

SOBRE EL TRATAMIENTO MATEMÁTICO DE PROBLEMAS GEOMECÁNICOS MULTIFÁSICOS

Beneyto, Pablo A.^a, Di Rado, H. Ariel^a, Mroginski, Javier L.^{a,b} y Awruch,
Armando M.^c

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste, Av Las Heras 727, 3500 Resistencia, Chaco. Argentina, pbeneyto@ing.unne.edu.ar*

^b*CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas*

^c*Centro de Mecánica Aplicada y Computacional (CEMACOM), Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Av Osvaldo Aranha 99, 3er Andar, Porto Alegre (RS), Brasil*

Palabras Clave: transporte de poluentes, consolidación no saturada, elementos finitos, relación succión-saturación, flujo multifásico.

Resumen. El objetivo principal del presente trabajo es presentar un marco matemático para el modelado multifásico del proceso de consolidación de suelos con transporte de contaminantes basados en configuraciones de estados de tensiones, haciendo énfasis en sus condiciones de versatilidad.

Si bien los modelos matemáticos para la solución de consolidación de medios porosos representan un tema ampliamente estudiado en mecánica computacional moderna, en el presente artículo se ponen en consideración dos innovaciones en la descomposición de estado de esfuerzos: la adición de una fase de contaminantes inmiscibles con el sistema de tres fases descritas en trabajos anteriores y la introducción de una función simple ponderada que permiten utilizar la curva característica succión-saturación de cada componente individual en lugar de utilizar una curva de mezcla de fluidos. Este enfoque matemático mejorado, además de abarcar una amplia gama de problemas de consolidación isotérmica, hereda la ductilidad del modelo de tres fases anteriormente desarrollado que permite una reducción directa a otros sistemas más restrictivos, pudiendo ser entendido como una aplicación de la ley de Darcy para medios porosos con flujo multifásico.

1. INTRODUCCION

El análisis de consolidación en suelos no saturados sin efectos térmicos es de gran interés para las construcciones civiles como edificios y presas de tierra, especialmente cuando la zona de ubicación se encuentra en la región noreste de Argentina o el sur de Paraguay y Brasil. En estos lugares, muchas ciudades importantes están situadas en el valle de antiguos ríos, donde suele encontrarse arcilla, limo o incluso arena con un grado de saturación mayor al 70 % (por lo general debido a la posición del nivel freático). Junto al problema clásico de consolidación de suelos arcillosos, se plantea una nueva situación en esta región del mundo, posiblemente debido a la localización de nuevas industrias: los daños ambientales. Estos hechos y la posibilidad de ampliar el código desarrollado previamente fueron las principales motivaciones para el presente trabajo.

Los modelos matemáticos para resolver el fenómeno de consolidación en medios porosos representan un tema ampliamente estudiado en la mecánica computacional moderna. Desde los primeros trabajos de Biot, a las complejas formulaciones actuales, se consideraron una amplia gama de situaciones mecánicas, condiciones térmicas, fluidos transportados, condiciones de contorno y tipos de carga. Los casos no saturados bifásicos y trifásicos fueron abordados por [Ghaboussi y Kim \(1984\)](#) y [Lewis y Schrefler \(1987\)](#), respectivamente. El análisis no isotérmico de modelos saturados está incluido en ([Masters et al., 2000](#)), mientras que en ([Yang et al., 1998](#)), el caso se extiende al caso no saturado.

En cuanto a la mecánica geoambiental, distintos autores han abordado esta cuestión desde diferentes puntos de vista, aspectos e hipótesis. En ([Li y Zienkiewicz, 1992](#)), se presenta el transporte de fluidos a través de medios porosos, en una o dos fases separadas por una interfase sin reacciones químicas o componentes de intercambio entre las fases. En ([Schrefler, 2001](#); [Mroginski et al., 2010](#)), se presenta el marco matemático de un sistema multifásico con poros llenos de agua, vapor de agua, aire seco y sustancias contaminantes, basándose en las teorías de mezclas de [Hassanizadeh y Gray \(1979, 1980\)](#). En ([Lewis y Schrefler, 1998](#)) se consideran las propiedades termodinámicas de la interfase entre los distintos elementos constitutivos de medios porosos y, además, se analiza cuidadosamente la relación entre la tensión superficial de interfases y la presión capilar.

En cuanto al modelo constitutivo, [Alonso et al. \(1998\)](#) llevaron a cabo el desarrollo de modelos para suelos arcillosos parcialmente saturados teniendo en cuenta la plasticidad y utilizando dos conjuntos independientes de variables de tensiones: el exceso de presión del poro de aire y la succión. Un modelo basado en ensayos triaxiales a succión controlada fue presentada por [Sun et al. \(2003\)](#), mientras que [Graziano y Lancellotta \(2003\)](#) analiza la derivación de evolución de una ecuación constitutiva para medios porosos deformables.

Un enfoque matemático para medios parcialmente saturados isotérmicos basado en una descomposición de estados de tensiones aunque sin los efectos del acoplamiento de la saturación y la succión inducida fue presentado por [Khalili y Khabbaz \(1995\)](#). Esta cuestión, fue objeto de gran controversia, en ([Di Rado et al., 2009](#)) se solucionaron apropiadamente los efectos de la alta no linealidad que generan el acoplamiento succión-saturación al modelo constitutivo y su influencia en la pérdida de la simetría en el sistema principal de ecuaciones para el caso isotérmico. También se abordó, a través de la inclusión de las interacciones mencionadas, una ampliación del marco matemático presentado en ([Khalili y Khabbaz, 1995](#)), que, a su vez, puede ser utilizada para determinar el costo computacional que implica la consiguiente pérdida de la simetría. En el presente artículo, se ponen a consideración dos innovaciones al modelo basado en la descomposición de estado de

esfuerzos: La adición de una fase de contaminantes inmiscibles al sistema de tres fases descritas en (Di Rado et al., 2009) y la introducción de una función simple ponderada que permite utilizar las curvas de saturación de succión para los componentes individuales en lugar de utilizar una curva de la mezcla de fluidos. Este enfoque matemático mejorado, permite ser reducido a otros más restrictivos, sin embargo más fáciles de resolver, como el caso saturado, el no saturado sin acoplamiento de la succión, la consolidación sin presencia de contaminantes, la consolidación con presencia de contaminantes, pero sin acoplamiento de succión, etc., al limitar convenientemente algunos coeficientes al valor requerido.

