

CORTE DE MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS 2.5-DIMENSIONALES

Pablo J. Novara y Nestor A. Calvo

*Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Ciudad Universitaria,
Santa Fe, Argentina*

Palabras Clave: Remallado, mallas semiestructuradas, corte de chapas

Resumen.

El problema que se resuelve consiste en cortar una malla volumétrica de elementos finitos semiestructurada, generada a partir de la extrusión de una malla de superficie, utilizando una curva de corte dada por una malla de segmentos. La malla de superficie es de cuadriláteros y/o triángulos que, extruidos en la dirección transversal generan prismas cuadrangulares (hexaedros) y/o triangulares (wedges). Hay dos dificultades importantes en esta tarea: la carencia de una geometría bien definida, pues solo se tiene una versión facetada de la misma; y la conservación de la estructura 2.5 dimensional cuando el corte no atraviesa los elementos en el mismo sentido en que se realizó la extrusión. En este trabajo se atacan ambos problemas y se presenta una solución completa para el proceso de corte, incluyendo los algoritmos necesarios para la reconstrucción de las geometrías, la proyección de la curva de corte sobre la malla, los pasos para el corte efectivo de los elementos, los algoritmos de suavizado y optimización aplicados y, finalmente, los métodos para mapear los viejos valores nodales y valores asociados a Puntos de Gauss sobre la malla resultante.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una combinación de técnicas y algoritmos desarrollados para realizar distintos tipos de cortes sobre chapas en una simulación por el método de los elementos finitos. Los datos de entrada consisten en dos mallas, una describe la chapa a cortar, la otra describe la curva de corte, y un conjunto de parámetros adicionales que especifican otros detalles del proceso. La malla de la chapa puede ser tanto de superficie como de volumen. En caso de utilizarse una malla de volumen, esta presentará una estructura 2.5 dimensional, siendo su dirección de extrusión coincidente con el espesor de la chapa. La segunda malla contiene una poligonal que indica la forma de la herramienta cortante. Esta curva no se encuentra necesariamente sobre la superficie de la chapa, sino que debe ser proyectada en la misma para obtener el trazado real del corte. Dos tipos de proyecciones son posibles: proyección fija, cuando la dirección de proyección es única e igual en todos los puntos (corte con punzón); y proyección normal, cuando la curva debe proyectarse de forma tal que el vector de proyección en cada punto resulte perpendicular a la superficie de la chapa (corte láser). Los demás argumentos incluyen umbrales utilizados para el proceso de suavizado, un indicador de cual pieza de las resultantes luego del corte debe eliminarse, el tipo de proyección a utilizar, y el número de Puntos de Gauss asociado a cada elemento. Como resultado del proceso, además de la geometría de la malla resultante, el software desarrollado entrega un conjunto de índices y pesos para interpolar los valores asociados a los nodos y Puntos de Gauss a partir de los valores originales.

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROCESO

La pasos generales a seguir para el corte de superficies son los siguientes:

1. Encontrar la proyección de la curva dada sobre la superficie de la chapa.
2. Dividir los elementos atravesados por dicha proyección.
3. Determinar un área de influencia (zona cercana a la curva de corte).
4. Aplicar algoritmos de optimización de calidad en el área de influencia.
5. Calcular pesos adecuados para interpolar los nuevos valores nodales y valores asociados a puntos de Gauss.

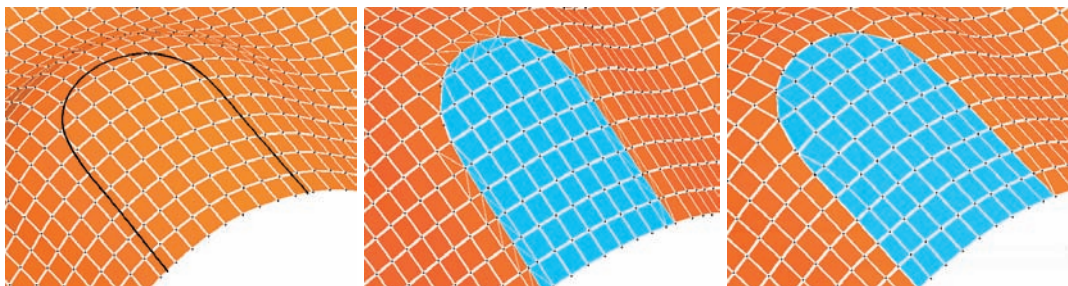


Figura 1: Proyección de la curva, corte de elementos, y suavizado

En el caso del corte de chapas representadas por mallas de elementos sólidos, se debe mantener la estructura 2.5 dimensional, por lo que se toma como superficie de referencia una capa intermedia, extraída de la malla original aprovechando la estructura conectiva, y se aplica sobre

la misma un proceso muy similar al del corte de superficies. Luego, se transfiere la estructura conectiva resultante a las demás capas del sólido y se corrigen los nodos sobre la curva de corte mediante los siguientes pasos:

