

UN ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA LA DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE COEFICIENTES TÉRMICOS A TRAVÉS DE UN PROCESO DE CAMBIO DE FASE CON CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DEPENDIENTE DE LA TEMPERATURA

Natalia N. Salva^{a,c} y Domingo A. Tarzia^{a,b}

^aCONICET, Argentina

^bDepartamento de Matemática, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.

^cTEMADI, Centro Atómico Bariloche, Av. Bustillo km 9,5, 8400 San Carlos de Bariloche, Argentina.

Palabras Clave: Análisis de sensibilidad, Problema de Stefan, Problema inverso de Stefan, Determinación de coeficientes térmicos, Cambio de fase.

Resumen. En Tarzia, Int. Comm. in Heat and Mass Transfer, 25(1998), pp. 139-147, se obtuvieron fórmulas explícitas para la determinación simultánea de coeficientes térmicos de un material semi-infinito, cuya conductividad térmica depende en forma lineal de la temperatura. Dicha determinación se realizó a través de un proceso de cambio de fase con una sobre-condición en la frontera fija. Se estudiaron diez casos diferentes: cuatro casos de problemas de frontera libre (i.e. problemas de Stefan) y seis casos de problemas de frontera móvil (i.e. problemas inversos de Stefan).

El objetivo del presente trabajo es el de obtener un análisis de sensibilidad de los mencionados diez problemas, determinando los coeficientes térmicos que son más sensibles a pequeñas variaciones de los parámetros dados. Se presentan resultados numéricos para el aluminio.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de cambio de fase, como por ejemplo problemas de congelamiento y de fusión, han sido estudiados en el último siglo gracias a sus aplicaciones científicas y tecnológicas. En (Tarzia, 2000) se presenta un extensa bibliografía en problemas de frontera libre y móvil para materiales de cambio de fase (PCM), y en particular para la ecuación del calor.

Se considera el siguiente problema de solidificación, para un material semi-infinito con una sobre-condición en la frontera fija $x = 0$ (Alexiades y Solomon, 1996; Cannon, 1984; Carslaw y Jaeger, 1959; Crank, 1984):

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \rho c T_t(x, t) = (k(T) T_x(x, t))_x, \quad 0 < x < s(t), t > 0 \\ ii) T(0, t) = T_o < T_f, \quad , t > 0 \\ iii) k(T_o) T_x(0, t) = \frac{q_o}{\sqrt{t}}, \quad , t > 0, q_o > 0 \\ iv) T(s(t), t) = T_f, \quad , t > 0 \\ v) k(T_f) T_x(s(t), t) = h \rho \dot{s}(t), \quad , t > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

donde $T(x, t)$ es la temperatura de la fase sólida, $\rho > 0$ es la densidad de masa, $h > 0$ es el calor latente de fusión por unidad de masa, $c > 0$ es el calor específico, $x = s(t)$ es la frontera de cambio de fase, T_f es la temperatura de cambio de fase, T_o es la temperatura en la frontera fija $x = 0$ y q_o es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en $x = 0$ dado por (1iii), el cual debe ser obtenido experimentalmente. Se supone que la conductividad térmica tiene la siguiente expresión (Cho y Sunderland, 1974):

$$k = k(T) = k_o(1 + \beta(T - T_o)/(T_f - T_o)) \quad (2)$$

Sea $\alpha_o = k_o/\rho c$ el coeficiente de difusividad a temperatura T_o . Se observa que si $\beta = 0$, entonces el problema (1) se convierte en el clásico problema de una fase de Lamé-Clapeyron-Stefan, con una sobre-condición sobre la frontera fija $x = 0$. La determinación simultánea de coeficientes térmicos de dicho problema, fue estudiada en (Tarzia, 1982, 1983). Los procesos de cambio de fase con conductividad térmica dependiente de la temperatura, de la forma (2), fueron inicialmente estudiados en (Cho y Sunderland, 1974). Otros trabajos relacionados con determinación de coeficientes térmicos son (Das et al., 2009; Inatomi et al., 2007; Lamvik y Zhou, 1995; Vajjha y Das, 2009; Wang et al., 2006; Yang y Zhou, 2006; Yang et al., 2008).

El problema (1) se puede considerar como:

I) un problema de frontera libre (Problema de Stefan) con una sobre-condición en la frontera fija $x = 0$, en el cual las incógnitas serán: la temperatura $T(x, t)$, la frontera libre $s(t)$ y dos coeficientes térmicos elegidos entre k_o, β, ρ, c y h .