Con respecto al comportamiento mecánico de la masa de suelo, para el presente artículo y por razones de simplicidad, se considera un modelo elástico, sin embargo, siempre que las restricciones establecidas en (Di Rado et al., 2009) sean consideradas, puede adoptarse un modelo elastoplástico sin mayores esfuerzos.

Se asume que los componentes del suelo son químicamente inertes (no reaccionan entre sí), considerándose además un equilibrio termodinámico local, de esta manera la temperatura en un punto del medio multifásico será igual para cada componente. Esto no quiere decir que la temperatura de todo el medio debe ser uniforme, pudiendo definirse el estado termodinámico en cada punto conociendo el valor de la temperatura en un componente.

Se tiene en cuenta la interfase entre los diferentes componentes del medio, considerando que cualquier fluido del medio poroso permanecerá inmisible solo si no hay tensión superficial en la interfase, dado que si la tensión superficial es nula, la presión capilar se anula también, con lo cual la presión del fluido permanecerá constante.

2. ECUACIONES DE GOBIERNO

2.1. Introducción

En el análisis mecánico clásico, se acepta frecuentemente como válida una distribución continua de partículas existentes, ya sea líquido o sólido para las cuales las leyes equilibrio y relaciones constitutivas son válidas. Para el caso que nos ocupa, hay una fase omnipresente: la fase sólida o esqueleto sólido, cuyos huecos se consideran llenos de fluido (gas o líquido), separadas por una interfase denominada membrana. Hay que diferenciar entre componentes y fases: las fases son porciones químicamente homogéneas del sistema multifásico, cuyo comportamiento mecánico se supone uniforme. Por otra parte, las componentes son las partes individuales que dan lugar a las diferentes fases, pero actuando cada una en forma independiente.

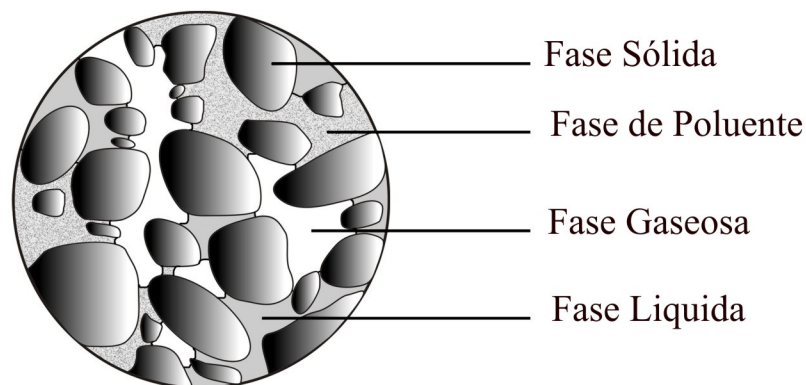


Figura 1: Volumen elemental representativo de un medio multifásico a escala microscópica

Hay dos niveles posibles para describir la configuración de medios multifásicos granulares: El nivel macro y el microscópico. A un nivel microscópico se considera la estructura real de medios porosos (ver Fig. 1) y, debido a esta situación, las ecuaciones que gobiernan se establecen considerando cada componente por separado, lo que genera una solución complicada. Teniendo en cuenta estas razones y agregando que la descripción microscópica está generalmente más allá de los objetivos de la ingeniería civil, adoptándose para el presente trabajo una descripción macroscópica, debido especialmente a que una característica destacable de este enfoque es el hecho de que, en cada punto material, todas las fases se suponen que están presentes simultáneamente, lo que a su vez, se presta a una idealización fácil de la estructura. Esta idealización puede llevarse a cabo basándose en diferentes puntos de vista. En el presente trabajo, se siguen los lineamientos generales propuestos originalmente en (Khalili y Khabbaz, 1995) y posteriormente modificada por Di Rado et al. (2009) sin embargo, otras modificaciones se deben introducir para considerar la presencia de una o más fases de contaminantes.

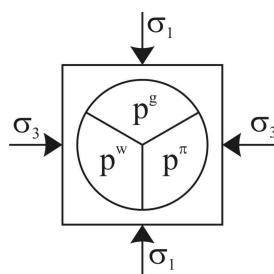


Figura 2: Esquema representativo de volumen diferencial de suelo

La Fig. 2 resume una parte representativa de medios porosos con su volumen de vacíos dividido en tres partes, con cada uno de ellos lleno de agua, gas (normalmente aire) y poluentes. Los componentes de fuerzas exteriores representan la acción de la porción eliminada del suelo, del mismo modo p^w , p^g y p^π representan las presiones en los diferentes volúmenes de poros (agua, aire y poluente, respectivamente). Aunque se la considera, por una cuestión de simplicidad no se representa la componente de tensión externa normal al plano de papel. En la Fig. 3, se descompone convenientemente el estado de tensiones representado en la Fig. 2 en varios estados diferentes que finalmente, dan lugar a la sustentabilidad de todo el enfoque.

2.2. Ecuaciones constitutivas

El balance de momento lineal y las ecuaciones de conservación de la masa no son suficientes para obtener las distintas presiones que actúan en la parte del suelo se describe en la Fig. 2, por lo tanto se agregan ecuaciones constitutivas sólido-fluido, requiriéndose la utilización del concepto de tensión efectiva aunque modificado para suelos no saturados. Por lo tanto, la presión de los poros (aire, agua y poluente), la tensión total y el tensor de tensiones efectivas nos conduce a la siguiente expresión (usando la notación indicial).

$$d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij} - a_1 dp^w \delta_{ij} - a_2 dp^\pi \delta_{ij} - a_3 dp^g \delta_{ij} \quad (1)$$

siendo σ'_{ij} la tensión efectiva, dp^w , dp^g y dp^π los diferenciales de las presiones de poros de agua, aire y poluente, respectivamente, y a_1 , a_2 y a_3 son los parámetros de tensiones

efectivas. Esta ecuación puede también ser expresada en término de derivadas del tiempo, como:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_2 \dot{p}^g \delta_{ij} - a_3 \dot{p}^\pi \delta_{ij} \quad (2)$$

La existencia de esta ecuación no se basa sólo en una división conveniente de las tensiones, sino que está fundamentado en investigaciones termodinámicas de medios porosos y geomecánica del medio ambiente. Con el fin de juzgar el valor de los parámetros a_1 , a_2 y a_3 , es necesario introducir algunos conceptos específicos de tensiones de mayor relevancia en el análisis no saturado, estos son los de succión de agua, succión de poluentes y tensión normal neta representada por $dp^{cw} = dp^g - dp^w$, $dp^{c\pi} = dp^g - dp^\pi$ y $p^n = \bar{\sigma} - dp^g$, con $\bar{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ respectivamente, que se utilizan comúnmente para describir el comportamiento mecánico del suelo no saturado con fases de fluido de agua y poluente. La siguiente figura muestra una descomposición aditiva del estado de tensiones indicado en la Fig. 2 con un aspecto notable: todas las variables antes mencionadas, es decir, p^{cw} , $p^{c\pi}$ y $(\bar{\sigma} - p^g)$, surgen en algunos de los estados de tensiones componentes.