1. Encontrar la proyección de la curva dada sobre la capa.
2. Copiar la estructura topológica del área de influencia de la superficie de referencia sobre la capa, agregando los nodos interiores que generó el corte.
3. Mover los nodos en la proyección de la curva de corte sobre la capa, utilizando un mapeo paramétrico entre ambas curvas.
4. Aplicar algoritmos de suavizado sin cambios topológicos para corregir las inversiones de elementos generadas por los pasos anteriores.

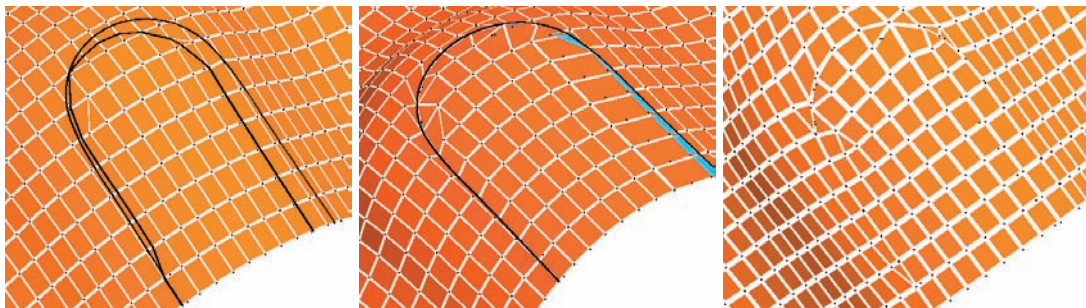


Figura 2: Curva proyectada y curva generada a partir de la topología de referencia, desplazamiento de nodos para hacer coincidir ambas curvas y suavizado

Una vez modificadas todas las capas, se regeneran los elementos de volumen y se calculan los pesos para interpolar los nuevos valores nodales y puntos de Gauss. En las siguientes secciones se describen con más detalle cada uno de los pasos mencionados.

3. PROYECCIÓN DE LA CURVA DE CORTE

El algoritmo de proyección de la curva de corte requiere disponer de la curva en forma continua (no sólo el conjunto de puntos que se tiene por entrada). Para esto, el primer paso es definir una curva interpolante con los puntos dados. Esta curva se define como un conjunto de splines formados por curvas de Bézier de 2do y 3er grado utilizando algoritmo similar al algoritmo de Overhauser (Buss, 2003) para evitar el overshooting. Al construir las splines, se toman los segmentos consecutivos cuyos ángulos no disten de 180° en más que una tolerancia definida por el usuario. Los ángulos menores que dicho límite se consideran vértices de la línea de corte. Una vez construida una representación continua y paramétrica de la curva, para poder cortar los elementos de la malla, se debe encontrar primero la proyección de esta curva sobre la superficie.

Para lograr una aproximación al ideal de una proyección utilizaremos los siguientes algoritmos:

- Primero se busca la proyección de un punto cualquiera de la curva. No todos los puntos de la curva se proyectan sobre la superficie. El algoritmo puede fallar en los primeros intentos, pero debe encontrar finalmente uno. Encontrar un punto que se proyecta sobre la superficie, implica encontrar también en qué elemento de la misma lo hace.