II) un problema de frontera móvil (Problema inverso de Stefan) con una sobre-condición en la frontera fija $x = 0$, en el cual la frontera de cambio de fase viene dada por la siguiente expresión:

$$s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad (3)$$

donde $\sigma > 0$ debe ser obtenido experimentalmente a través de un proceso de cambio de fase (Arderius et al., 1996; Tarzia, 1983). En este problema las incógnitas serán: la temperatura $T(x, t)$ y tres coeficientes térmicos elegidos entre k_o, β, ρ, c y h .

Cuando el problema (1) es un problema de Stefan entonces la solución está dada por (Cho y Sunderland, 1974; Tarzia, 1998):

$$T(x, t) = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\Phi_\delta(\lambda)} \Phi_\delta(\eta), \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_o t}}, \quad 0 < \eta < \lambda \quad (4)$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_o t}, \quad t > 0, \quad (5)$$

donde λ es un parámetro positivo que caracteriza a la frontera libre y $\Phi_\delta = \Phi_\delta(x)$ es la función error modificada, para cierto $\delta > -1$, la cual es la única solución del siguiente problema de contorno en la variable x , i.e:

$$\begin{cases} i) [(1 + \delta\Phi'_\delta(x))\Phi'_\delta(x)]' + 2x\Phi_\delta(x) = 0, & x > 0 \\ ii) \Phi_\delta(0^+) = 0, & \Phi_\delta(+\infty) = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Los coeficientes térmicos desconocidos deben además satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\beta - \delta\Phi_\delta(\lambda) = 0 \quad (7)$$

$$[1 + \delta\Phi_\delta(\lambda)] \frac{\Phi'_\delta(\lambda)}{\lambda\Phi_\delta(\lambda)} - \frac{2h}{c(T_f - T_o)} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\Phi'_\delta(0)}{\Phi_\delta(\lambda)} - \frac{2q_o}{(T_f - T_o)\sqrt{k_o\rho c}} = 0. \quad (9)$$

En particular, si $\delta = 0$, se tiene que $\Phi_\delta(x) = erf(x)$ es la función error, que está definida por:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (10)$$

Cuando el coeficiente $\delta = 0$, la determinación de las fórmulas correspondientes a uno o dos coeficientes térmicos indeterminados fueron realizadas en (Tarzia, 1982, 1983), y su determinación numérica y experimental fue realizada en (Arderius et al., 1996). Por otro lado, cuando el coeficiente $\delta \neq 0$, el problema dado por (1) fue analizado en (Tarzia, 1998), donde se determinaron condiciones necesarias y suficientes sobre los datos para la existencia de solución.

Un primer objetivo de este trabajo es obtener un análisis de sensibilidad de los cuatro problemas de frontera libre analizados en (Tarzia, 1998). En dicho trabajo se determinaron, para un problema de Stefan a una fase (problema de frontera libre), la temperatura $T(x, t)$, la frontera libre $s(t)$ (i.e. el coeficiente λ , definido en (5)) y los siguientes parámetros en los cuatro siguientes casos:

FL: i) λ, β, k_o ; ii) λ, β, ρ ; iii) λ, β, h ; iv) λ, β, c .

Cuando el problema (1) es un problema inverso de Stefan entonces la solución está dada por (Cho y Sunderland, 1974; Tarzia, 1998):

$$T(x, t) = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\Phi_\delta(\sigma/\sqrt{\alpha_o})} \Phi_\delta(\eta), \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_o t}}, \quad 0 < \eta < \sigma/\sqrt{\alpha_o} \quad (11)$$

y los coeficientes térmicos desconocidos deben además satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\beta - \delta\Phi_\delta(\sigma/\sqrt{\alpha_o}) = 0 \quad (12)$$

$$(1 + \delta \Phi_\delta(\sigma/\sqrt{\alpha_o})) \frac{\sqrt{\alpha_o} \Phi'_\delta(\sigma/\sqrt{\alpha_o})}{\sigma \Phi_\delta(\sigma/\sqrt{\alpha_o})} - \frac{2h}{c(T_f - T_o)} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\Phi'_\delta(0)}{\Phi_\delta(\sigma/\sqrt{\alpha_o})} - \frac{2q_o}{(T_f - T_o)\sqrt{k_o\rho c}} = 0. \quad (14)$$

Un segundo objetivo de este trabajo es obtener un análisis de sensibilidad de los seis problemas de frontera móvil analizados en (Tarzia, 1998), en el cual se determinaron, para un problema inverso de Stefan de una fase (problema de frontera móvil), la temperatura $T(x, t)$ y los siguientes parámetros en los seis siguientes casos:

FM: i) β, k_o, ρ ; ii) β, k_o, c ; iii) β, k_o, h ; iv) β, ρ, c ; v) β, ρ, h ; vi) β, c, h .