Estos diferentes estados de tensiones, aunque aparentemente arbitrarios han sido diseñados con el fin de proporcionar un significado físico a los parámetros buscados.

Con el objeto de definir a_1 , a_2 y a_3 a partir de parámetros físicos, se descompone el tensor de tensiones actuante sobre un elemento representativo de suelo no saturado multifásico en siete componentes, según lo indicado en Fig. 3, (por una cuestión de simplicidad, no se grafica σ_2 , componente normal al plano del tensor de tensiones)

El Componente 1 corresponde a una presión del poro de agua, poro de poluente, poro de gas y externa isotrópica igual a externa p^w . Los componentes 4 y 5 son similares a 1, pero con presiones de poro y exterior isotrópica iguales a las presiones de poluente y aire respectivamente. El Componente 2 corresponde a una presión del poro de poluente, poro de gas y externa isotrópica igual a externa $p^g - p^w$ y presión del poro de agua igual a cero. El Componente 3 corresponde a una presión del poro de agua, poro de gas y externa isotrópica igual a externa $p^g - p^\pi$ y presión del poro de poluente igual a cero. El Componente 6 corresponde a una presión del poro de agua, poro de poluente y poro de gas igual a cero y una carga externa isotrópica igual $\bar{\sigma} - p^g$. El Componente 7 corresponde a una presión del poro de agua, poro de poluente y poro de gas igual a cero y una carga externa isotrópica igual al tensor desviador.

A partir de esta figura podrá escribirse la deformación volumétrica como la suma de los componentes antes mencionados

$$\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^{(1)} + \epsilon_{ii}^{(2)} + \epsilon_{ii}^{(3)} + \epsilon_{ii}^{(4)} - \epsilon_{ii}^{(5)} + \epsilon_{ii}^{(6)} + \epsilon_{ii}^{(7)} \quad (3)$$

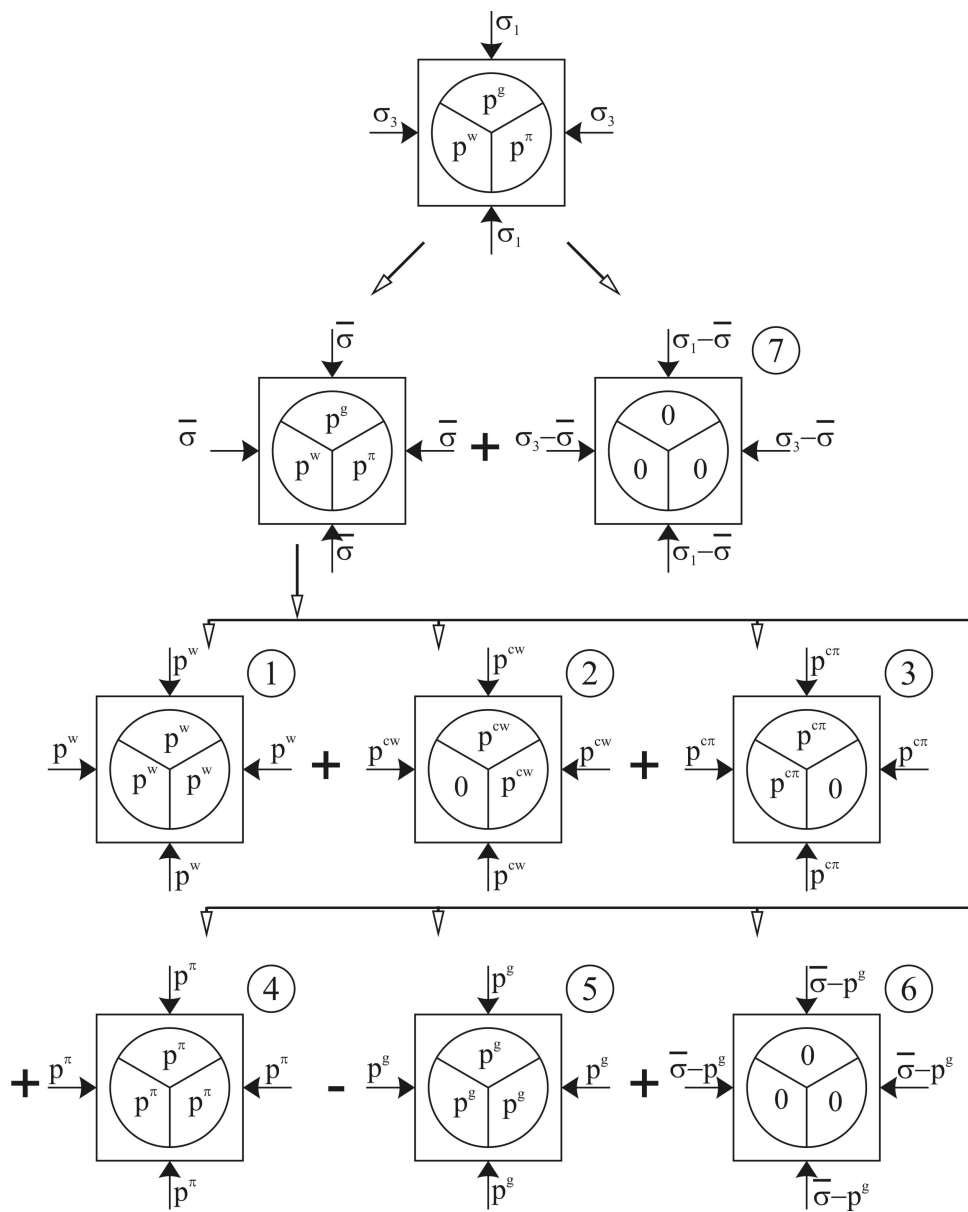


Figura 3: Descomposición del estado de tensiones de un elemento representativo de un medio poroso multifásico