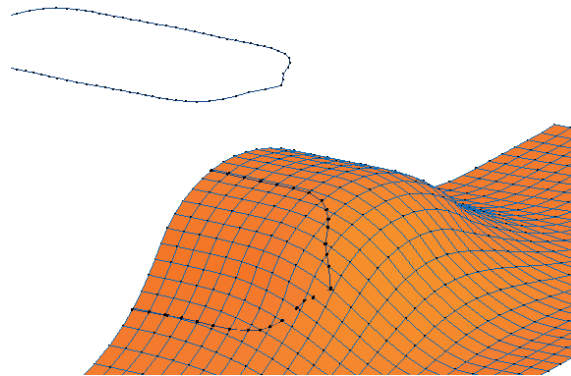


Figura 3: curva de corte (representada por una malla de segmentos, en la parte superior) y su proyección sobre la malla a cortar

- Teniendo el punto (p_0) y el elemento inicial (e_0), se busca un punto cercano de la curva cuya proyección no caiga dentro de ese elemento. Para cada punto de la curva parametrizada, se conoce el valor del parámetro (t) utilizado para calcularlo. Mediante un algoritmo de bisección (búsqueda binaria) se busca el valor del parámetro t para el cual el punto correspondiente se proyecta en la arista de salida del elemento. Al mismo tiempo se determina cual es la arista en cuestión.
- Una vez encontrado este valor para t (digamos t_1), se busca la proyección del punto de la curva sobre la arista.
- Para continuar, suponemos que la curva nunca es muy perpendicular a la superficie, entonces podemos asumir que para $t > t_1$, en un entorno suficientemente pequeño, los puntos caen dentro de e_1 , un elemento vecino a e_0 . El algoritmo se repite desde el segundo paso, pero utilizando t_1 como t_0 , y e_1 como e_0 .

De esta forma, se encuentra la sucesión de puntos que cortan las aristas y se define así la proyección de la curva sobre la superficie. Estos serán los puntos a agregar y las aristas a dividir al modificar la malla. Además, puede haber puntos de la curva que definan vértices geométricos sobre la misma (puntos angulosos o puntos extremos). Dado que un punto de este tipo marca una característica importante de la curva que se debe preservar en el corte; la proyección del mismo también debe generar un nuevo nodo en la malla de superficie, muy probablemente en el interior de un elemento.

Entonces, son necesarios tres algoritmos básicos para proceder a marcar el corte sobre la superficie:

1. Para la búsqueda binaria: Es necesario un algoritmo que determine si un punto dado de la curva se proyecta en el interior o exterior de un elemento dado de la superficie.
2. Para determinar por donde pasa la curva proyectada desde un elemento a otro: Determinar en que punto de una arista se proyecta un punto de una curva, sabiendo que tal proyección existe.
3. Para proyectar los vértices: En qué punto del interior de un elemento, se proyecta un punto de la curva, cuando se sabe que efectivamente se proyecta en el interior.

El algoritmo para encontrar e_0 y p_0 , se puede construir a partir del primer ítem, implementando una búsqueda lineal: para ello es necesario que el primer algoritmo indique hacia qué elemento vecino redirigir la búsqueda. Este método podría no arrojar resultados exitosos en todos los casos ni para todos los puntos (aunque la proyección efectivamente exista). Éste no es un problema, dado que el algoritmo debe poder encontrar al menos un punto (con lo cual se permiten varios intentos si falla) y sólo se utiliza una vez, en la inicialización, por lo cual no es apreciable la penalización en el tiempo de ejecución para el resultado final.

3.1. Proyección fija

Para la búsqueda binaria, cuando se requiere proyección fija, se proyecta el punto de la curva sobre el plano que definen los tres nodos del elemento (si no es un símplice se divide) y se evalúan las funciones de forma. Tres funciones de forma positivas indican que el punto proyectado está en el interior. Para la búsqueda lineal, si no está dentro, se pasa al vecino opuesto al nodo con función de forma más negativa. La misma proyección utilizada en la búsqueda obtiene directamente el punto sobre la arista o sobre el elemento sin necesidad de cálculos adicionales.

3.2. Proyección normal

Existen algunos problemas básicos que se presentan, independientemente del método que se utilice, debido a que no se dispone de la superficie real, sino de una versión “facetada” de la misma. Si la superficie original es una esfera, por ejemplo, cualquier punto del espacio tiene proyección perpendicular sobre la misma. Cuando se tiene la malla de la esfera, la proyección de un punto sobre el plano de un elemento puede caer fuera del elemento; y hay puntos para los cuales eso sucede con todos los elementos. Es decir, hay puntos sin proyección normal. Si la superficie fuese cóncava hacia el punto, puede haber más de un punto de proyección normal. Es decir: en el caso poli-lineal, no hay garantías de existencia ni de unicidad de la proyección; en el caso suave no hay garantías de unicidad, pero la existencia puede garantizarse en condiciones normales.