Las fórmulas explícitas para los coeficientes térmicos desconocidos, en cada uno de los diez casos planteados anteriormente, fueron resumidas en la Tabla N° 1 en (Tarzia, 1998). Para los casos FL (iii y iv) y FM (ii, iv, v y vi), se obtuvieron las restricciones que deben satisfacer los datos para que el problema correspondiente tenga solución. Estas restricciones son:

$$\frac{(T_f - T_o)\Phi'(0)}{2q_o} \sqrt{k_o\rho c} < 1 \quad (R_1)$$

$$\frac{(T_f - T_o)k_o\rho h}{2q_o^2} < 1 \quad (R_2)$$

$$\frac{\rho\sigma h}{q_o} < 1 \quad (R_3)$$

$$\frac{(T_f - T_o)k_o}{2\sigma q_o} < 1. \quad (R_4)$$

2. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Para poder determinar la influencia de parámetros conocidos sobre los parámetros desconocidos se define la *sensibilidad normalizada* (Marinetti y Vavilov, 2005):

$$S(p, q_i) = \frac{q_i}{p} \left[\frac{\partial p}{\partial q_i} \right], \quad (15)$$

donde p es un cierto parámetro solución (por ejemplo, los parámetros adimensionales β , λ , ó la conductividad térmica inicial k_o en el Caso 1 de frontera libre) y q_i es uno de los parámetros dados (por ejemplo, δ, ρ, c, h en el Caso 1 de frontera libre). La adimensionalidad de la sensibilidad normalizada permite comparar la sensibilidad de parámetros con magnitudes diferentes. Ésta indica qué porcentaje varía el parámetro p , cuando q_i crece o decrece en un 1% (Colin et al., 2006; Imani et al., 2006). La sensibilidad normalizada $S(p, q_i)$ es aproximada por:

$$S^+(p, q_i) = \frac{q_i}{p(q)} \left[\frac{p(\hat{q}^+) - p(q)}{\hat{q}_i^+ - q_i} \right] \quad (16)$$

$$S^-(p, q_i) = \frac{q_i}{p(q)} \left[\frac{p(\hat{q}^-) - p(q)}{\hat{q}_i^- - q_i} \right] \quad (17)$$

donde q es el vector $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $p(q)$ es el vector $p(q) = p(q_1, q_2, \dots, q_n)$, y

$$\hat{q}_j^+ = \begin{cases} q_j & si \quad j \neq i \\ q_i + \epsilon|q_i| & si \quad j = i \end{cases} \quad (18)$$

$$\hat{q}_j^- = \begin{cases} q_j & si \quad j \neq i \\ q_i - \epsilon|q_i| & si \quad j = i \end{cases} \quad (19)$$

donde $\epsilon = 0,01$. Se llama *sensibilidad normalizada derecha* a (16), y representa el cambio en el parámetro p cuando q_i se incrementa un 1 %. Se llama *sensibilidad normalizada izquierda* a (17) y representa el cambio en el parámetro p cuando q_i disminuye un 1 %. Si la sensibilidad es negativa, significa que el parámetro p es inversamente proporcional al parámetro q_i , y si la sensibilidad es positiva, significa que el parámetro p es directamente proporcional a parámetro q_i .