Siendo:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ii}^{(1)} &= c_s p^w \\
 \epsilon_{ii}^{(2)} &= c_{mw} (p^g - p^w) \\
 \epsilon_{ii}^{(3)} &= c_{m\pi} (p^g - p^\pi) \\
 \epsilon_{ii}^{(4)} &= c_s p^\pi \\
 \epsilon_{ii}^{(5)} &= c_s p^g \\
 \epsilon_{ii}^{(6)} &= c_s (\bar{\sigma} - p^g) \\
 \epsilon_{ii}^{(7)} &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde $c_{mw} = \frac{1}{K_{mw}}$ es la compresibilidad de la estructura de suelo con respecto a un cambio en la succión de agua p^{cw} , ($p^{cw} = p^g - p^w$). Siendo:

$$K_{mw} = \frac{K_T K_s}{S_w K_s + \frac{S_w}{S_f} S_g K_T + \frac{S_\pi}{S_f} K_T} \tag{5}$$

donde S_w, S_π, S_g y $S_f = S_w + S_\pi$ son las saturaciones de las fases de agua, poluente, aire y fluido, respectivamente. Considerando que $S_w = V_w/V_v$, $S_\pi = V_\pi/V_v$ y que $S_g = V_g/V_v$ donde V_w , es el volumen del poro de agua, V_π , es el volumen del poro de poluente, V_g , es el volumen del poro de aire, y V_v , es el volumen de vacíos.

$c_{m\pi} = \frac{1}{K_{m\pi}}$ es la compresibilidad de la estructura de suelo con respecto a un cambio en la succión de poluente $p^{c\pi}$, ($p^{c\pi} = p^g - p^\pi$). siendo:

$$K_{m\pi} = \frac{K_T K_s}{S_w K_s + \frac{S_\pi}{S_f} S_g K_T + \frac{S_w}{S_f} K_T} \tag{6}$$

$c = \frac{1}{K_T}$ es la compresibilidad drenada de la estructura de suelo.

$c_s = \frac{1}{K_s}$ es la compresibilidad de los granos de suelo.

$K_T = (1 - \alpha) K_s$ es el módulo de compresibilidad de la masa de suelo (Lewis y Schrefler, 1998) siendo α la constante de Biot (Biot, 1941).

Sustituyendo las 4 en 3 y acomodando tenemos:

$$\epsilon_{ii} = c_s p^w + c_{mw} (p^g - p^w) + c_{m\pi} (p^g - p^\pi) + c_s p^\pi - c_s p^g + c (\bar{\sigma} - p^g) + 0 \tag{7}$$

Por otro lado, considerando la definición del concepto de tensión efectiva, la deformación volumétrica en términos de la presión efectiva y los parámetros del suelo puede establecerse que:

$$\epsilon_{ii} = c (\bar{\sigma} - a_1 p^w - a_2 p^g - a_3 p^\pi) \tag{8}$$

Comparando 7 y 8 obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{c_{mw}}{c} - \frac{c_s}{c} = \alpha S_w \\ a_2 &= \frac{c_{m\pi}}{c} - \frac{c_s}{c} = \alpha S_\pi \\ a_3 &= 1 + \frac{c_s}{c} - \frac{c_{mw}}{c} - \frac{c_{m\pi}}{c} = \alpha S_g \end{aligned} \quad (9)$$

Reemplazando la Ec. 9 en la Ec. 2 se obtiene la expresión constitutiva buscada de la relación sólido-fluido

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \alpha \delta_{ij} (S_w \dot{p}^w + S_g \dot{p}^g + \dot{p}^\pi S_\pi) \quad (10)$$

2.3. Equilibrio mecánico

Considerando una porción de suelo no saturado sujeta a un campo de tensiones, el balance de momento lineal descartando efectos inerciales está dado por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Donde σ_{ij} son las componentes del tensor de tensiones y F_i las componentes de la fuerza de masa por unidad de volumen. El campo de deformaciones y desplazamientos está relacionado con el de tensiones efectivas a través de la siguiente expresión:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{con} \quad \dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (12)$$

2.4. Modelo de flujo: Fase Agua

El flujo de agua en suelos saturados, así como en suelos no saturados, puede describirse mediante la combinación de la ley de Darcy y la ley de conservación de masa de fluidos.

De acuerdo a la ley de Darcy (Lambe y Whitman, 1979):

$$\nu_{wi} = - \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \quad (13)$$

y como la continuidad de la masa de fluido está dada por:

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^w n_w \nu_{fwi}) = \frac{\partial}{\partial t} (n_w \rho^w) \quad (14)$$

puede obtenerse la siguiente expresión (Khalili y Khabbaz, 1995) :

$$- \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) = -n_w c_f \dot{p}^w + \frac{1}{V} \dot{V}_w \quad (15)$$

donde k_{wi} es el coeficiente de permeabilidad, ν_{wi} es la velocidad de descarga relativa del flujo de agua, γ_w es el peso específico de agua, ρ^w es la densidad del agua, ν_{fi} es la velocidad de fluido absoluta, $n_w = V_w/V$ representa la porosidad de la fase agua, V es el volumen total, y c_f es la compresibilidad del fluido .

2.5. Fase poluente

Al suponerlo inmisible, el poluente presente en el medio poroso no tiene la propiedad de mezclarse con las fases no sólidas, por lo tanto se encontrará formando parte de una nueva fase π . Una manera de estudiar este fenómeno es considerar que el comportamiento del poluente será similar a la fase líquida (Schrefler, 2001), con lo cual es posible plantear las ecuaciones de conservación en forma similar a dicha fase.

De acuerdo a la ley de Darcy generalizada para flujo multifásico (Lambe y Whitman, 1979):

$$\nu_{\pi i} = -\frac{k_{\pi i}}{\gamma_{\pi}} \frac{\partial p^{\pi}}{\partial x_i} \quad (16)$$

realizando operaciones similares a la fase agua, se obtiene la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{\rho^{\pi}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^{\pi} \frac{k_{\pi i}}{\gamma_{\pi}} \frac{\partial p^{\pi}}{\partial x_i} \right) = -n_{\pi} c_f \dot{p}^{\pi} + \frac{1}{V} \dot{V}_{\pi} \quad (17)$$

donde $k_{\pi i}$ es el coeficiente de permeabilidad de la fase poluente, ν_{π} es la velocidad de descarga relativa del flujo de poluente, γ_{π} es el peso específico del poluente, ρ^{π} es la densidad del poluente, $\nu_{f i}$ es la velocidad de fluido absoluta, $n_{\pi} = V_{\pi}/V$ representa la porosidad de la fase poluente, V es el volumen total, y c_f es la compresibilidad del fluido.