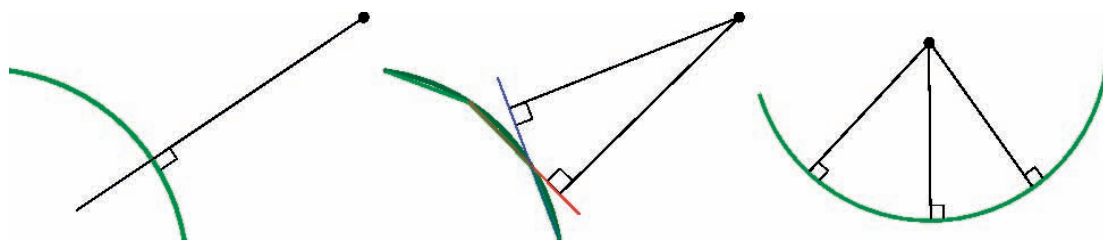


Figura 4: Problemas al proyectar de forma normal a una superficie facetada

Se intentó plantear soluciones basadas subdivisiones sucesivas (Zorin et al., 2000) (Alias y Stam, 1998) y en la reconstrucción de la geometría de la chapa mediante superficies interpolantes con la suavidad necesaria para resolver estos problemas, pero en la práctica no resultaron adecuadas. Se planteó también un algoritmo basado en la distancia del punto a los planos bisectores de las aristas, pero este tipo de enfoques generan nuevos problemas por falta de unicidad. Finalmente, el algoritmo implementado consiste en encontrar un plano paralelo al plano del elemento, y que pase por el punto; luego proyectar cada vértice del elemento sobre dicho plano, utilizando como dirección de proyección la normal de los mismos (Calvo y Novara, 2009), y

evaluar las funciones de forma en el nuevo triángulo definido por estas tres proyecciones.

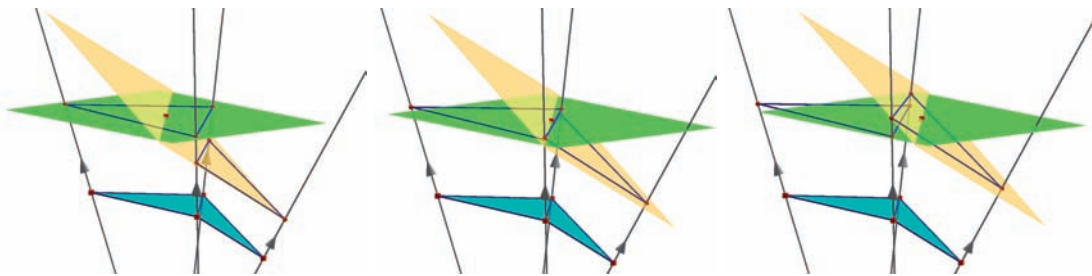


Figura 5: Construcciones auxiliares para tres puntos de la curva. En azul, los elementos de la malla, en amarillo y verde los planos auxiliares

No es fácil ver que el método no genera inconvenientes dado que para un mismo punto, el plano paralelo al elemento varía según el elemento; y para un elemento dado, el plano que contiene al punto varía según el punto. Sin embargo, considerando dos elementos vecinos, la recta que resulta de la intersección entre los dos planos que contienen al punto (uno de cada elemento) tiende a ser la recta que forman las proyecciones de los vértices de la arista común conforme este punto se acerca al límite donde cambia el elemento al que pertenecería. Esto implica que bajo idénticas condiciones iniciales, pequeñas perturbaciones en las posiciones de los puntos de la curva no generan grandes perturbaciones en el resultado de la proyección sobre la superficie, por lo que el algoritmo resulta estable. Se debe señalar además que si se aplica el test a dos elementos vecinos para un mismo punto, nunca podría ocurrir que el resultado indique que ambos elementos contienen al punto, ya que existe una superficie (definida por los vértices de la arista que comparten y sus dos normales) que divide al espacio sin dejar regiones comunes. Si embargo, esto sí puede ocurrir para dos elementos que no sean vecinos: por ejemplo, dos elementos opuestos de una malla de una esfera, para un punto ubicado en su centro. Considerando la forma en la que se avanza al marcar la curva de corte (se va pasando de un elemento a otro vecino indicado por la arista de salida de la curva), la ambigüedad desaparece si la primer proyección sí es única.

