & 9,49E^{-15} & 9,49E^{-15} & 0 & 0 & 0 \\ 9,49E^{-15} & 1,25E^{-5} & 9,49E^{-15} & 0 & 0 & 0 \\ 9,49E^{-15} & 9,49E^{-15} & 1,25E^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,26E^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,26E^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,26E^{-6} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto los valores determinados numéricamente se encuentran dentro de las cotas halladas mediante los métodos tradicionales de Voigt y Reuss. Resulta evidente que el rango impuesto por las cotas de Voigt y Reuss es tan amplio que limita su uso práctico.

En este trabajo se propone utilizar al IG para evaluar la calidad de la representación geométrica de los modelos cuantitativamente. Este indicador puede emplearse, junto a otras variables, para seleccionar el tamaño de los elementos de los modelos de forma tal que se minimicen los errores de discretización y de representación geométrica hasta valores que permitan resolver los modelos resultantes con la capacidad de cómputo disponible. En el presente estudio se determinó que un valor de IG inferior al 10% es adecuado para ambas muestras.

6 CONCLUSIONES

En virtud de los resultados se demostró que, con el método de construcción empleado, el error de discretización es menor cuando se prioriza la detección de la fase hueso y la discretización se realiza con elementos hexaédricos.

Se determinó el tensor elástico aparente de muestras de hueso trabecular mediante el método de homogenización directa y se verificó que los valores computados se encuentran dentro de las cotas de Voigt y Reuss. Se observó que, en modelos que representan adecuadamente la geometría y cuando el error de discretización se mantiene bajo, la evolución de las componentes del tensor elástico aparente responde de una forma prácticamente lineal con la disminución del paso. No se observaron diferencias significativas en los valores de la energía almacenada efectuando una regresión lineal a tamaño de paso nulo entre los resultados hallados

con modelos construidos con elementos hexaédricos de 8 y 20 nodos. Estos resultados permitirían emplear dos modelos de elementos lineales con errores de representación y discretización bajos para hallar el tensor elástico aparente de muestras de tejido trabecular sin la necesidad de convertir todos los vóxeles de un estudio de mTC en hexaedros, disminuyendo el costo computacional de los modelos.

Se propone la utilización del IG, definido como la diferencia porcentual entre los números de elementos de la fase hueso que resultan de priorizar la detección de hueso y vacío durante el proceso de discretización, como un indicador de la calidad de la representación geométrica del modelo. Para las muestras evaluadas, se determinó que un valor de IG del 10 % garantiza una adecuada representación geométrica de los modelos. A efectos de generalizar el uso de este parámetro, es necesario aplicar la técnica a muestras de otras regiones anatómicas para verificar este resultado.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Dr. Nestor Calvo del CIMEC por facilitar el código MeshSuite con el que se construyeron los modelos de tetraedros y al Prof. Marcos Alves por facilitar las imágenes de microtomografía computada. Este trabajo fue financiado por la ANPCyT (PICT 1154) la Universidad Nacional de Mar del Plata y el CONICET.

REFERENCIAS

- Buroni, F., Comisso, P., Cisilino, A., Sammartino, M., Determinación de las constantes elásticas anisótropas del tejido óseo utilizando tomografías computadas, En: *Proceedings of XIV ENIEF 2004*, S. C. de Bariloche, Noviembre, 2004.
- Calvo, N.A., Generación de mallas tridimensionales por métodos duales. Disertación de Doctorado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, 132p., abril, 2005.
- Cowin, S.C., Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *Journal of Biomechanical Engineering*, 108:83-88, 1986.
- Ching-Chang, Ko., Kohn, D.H., Hollister, S.J., Effective anisotropic elastic constants of bimaterial interphases: comparison between experimental and analytical techniques. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 7:109-117, 1996.
- Dorr, L.D., Lockett, M., Conaty, P., Total Hip Arthroplasties in Patients Younger Than 45 Years – A nine to ten-year follow-up study –. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 260: 215-219, 1990.
- García Aznar, J.M., Modelos de Remodelación Ósea: Análisis Numérico y Aplicaciones al Diseño de Fijaciones de Fracturas del Fémur Proximal. *Disertación de Doctorado*, Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 319 p., septiembre, 1999.
- Harrigan, T.P., Jasty, M., Mann, R.W., Harris, W.H., Limitations of the continuum assumption in cancellous bone. *Journal of Biomechanics*, 21:269-275, 1988.

- Hart, R.T., Bone Modeling and Remodeling: Theories and Computation, En: *Bone Mechanics Handbook*. CRC Press, 2001.
- Hashin, Z., Analysis of composite materials - A survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50:481-505, 1983.
- Hollister, S., Kikuchi, N., A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Computational Mechanics*, 10:73-95, 1992.
- Hollister, S. J., Kikuchi, N., Homogenization Theory and Digital Imaging: A Basis for Studying the Mechanics and Design Principles of Bone Tissue. *Journal of Biotechnology and Bioengineering*, 1994.
- Ibarra Pino, A., Cislino, A., Análisis Multiescala para la estimación del comportamiento elástico de una muestra de tejido trabecular, *1st Workshop Argentino en Modelado Multiescala de Materiales*, Bs. As., Abril, 2010.
- Kabel, J., van Rietbergen, B., Dalstra, M., Odgaard, A., Huiskes, R., The role of an effective isotropic tissue modulus in the elastic properties of cancellous bone. *Journal of Biomechanics*, 32:673-680, 1999.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I. Mounoury, V., Jeulin, D., Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40: 3647-3679, 2003.
- Kanouté, P., Boso, D.P., Chaboche, J.L., Schrefler, B.A., Multiscale methods for composites: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16:31-75, 2009.
- Keaveny, T.M., Morgan, E.F., Niebur, G.L., Yeh, O.C., Biomechanics of trabecular bone. *Annual review of biomedical engineering*, 3:307-333, 2001.
- MatLab, The language of Technical Computing, *User's Manual*. MathWorks Inc., 2004.
- Mullender, M.G., Huiskes, R., Weinans, H., A physiological approach to the simulation of bone remodeling as a self-organizational control process. *Journal of Biomechanics*, 27:1389-1394, 1994.
- Perilli, E., Baruffaldi, F., Proposal for shared collections of X-ray microCT datasets of bone specimens, En: *Proceedings of the ICCB03*, Zaragoza, Septiembre, 2003.
- Silva, A.M.H., Alves J.M., da Silva O.L., Silva Junior, N.F., Gazziro M., Pereira J.C., Lasso, P.R.O., Vaz C.M.P., Pereira, C.A.M., Leiva, T.P., Guarniero, R., Análise microestrutural óssea trabecular utilizando microtomografía tridimensional, En: *Proceedings of XVII Congreso Argentino de Bioingeniería, SABI 09*, Rosario, Octubre, 2009.
- Simulia, Abaqus User's Manual, *Abaqus Version 6.7.1*, Dassault Systèmes, 2007.
- van Rietbergen, B., Weinans, R., Huiskes, R., Odgaard, A., A new method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite-element models. *Journal of Biomechanics*, 28:69-81, 1995.
- Mattheck, C: Design and growth rules for biological structures and their application to engineering. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials&Structures*, 13:535-550, 1990.
- Zohdi, T.I., Wriggers, P., *Introduction to Computational Micromechanics*. Springer, 2005.