2.6. Fase aire

La ley de Fick es utilizada normalmente para describir el flujo de aire a través del suelo no saturado. De acuerdo a esta ley, la la tasa de masa transferida por una sustancia en difusión a través de un area unitaria ($J_{g i}$) es proporcional a la concentración a la concentración de sustancia difundida (C) (Fredlund y Rahardjo, 1993). Esto puede expresarse a través de la siguiente ecuación:

$$J_{g i} = -D_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (18)$$

donde D_i , es el coeficiente de difusión.

Para condiciones isotérmicas y teniendo en cuenta la conservación de masa de aire, realizando un procedimiento similar al utilizado para las fases fluidas, se obtiene (Khalili y Khabbaz, 1995):

$$-\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) = -\frac{n_g}{P} \dot{p}^g + \frac{1}{V} \dot{V}_g \quad (19)$$

donde D_i^* es el coeficiente de transmisión de la fase aire, ρ^g es la densidad de aire, P es la presión absoluta, $n_g = V_g/V$ representa la porosidad de la fase aire, y V es el volumen total.

Las ecuaciones 15, 17 y 19 son las ecuaciones de gobierno diferenciales que describen el flujo de agua, poluente y aire a través de una masa de suelo no saturado, respectivamente. Nótese que hay tres ecuaciones para seis incógnitas ($p^w, p^{\pi}, p^g, V_w, V_{\pi}$ y V_g), por lo tanto serán necesarias tres ecuaciones más.

Para abordar este problema, en los siguientes párrafos se presenta una relación entre la tasa de los volúmenes de agua, poluente y aire y las variables primarias: presión de

poros de agua, poluente y aire y las componentes de desplazamiento (p^w, p^π, p^g, u_i). Una vez obtenida esta relación, la ecuación 2 deberá ser formulada en términos del campo de desplazamientos mediante el agregado de una relación constitutiva adecuada (para el caso elástico, ver (Khalili y Khabbaz, 1995)). Por consiguiente 2, 15, 17 y 19 deberán ser resueltas simultáneamente.

3. ESTADOS DE SUELOS PROPUESTOS

Para establecer las relaciones necesarias para $\frac{dV_w}{V}$, $\frac{dV_\pi}{V}$ y $\frac{dV_g}{V}$ y las variables primarias de fluidos, se plantean tres combinaciones de estados:

3.1. Combinación 1

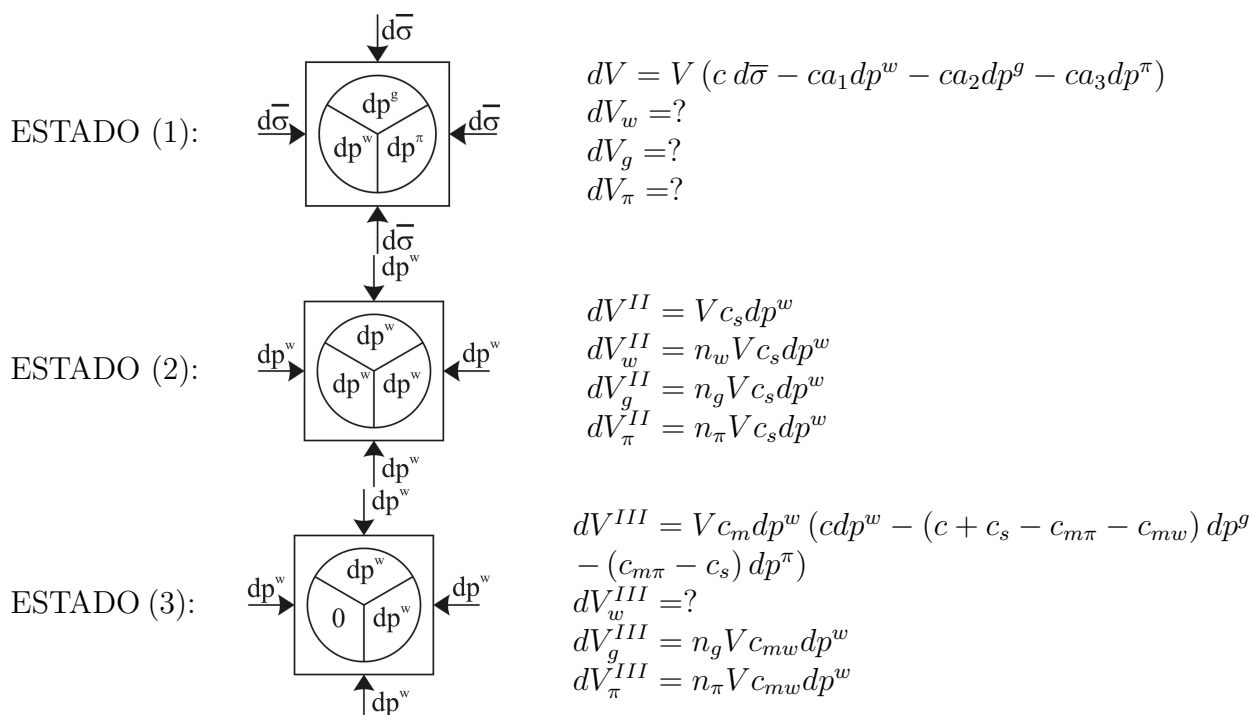


Figura 4: Primer conjunto de variaciones de volumen de elementos representativos de suelo

$$(dV - dV_w - dV_g - dV_\pi) dp^w = V c_s dp^w d\bar{\sigma} - n_w V c_s dp^w dp^w - n_g V c_s dp^w dp^g - n_\pi V c_s dp^w dp^\pi \quad (20)$$

$$(dV - dV_g - dV_\pi) dp^w = V c_{mw} dp^w d\bar{\sigma} - n_g V c_{mw} dp^w dp^g - dV_w^{III} dp^w - dV_\pi^{III} dp^\pi \quad (21)$$

$$V c_{mw} dp^w dp^w - n_g V c_{mw} dp^w dp^w - dV_w^{III} dp^w - dV_\pi^{III} dp^\pi = V c_s dp^w dp^w - n_\pi V c_s dp^w dp^w - n_g V c_s dp^w dp^w \quad (22)$$