No es viable en la práctica construir a priori la partición del espacio para luego evaluar fácilmente cada punto de la curva, pero sí es posible implementar el test para un punto y un elemento dado y utilizarlo iterativamente. Una vez resuelto el problema de determinar si un elemento contiene o no a la proyección del punto, se pueden utilizar las funciones de forma calculadas en el triángulo auxiliar construido en el plano paralelo para definir exactamente el punto del interior del elemento donde se proyecta.

4. DIVISIÓN DE ELEMENTOS

Una vez obtenido el conjunto de nodos a insertar en la malla, se verifica si algunos de ellos pueden ser reemplazados por los nodos ya presentes en la malla original mediante pequeños desplazamientos, para insertar así el menor número de nodos posibles y no generar divisiones excesivas, o elementos con aristas muy pequeñas. Luego, se procede a dividir efectivamente cada elemento insertando los nuevos nodos en las aristas. Al insertar un nodo en una arista los dos triángulos que la comparten se dividen en dos subtriángulos, resultando un nuevo conjunto de cuatro elementos. Si una arista a dividir pertenece a un cuadrilátero, este se divide primero en dos triángulos. El mismo procedimiento se repite para cada nodo a insertar. Para un nodo interior, se reemplaza el triángulo que lo contiene por tres triángulos formados cada uno por el

nuevo nodo y una arista del triángulo original. Este procedimiento genera excesivas divisiones que se deberán corregir luego en la etapa de optimización, pero simplifica la implementación y evita un tratamiento basado en una casuística más detallada con múltiples estrategias según el tipo de elemento y la ubicación relativa del nodo. Puede ocurrir, que luego de las divisiones, uno o más de los pares de nodos consecutivos de la curva no compartan una arista. Dada la estructura basada sólo en triángulos alrededor de los nodos no colapsados del corte, el problema se resuelve mediante intercambios de diagonales (tomando dos triángulos vecinos como un cuadrilátero, se retriangula utilizando la otra diagonal posible). Si el problema aparece donde existen nodos colapsados, pueden encontrarse elementos no simpliciales, que serán divididos para recuperar la conectividad deseada.

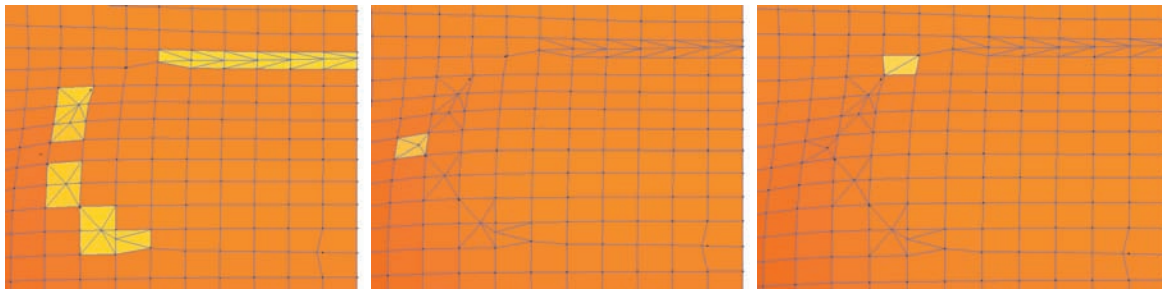


Figura 6: Inserción de nodos sobre aristas, inserción de nodos interiores, corrección de las conectividades

5. OPTIMIZACIÓN DE LA CALIDAD

5.1. Optimización basada en cambios topológicos

En la siguiente etapa, el algoritmo de suavizado basado en cambios topológicos se encargará de reducir el número de elementos, deshaciendo las divisiones innecesarias y mejorando la calidad de los mismos según un criterio basado en ángulos sin modificar la posición de los nodos. Para el caso de corte de una malla tipo shell, este algoritmo se aplica completo al final del proceso, mientras que para el caso de corte de sólidos, se aplica el primer paso en la superficie de referencia y los dos pasos restantes en la malla final luego de reconstruir todas las superficies, ya que todas ellas se deben mantener topológicamente equivalentes para conservar la estructura 2.5 dimensional.