Para el análisis de sensibilidad se utilizó el software libre SCILAB . En cada caso, primero se resolvió numéricamente la ecuación diferencial (6), utilizando el comando *bvodeS* con el δ dado, pudiendo evaluar la función error, y su derivada, en cualquier punto. Luego se resolvió la ecuación para λ dada por la Tabla N°1 en (Tarzia, 1998), buscando el mínimo valor absoluto, utilizando el algoritmo de Levenberg-Marquardt (Press et al., 1986). Finalmente, con el valor aproximado de λ , se determinaron los coeficientes térmicos desconocidos, utilizando las ecuaciones dadas por la misma tabla. En cada caso, se utilizaron los datos siguientes necesarios, que satisfacen las ecuaciones (7)-(9), correspondientes al aluminio alrededor de su temperatura de fusión:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,0318778 & \delta &= 0,1177546 & \lambda &= 0,2433491 & k_o &= 293,1882 \text{ W/m}^\circ\text{C} \\ c &= 783,6192 \text{ J/kg}^\circ\text{C} & \rho &= 2698,4 \text{ kg/m}^3 & h &= 388000 \text{ J/kg} & q_o &= 3179226,8 \text{ kg/s}^{5/2} \\ T_f &= 660^\circ\text{C} & T_o &= 600^\circ\text{C} & \sigma &= 0,0028655 \text{ m/s}^{1/2}. \end{aligned}$$

2.1. Determinación de coeficientes térmicos a través de un problema de frontera libre

Se analizaron en cada caso las relaciones entre los parámetros solución y los parámetros datos. En la Tabla 1 se muestran las sensibilidades normalizadas izquierda y derecha, en la cual se puede observar que en los casos 1, 2 y 3 las sensibilidades son menores a 1,01 %. En el caso 4, en cambio, se alcanza una sensibilidad del orden del 12 %, lo cual indica que el más mínimo error en los parámetros k_o , ρ o c provoca grandes variaciones en el parámetro h .

Caso N°	Coef. Indet.	δ		k_o		ρ		c		h	
1	λ	0.008	0.008	-	-	0	0	0.48	0.48	-0.48	-0.48
	β	1.01	1.01	-	-	0	0	0.46	0.46	-0.46	-0.46
	k_o	-0.015	-0.015	-	-	-1.01	-0.99	-0.082	-0.081	-0.92	-0.9
2	λ	0.008	0.008	0	0	-	-	0.48	0.48	-0.48	-0.48
	β	1.01	1.01	0	0	-	-	0.46	0.45	-0.46	-0.45
	ρ	-0.015	-0.015	-1.01	-0.99	-	-	-0.082	-0.081	-0.92	-0.9
3	λ	0.016	0.016	0.52	0.52	0.52	0.52	-	-	0.52	0.52
	β	1.02	1.02	0.5	0.49	0.5	0.49	-	-	0.5	0.49
	c	-0.016	-0.016	-1.1	-1.07	-1.1	-1.07	-	-	-0.089	-0.088
4	λ	-0.084	-0.084	-5.85	-6.08	-5.85	-6.08	-5.85	-6.08	-	-
	β	0.92	0.92	-5.52	-5.78	-5.52	-5.78	-5.52	-5.78	-	-
	h	-0.19	-0.19	-12.4	-12.1	-12.4	-12.1	-11.3	-11.2	-	-

Tabla 1: Sensibilidades normalizadas izquierda y derecha en los cuatro casos de frontera libre.

A continuación se analizará el caso 1 graficándose los tres parámetros solución $\{\lambda, \beta, k_o\}$ en función de los parámetros datos $\{\delta, \rho, c, h\}$. En la Figura 1 se aprecia que:

- i) el parámetro λ es más sensible a cambios en h y c , y permanece constante con cambios en δ y ρ ,
- ii) el parámetro β es más sensible a cambios en δ y permanece constante con cambios en ρ ,
- iii) el parámetro k_o es más sensibles a cambios en ρ y h , y tiene muy poca variación con cambios en δ y c .

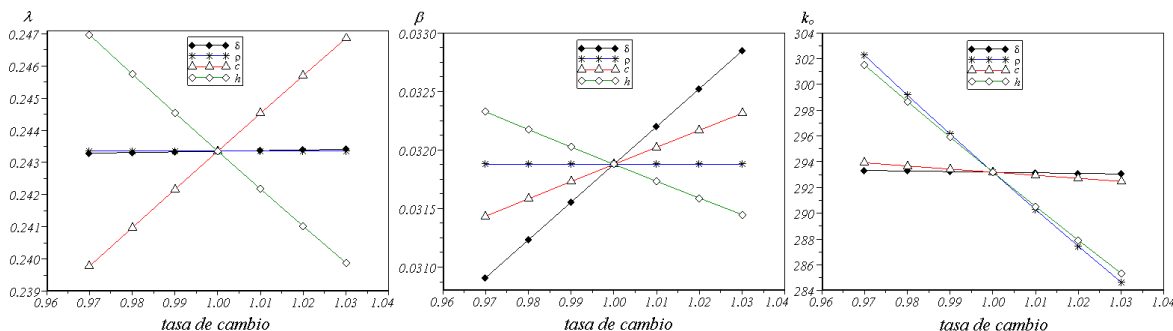


Figura 1: λ, β y k_o versus la variación relativa de $\{\delta, \rho, c, h\}$ en el Caso 1 de Frontera Libre.