Haciendo 20-21-22, obtenemos:

$$\frac{dV_w}{V} = (c_{mw} - c_s) d\bar{\sigma} - [c_{mw}(1 - n_g) + c_s(n_\pi - 1 - n_w + n_g) - n_\pi c_{mw}] dp^w - n_g(c_{mw} - c_s) dp^g - n_\pi(c_{mw} - c_s) dp^\pi \quad (23)$$

Considerando 8; y luego de algunas transformaciones algebraicas, la Ec. 23 queda:

$$\frac{dV_w}{V} = \alpha S_w \epsilon_{ii} - \left[(S_g + S_\pi)(\alpha - n) \left(\frac{1}{K_{mw}} - \frac{1}{K_s} \right) + (\alpha - n) \frac{S_w}{K_s} \right] dp^w + \left[S_g(\alpha - n) \left(\frac{1}{K_{mw}} - \frac{1}{K_s} \right) \right] dp^g + \left[S_\pi(\alpha - n) \left(\frac{1}{K_{mw}} - \frac{1}{K_s} \right) \right] dp^\pi \quad (24)$$

o

$$\frac{dV_w}{V} = \alpha S_w \epsilon_{ii} - \frac{(\alpha - n) S_w}{K_s} (S_w dp^w + S_g dp^g + S_\pi dp^\pi) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_w ((S_w - 1) dp^w + S_g dp^g + S_\pi dp^\pi) \quad (25)$$

Sustituyendo 25 en 15 y realizando la derivada con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - S_w \left[\frac{n}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_w - \frac{C_{sw}}{n} dp^w + \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right. \\ & \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(-\frac{C_{sw}}{n} dp^w + (S_w - 1) + \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right] \frac{dp^w}{dt} \\ & - S_w \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_g - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^w - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right. \\ & \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(\frac{C_{sw}}{n} dp^w - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + S_g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right] \frac{dp^g}{dt} \\ & - S_w \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi - \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_\pi \right] \frac{dp^\pi}{dt} = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

donde $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$ y n es la porosidad ($n = n_g/S_g = n_w/S_w$). Una cuestión importante que debe ser aclarada es que en la referencia (Khalili y Khabbaz, 1995) la variación de la saturación de agua con respecto al tiempo no es considerada, mientras que en este trabajo, este aspecto se tiene en cuenta a través de las derivadas mencionadas.

Además, para alcanzar los objetivos del presente artículo, en el siguiente párrafo se abordará una propuesta diferente con respecto a los estados 1 a 3 mostrados en la Fig 4. A través de esta reformulación, se logra una relación conveniente entre V_g y las variables primarias.

3.2. Combinación 2

Esta combinación se forma analizando el ESTADO (1) junto a los siguientes estados:

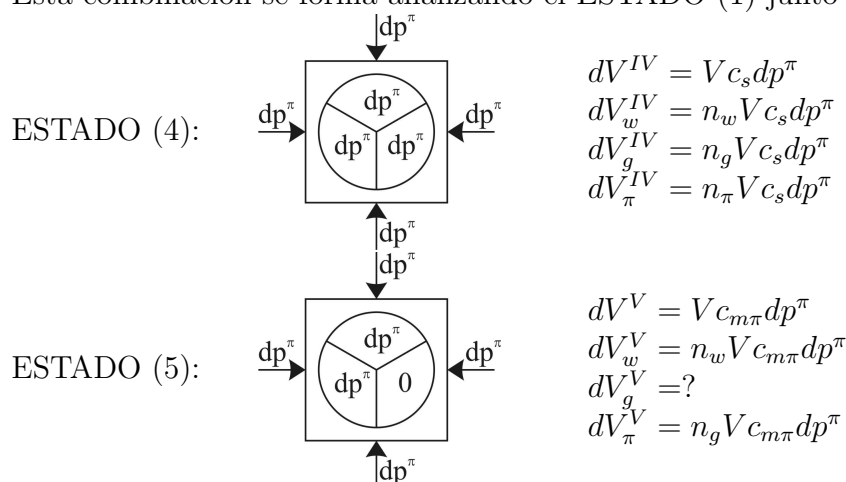


Figura 5: Segundo conjunto de variaciones volumétricas de elementos representativos de suelo

El ESTADO (4) representa una porción de suelo con presiones externas e internas iguales a dp^π . El ESTADO (5) corresponde a una porción de suelo con presiones externa, del poro de aire y del poro de agua iguales a dp^π , además de una presión del poro de poluyente nula.

Aplicando el principio de reciprocidad de Betty a los estados [(1) - (5)], [(4) - (5)] y [(1) - (4)], puede obtenerse:

$$(dV - dV_w - dV_g) dp^\pi = V c_{m\pi} dp^\pi d\bar{\sigma} - n_w V c_{m\pi} dp^\pi dp^w - dV_\pi^V dp^\pi - n_g V c_{m\pi} dp^\pi dp^g \quad (27)$$

$$\begin{aligned} V c_{m\pi} dp^\pi dp^\pi - n_w V c_{m\pi} dp^\pi dp^\pi - dV^V dp^\pi - n_g V c_{m\pi} dp^\pi dp^\pi = \\ V c_s dp^\pi dp^\pi - n_w V c_s dp^\pi dp^\pi - n_g V c_s dp^\pi dp^\pi \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dV - dV_w - dV_\pi - dV_g) dp^\pi = V c_s dp^\pi d\bar{\sigma} \\ - n_w V c_s dp^\pi dp^w - n_g V c_s dp^\pi dp^g - n_\pi V c_s dp^\pi dp^\pi \quad (29) \end{aligned}$$

Una vez más, considerando 19- 12, y luego de algunas transformaciones algebraicas, la ecuación 29 se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dV_\pi}{V} = (c_{m\pi} - c_s) d\bar{\sigma} - (c_{m\pi} - c_s) n_w dp^w - (c_{m\pi} (1 - n_w) - n_g c_{m\pi} \\ + c_s (n_w - n_\pi - 1 + n_g)) dp^w + n_g (c_{m\pi} - c_s) dp^g \quad (30) \end{aligned}$$