Los posibles cambios a realizar son:

- Considerando dos triángulos vecinos como un cuadrilátero dividido por una de sus diagonales, cambiar la diagonal utilizada: cuando este cambio no genera inversiones y el resultado presenta una mejora en la calidad (según el criterio de Delaunay).
- Fusionar dos triángulos vecinos en un cuadrilátero: cuando los ángulos del cuadrilátero resultante se encuentra suficientemente cerca de los 90° (según un umbral predefinido).
- Considerando un triángulo y un cuadrilátero vecino como un pentágono dividido por una de sus diagonales, utilizar otra diagonal: cuando la diagonal actual no utiliza los mayores ángulos del elemento.

El algoritmo implementado busca aplicar estos cambios considerando los elementos que tienen al menos un vértice sobre la curva de corte, y considerando además sus vecinos. Luego

se vuelve a repetir para los elementos modificados en el primer paso, y así sucesivamente hasta que no se realicen más cambios.

El algoritmo de optimización basado en cambios topológicos, además de mejorar la calidad medida en la malla de referencia, mejora la calidad final observada en las mallas de las superficies, dado que genera un mejor punto de partida para los siguientes algoritmos de suavizado (basados en el movimiento de nodos, sin cambios topológicos).

5.2. Optimización basada en movimiento de nodos

El algoritmo de reposicionamiento de nodos sólo se realiza dentro de un área cercana a la curva de corte, denominada área de influencia. Esto reduce la difusión numérica posterior al mapear los viejos valores nodales en la malla resultante, y reduce además el costo computacional del proceso.

En resumen, el algoritmo completo para el reposicionamiento de nodos es:

1. Realizar una copia de la malla de superficie original y reconstruir en ella la superficie real mediante NURBS (Piegl y Tiller, 1996) (Sederberg, 2007) por elemento. De esta forma se obtiene una representación más suave de la geometría que interpola los nodos de la malla de entrada.
2. Detectar las aristas de los elementos de la malla que se corresponden con aristas geométricas de la superficie, o cambios de propiedades del material. Estas aristas no deben ser modificadas, por lo que sus nodos no se moverán.
3. Por cada nodo del área de influencia
 - a) Encontrar una normal para el nodo (Calvo y Novara, 2009) (Aubrey y Löhner, 2008)
 - b) Proyectar el nodo y sus vecinos en el plano definido por la normal del mismo
 - c) Aplicar el suavizado laplaciano en el plano.
 - d) Proyectar el nodo en la superficie NURBS para obtener la posición final (utilizando la dirección de la normal del nodo, para evitar ambigüedades)

6. RECONSTRUCCIÓN DEL VOLÚMEN

La estrategia diseñada para el corte de sólidos implica realizar la mayor parte del procesamiento en una superficie de cuadriláteros/triángulos representativa, y luego copiar la topología de superficie resultante a la malla de volumen completa manteniendo la estructura 2.5D. Cuando la dirección de extrusión de la malla de volumen no coincide con la dirección de proyección de la curva de corte, la reconstrucción del volumen a partir de la superficie representativa no es una tarea sencilla. El problema central es que en dicha situación la proyección de la curva en la cara inferior de la chapa puede no ser la misma que la proyección en su cara superior. Por ejemplo: un nodo interno, que se encuentra dentro de un determinado elemento en una superficie, puede caer dentro de otro elemento diferente al equivalente en otra superficie.

El problema de los nodos interiores se resuelve admitiendo elementos invertidos en las rutinas de suavizado de superficies. Sin embargo, en las fronteras, el suavizado no puede realizar las correcciones adecuadas. Además, la proyección del nodo en la frontera de la superficie inferior no puede utilizarse para definir el nodo en la frontera de la superficie superior, ya que los mismos corresponden a diferentes puntos (parámetro) de la curva de corte original.

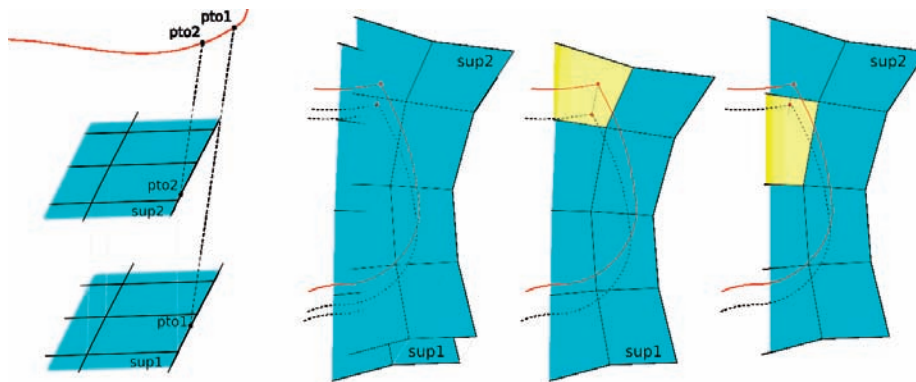


Figura 7: Problemas al proyectar un nodo entre superficies según la dirección del corte