Reemplazando 30 en 17, conduce a

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\rho^\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^\pi \frac{k_{\pi i}}{\gamma_\pi} \frac{\partial p^\pi}{\partial x_i} \right) + \alpha S_\pi \dot{\epsilon}_{ii} \\
 & - S_\pi \left[\frac{n}{K_\pi} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_\pi - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^g - \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right. \\
 & \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(-\frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi + (S_\pi - 1) + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^g - \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right] \frac{dp^\pi}{dt} \\
 & - S_\pi \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right. \\
 & \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(\frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + S_g - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right] \frac{dp^g}{dt} \\
 & - S_\pi \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w - \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_w \right] \frac{dp^w}{dt} = 0 \quad (31)
 \end{aligned}$$

3.3. Combinación 3

Esta combinación se forma analizando el ESTADO (1) junto a los siguientes estados:

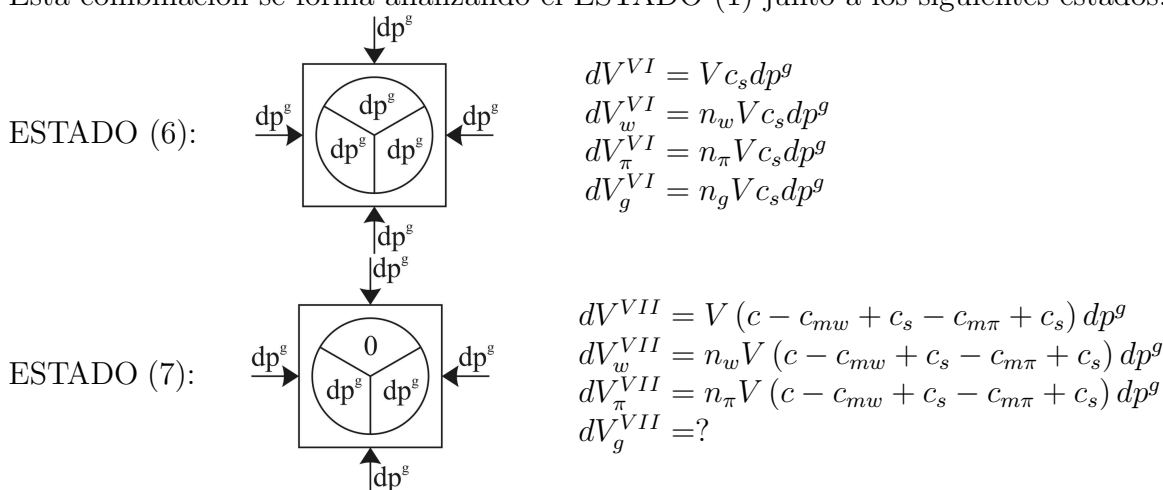


Figura 6: Tercer conjunto de variaciones volumétricas de elementos representativos de suelo

El ESTADO (6) muestra una porción de suelo con presiones externas e internas iguales a dp^g . El ESTADO (7) corresponde a una porción de suelo con presiones externa, del poro de aire y del poro de agua iguales a dp^g , además de una presión del poro de poluente nula.

Aplicando el principio de reciprocidad de Betty a los estados [(1) - (5)], [(4) - (5)] y [(1) - (4)], puede obtenerse:

$$\begin{aligned}
 (dV - dV_w - dV_\pi - dV_g) dp^g &= V c_s dp^g d\bar{\sigma} \\
 &- n_w V c_s dp^g dp^w - n_\pi V c_s dp^g dp^\pi - n_g V c_s dp^g dp^g \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (dV - dV_w - dV_\pi) dp^g &= V (c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi} + c_s) dp^g d\bar{\sigma} - V n_w (c - c_{mw} + c_s \\
 &- c_{m\pi} + c_s) dp^g dp^w - V n_\pi (c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi} + c_s) dp^g dp^\pi - dV_V^g dp^g \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Vc_s dp^g dp^g - n_w Vc_s dp^g dp^g - n_\pi Vc_s dp^g dp^g &= V(c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi} + c_s) dp^g dp^g \\
-Vn_w (c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi} + c_s) dp^g dp^g - Vn_\pi (c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi} + c_s) dp^g dp^g - dV_V^g dp^g & \quad (34)
\end{aligned}$$

resolviendo las ecuaciones (32 - 33 + 34) , se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_g}{V} &= (c - c_{mw} - c_{m\pi} + c_s) d\bar{\sigma} - [-n_g c_s - (n_w + n_\pi - 1)(c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi})] dp^g \\
&\quad - n_w (c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi}) dp^w - n_\pi (c - c_{mw} + c_s - c_{m\pi}) dp^\pi \quad (35)
\end{aligned}$$

Considerando 32, 33 y 34, y luego de transformaciones algebraicas, la Ec. 35 queda:

$$\frac{dV_g}{V} = S_g \left[\alpha \epsilon_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_w dp^w S_\pi dp^\pi + S_g dp^g) - \frac{(\alpha - n)}{K_T} (S_w dp^{cw} + S_\pi dp^{c\pi}) \right] \quad (36)$$

De la misma manera que en la ecuación 26, sustituyendo 36 en 19 y realizando la derivada con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) & \\
- \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_w + \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) \right) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g \left(-S_w - \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) \right) \right] \dot{p}^w & \\
- \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_\pi + \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g \left(-S_\pi - \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) \right] \dot{p}^\pi & \\
- \left[\frac{n S_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_g - \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) - \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) \right. & \\
\left. + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g \left(S_w + S_\pi + \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) + \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) \right] \dot{p}^g = 0 \quad (37) &
\end{aligned}$$

4. SISTEMA DE ECUACIONES PARA ANÁLISIS DE SUELOS NO SATURADOS CON PRESENCIA DE POLUENTES

Las Ec. 12, 26, 31 y 37 constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales independientes. Con el objeto de implementarlas mediante el método de los elementos finitos, se consideran las siguientes relaciones $\dot{S}_w = \frac{dS_w}{dp^{cw}} \dot{p}^{cw}$, $\dot{S}_\pi = \frac{dS_\pi}{dp^{c\pi}} \dot{p}^{c\pi}$, donde $\dot{p}^{cw} = \dot{p}^g - \dot{p}^w$ y $\dot{p}^{c\pi} = \dot{p}^g - \dot{p}^\pi$. Finalmente las ecuaciones de equilibrio mecánico y flujo de las diferentes fases podrán escribirse según:

$$\nabla (C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) + a_1 \nabla \dot{p}^w + a_2 \nabla \dot{p}^\pi + a_3 \nabla \dot{p}^g + \dot{F}_i = 0 \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \\
& - S_w \left[\frac{n}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_w - \frac{C_{sw}}{n} dp^w + \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(-\frac{C_{sw}}{n} dp^w + (S_w - 1) + \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right] \frac{dp^w}{dt} \\
& - S_w \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_g - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^w - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(\frac{C_{sw}}{n} dp^w - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + S_g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi \right) \right] \frac{dp^g}{dt} \\
& - S_w \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_\pi) - \frac{(\alpha - n)}{K_T} (S_\pi) \right] \frac{dp^\pi}{dt} = 0 \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho^\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^\pi \frac{k_{\pi i}}{\gamma_\pi} \frac{\partial p^\pi}{\partial x_i} \right) + \alpha S_\pi \dot{\epsilon}_{ii} \\
& - S_\pi \left[\frac{n}{K_\pi} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_\pi - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^g - \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(-\frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi + (S_\pi - 1) + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^g - \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right] \frac{dp^\pi}{dt} \\
& - S_\pi \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} \left(S_g - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + \frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right. \\
& \left. - \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(\frac{C_{s\pi}}{n} dp^\pi - \frac{C_{s\pi}}{n} dp^g + S_g - \frac{C_{sw}}{n} dp^g + \frac{C_{sw}}{n} dp^w \right) \right] \frac{dp^g}{dt} \\
& - S_\pi \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_w) - \frac{(\alpha - n)}{K_T} (S_w) \right] \frac{dp^\pi}{dt} = 0 \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) \\
& - \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_w + \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) \right) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g \left(-S_w - \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) \right) \right] \dot{p}^w \\
& - \left[\frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_\pi + \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g \left(-S_\pi - \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) \right] \dot{p}^\pi \\
& - \left[\frac{n S_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_g - \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) - \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) \right. \\
& \left. + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g \left(S_w + S_\pi + \frac{C_{sw}}{n} (dp^g - dp^w) + \frac{C_{s\pi}}{n} (dp^g - dp^\pi) \right) \right] \dot{p}^g = 0 \quad (41)
\end{aligned}$$

5. CONCLUSIONES

Se presentó una formulación general para modelar matemáticamente el proceso de consolidación de suelos no saturados con presencia de poluentes. Las ecuaciones que rigen,

en términos de desplazamientos y presiones de fluido, dan como resultado un sistema no lineal, acoplado, de ecuaciones diferenciales parciales

Al incorporar la tasa de succión dentro del marco matemático, se induce al sistema de ecuaciones una fuerte no linealidad, como un efecto de acoplamiento que involucra al grado de saturación y a las principales variables, ésta es una característica de suma importancia porque revela el papel crucial de la variación de la saturación en el modelado. En el caso isotérmico, la pérdida de la simetría se debe exclusivamente a este hecho.

Dentro de estas consideraciones, la importancia del efecto de acoplamiento puede ser evaluada a través del análisis de las curvas características del suelo y sus derivadas (Di Rado et al., 2009), esto puede definir la utilización de un sistema general no simétrico más complejo, o uno simétrico más simple de utilizar, con una predicción precisa de la deformación y las presiones de poros. Los valores obtenidos mediante esta reducción coinciden exactamente con los obtenidos por Khalili y Khabbaz (1995) y Beneyto et al. (2005).

Este cambio de formulación se puede llevar a cabo de manera muy sencilla, solamente con la consideración apropiada de los coeficientes del sistema de ecuaciones discretas.

Asimismo, debido a que fue desarrollado a partir de casos más simples, permite su generalización a casos más complejos con mayor número de fases de fluido.

En futuros trabajos, sería interesante incorporar una técnica de descomposición por subdominios que permita manejar las formulaciones simétricas y no simétricas de manera simultánea.

REFERENCIAS

- Alonso E., Lloret A., Delahaye J., Gens A., y Volckaert G. Coupled analysis of backfill hydration test. *International Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, 22:1–27, 1998.
- Beneyto P., Di Rado H., Mroginski J., y Awruch A. A model for the analysis of consolidation in unsaturated soils based in state combinations (in spanish). *Mecánica Computacional*, 24:515–527, 2005.
- Biot M. General theory of three - dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12:155–164, 1941.
- Di Rado H., Beneyto P., Mroginski J., y Awruch A. Influence of saturation-suction relationship in the formulation of non-saturated soil consolidation models. *Mathematical and Computer Modelling*, 49:1058–1070, 2009.
- Fredlund D. y Rahardjo H. *Soils Mechanics for unsaturated soils*. Wiley & Sons Inc., 1993.
- Ghaboussi J. y Kim K. Quasistatic and dynamic analysis of saturated and partially saturated soils. *Mechanics of Engineering Materials*, 14:277–296, 1984.
- Graziano L. y Lancellotta R. A constitutive equation for the porosity field. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(10):1067–1073, 2003.
- Hassanizadeh S. y Gray W. General conservation equation for multiphase systems: 1, averaging procedures. *Advances in Water Resources*, 2:131–144, 1979.
- Hassanizadeh S. y Gray W. General conservation equation for multiphase systems: 3, constitutive theory for porous media flow. *Advances in Water Resources*, 3:25–40, 1980.
- Khalili N. y Khabbaz M. On the theory of three-dimensional consolidation in unsaturated soils. In E.A.P. Delage, editor, *First International Conference on Unsaturated Soils - UNSAT'95*, páginas 745–750. 1995.
- Lambe T. y Whitman R. *Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.

- Lewis R. y Schrefler B. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, 1987.
- Lewis R. y Schrefler B. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media*. John Wiley & Sons, 1998.
- Li X. y Zienkiewicz O.C. Multiphase flow in deforming porous media and finite element solutions. *Comput. Struct.*, 45:211–227, 1992.
- Masters I., Pao W., y Lewis R. Coupling temperature to a double porosity model of deformable porous media. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 49:421–438, 2000.
- Mroginski J., Di Rado H., Beneyto P., y Awruch A. A finite element approach for multiphase fluid flow in porous media. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81:76–91, 2010.
- Schrefler B. Computer modelling in environmental geomechanics. *Computers & Structures*, 79:2209–2223, 2001.
- Sun D., Matsouka H., Cui H., y Xu Y. Three dimensional elastoplastic model for unsaturated compacted soils with different initial densities. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 27:1079–1098, 2003.
- Yang D., Rahardjo H., Leong E., y Choa V. Coupled model for heat, moisture, air flow and deformation problems in unsaturated soils. *Journal of engineering mechanics*, 124:1331–1338, 1998.