Los problemas en la frontera obligan a realizar dos cortes en lugar de realizar uno y un mapeo. La solución propuesta, entonces, consiste en reacomodar la frontera en un primer paso, y luego mapear las conectividades interiores de la superficie de referencia (contra el molde) sobre la opuesta conservando la misma topología (2.5D). Nuevamente, el proceso se realiza considerando sólo el área de influencia definida en las cercanías de la curva de corte.

La frontera está compuesta por tres clases de segmentos: corte, borde de la chapa y límite del área de influencia. En el primer paso se generarán curvas Spline interpolantes para representar las dos primeras (línea de corte y bordes de la chapa), ya que el límite del área de influencia no se desplazará. Sobre estas curvas se redistribuyen los nodos manteniendo las cantidades por tramo de sus equivalentes en la superficie de referencia.

7. INTERPOLACIÓN DE VALORES NODALES Y PUNTOS DE GAUSS

Para transferir las variables del cálculo de la malla original a la malla cortada, el proceso debe generar para cada nodo y para cada Punto de Gauss (PDG) un conjunto de índices y pesos. Estos índices hacen referencia a los nodos o PDGs de la malla original, mientras que los pesos determinan el grado de influencia de cada uno. El método utilizado para generar esta información es (Novara y Calvo, 2009):

1. construir una malla auxiliar utilizando las posiciones de los viejos nodos/PDG como nodos
2. para cada nuevo nodo/PDG
 - a) determinar en qué elemento de esta malla auxiliar se encuentra
 - b) utilizar los nodos del elemento para la interpolación del nuevo valor y las funciones de forma como peso

Para construir la malla auxiliar, se desarrollaron dos alternativas: una para mallas sólidas y otra para mallas de superficies. La primera se utiliza para la interpolación de PDGs en cortes de sólidos, mientras que la segunda se utiliza para la interpolación de PDGs en cortes de superficies y de valores nodales en todos los casos (cuando el corte es de un sólido, se aplica sobre las capas intermedias). En todos los casos el proceso de interpolación sólo se utiliza dentro del área de influencia.

Para la malla auxiliar de sólidos, se parte de una tetraedrización mediante un generador Delaunay (Calvo, 2005) de los puntos/nodos originales, y se recuperan las concavidades mediante

diferentes técnicas para el descarte de elementos, basadas en α -shapes (Edelsbrunner y Mücke, 1994), comparación de longitudes de aristas, y distancias entre elementos en la malla original. Para las mallas de superficie, se utiliza una generación ad-hoc que aprovecha la estructura conectiva para aplicar una plantilla en las interfaces entre elementos y corrige luego las conectividades mediante intercambios de diagonales localizados.

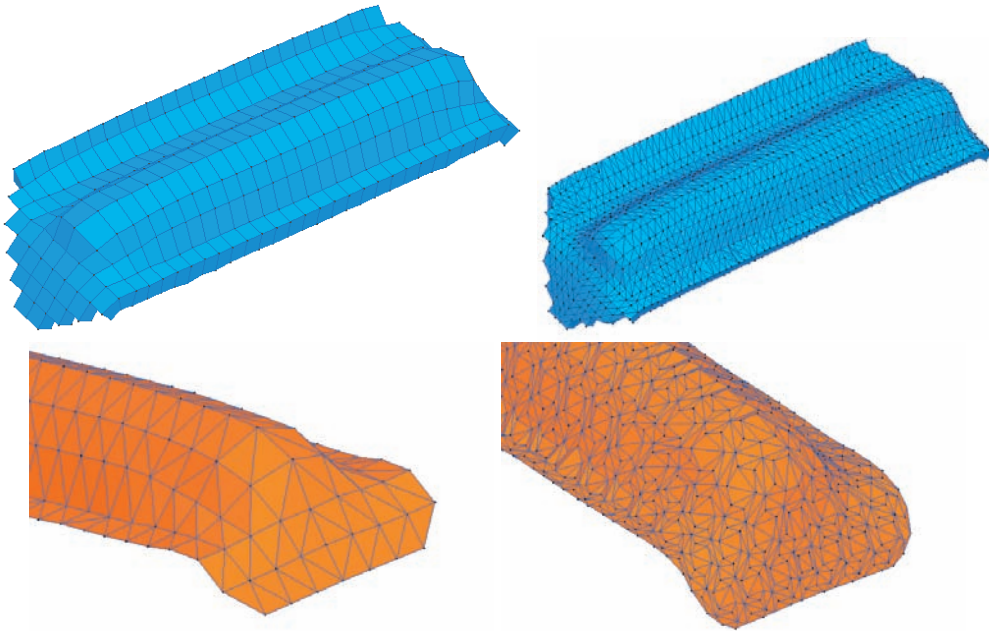


Figura 8: Ejemplos de mallas originales (izquierda) y auxiliares (derecha) para sólidos (arriba) y superficies (abajo)

Para determinar en qué elemento de la malla auxiliar se encuentra un nodo dado de la nueva malla, se utiliza un algoritmo de búsqueda lineal basado en las funciones de forma (partiendo de un elemento semilla, se avanza siempre por el vecino asociado a la función de forma más negativa), pero realizando algunas consideraciones para ignorar slivers y otros elementos cuyos nodos resultan casi coplanares en el caso de mallas de sólidos.

8. CONCLUSIONES

En la figura 9 se muestran algunos resultados.

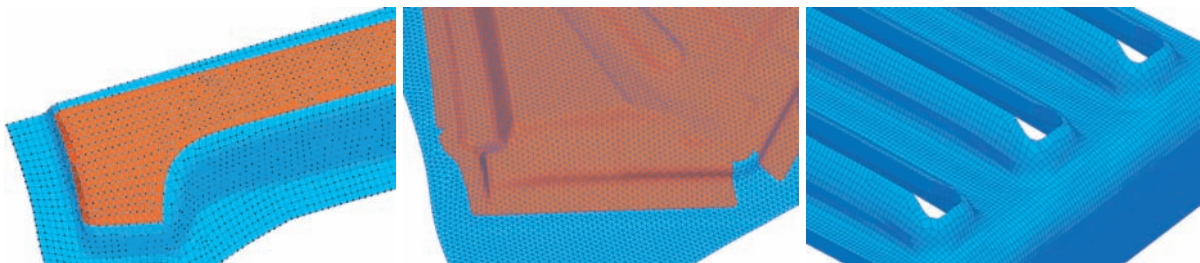


Figura 9: Ejemplos de mallas cortes en diferentes tipos de mallas

Los métodos desarrollados permiten realizar múltiples cortes en mallas de superficie o de volumen semiestructuradas, resolviendo también el problema de la actualización de los valores

asociados a nodos y PDG. El método más crítico del proceso es el utilizado para encontrar la proyección de la curva sobre la chapa, debido a la falta de información geométrica. Todos los mecanismos de optimización de calidad para las mallas resultantes fueron desarrollados también ad-hoc para este tipo de aplicación. La implementación final completa arroja resultados adecuados según los criterios pautados en todos los casos testeados.

REFERENCIAS

- Alias J.S. y Stam J. Evaluation of loop subdivision surfaces. 1998.
- Aubrey R. y Löhner R. On the 'most normal' normal. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:1641–1652, 2008.
- Buss S. *3D Computer Graphics: A Mathematical Introduction with OpenGL*. Cambridge University Press, 2003.
- Calvo N. *Generación de mallas tridimensionales por métodos duales*. Tesis de Doctorado, Doctorado en Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, 2005.
- Calvo N. y Novara P. Aplicaciones del kernel de un polígono a problemas de edición de mallas. *18º Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, 2009.
- Edelsbrunner H. y Mücke E.P. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graph.*, 13:43–72, 1994.
- Novara P. y Calvo N. Remallado mínimo en problemas de spinning-forming. *18º Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, 2009.
- Piegl L.A. y Tiller W. *The NURBS book*. Springer Verlag, 1996.
- Sederberg T. Computer aided geometry design. course notes, 2007.
- Zorin D., Schröder P., DeRose T., Kobbelt L., Levin A., y Sweldens W. Subdivision for modeling and animation. SIGGRAPH 2000, course notes, 2000.