Para los otros tres casos se pueden obtener resultados y gráficas del mismo tipo.

2.2. Determinación de coeficientes térmicos a través de un problema de frontera móvil

Se analizaron en cada caso las relaciones entre los parámetros solución y los parámetros datos. En la Tabla 2 se muestran las sensibilidades normalizadas izquierda y derecha, y se puede observar que la mayor sensibilidad fue de -59,4 %, en el Caso 5, es decir que si se tiene un error del 1 % en el parámetro σ , los valores de h varían de 388000 J/Kg a 230.472 J/Kg. Las mayores sensibilidades aparecen en los casos 4, 5 y 6, en los parámetros σ y k_o .

Caso N°	Coef. Indet.	δ		σ		k_o		ρ		c		h	
		1.01	1.01	0	0	-	-	-	-	0.46	0.45	-0.46	-0.45
1	β	-0.015	-0.015	1	1	-	-	-	-	-0.026	-0.025	0.025	0.025
	k_o	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	-1.01	-0.99	-	-	-	-	-0.056	-0.055	-0.95	-0.93
	ρ												
2	β	1.01	1.01	-7.92	-8.63	-	-	-7.92	-8.63	-	-	-7.92	-8.63
	k_o	-0.016	-0.016	1.45	1.47	-	-	0.45	0.46	-	-	0.45	0.46
	c	0.0052	0.0052	-18.1	-17.7	-	-	-18.1	-17.7	-	-	-17	-16.9
3	β	1.01	1.01	0.48	0.48	-	-	0.48	0.48	0.48	0.48	-	-
	k_o	-0.015	-0.015	0.97	0.97	-	-	-0.027	-0.027	-0.027	-0.027	-	-
	h	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	-1.07	-1.04	-	-	-1.07	-1.04	-0.059	-0.059	-	-
4	β	0.73	0.72	19.5	16.6	-16.8	-19.3	-	-	-	-	0	0
	ρ	0.034	0.034	-3.15	-3.16	2.22	2.1	-	-	-	-	-1	-0.99
	c	-0.61	-0.6	37.2	40.5	-41	-36.9	-	-	-	-	0.99	1
5	β	0.73	0.72	19.5	16.6	-16.8	-19.3	-	-	0	0	-	-
	ρ	-0.58	-0.57	35.2	36.1	-37.8	-35.5	-	-	-1	-0.99	-	-
	h	0.61	0.61	-59.4	-28.8	29.1	58.5	-	-	1	1	-	-
6	β	0.73	0.72	19.5	16.6	-16.8	-19.3	0	0	-	-	-	-
	c	-0.58	-0.57	35.2	36.1	-37.8	-35.5	-1	-0.99	-	-	-	-
	h	0.034	0.034	-3.15	-3.16	2.22	2.1	-1	-0.99	-	-	-	-

Tabla 2: Sensibilidades normalizadas izquierda y derecha en los seis casos de frontera móvil.

A continuación se analizarán los casos 1 y 4, graficándose los tres parámetros solución $\{\beta, k_o, \rho\}$ en función de los parámetros datos $\{\delta, \sigma, c, h\}$ en el caso 1, y los tres parámetros solución $\{\beta, \rho, c\}$ en función de los parámetros datos $\{\delta, \sigma, k_o, h\}$ en el caso 2.

2.2.1. Caso 1

En este caso se observa en la Figura 2 que:

- i) el parámetro β tiene mayor sensibilidad respecto de δ , permanece constante respecto de σ y tiene sensibilidad negativa respecto de h ,
- ii) el parámetro k_o tiene mayor sensibilidad respecto de σ , y presenta pequeñas variaciones con cambios en δ, c y h ,
- iii) el parámetro ρ tiene sensibilidad negativa del mismo orden respecto de σ y h , y presenta pequeñas variaciones con cambios en δ y c .

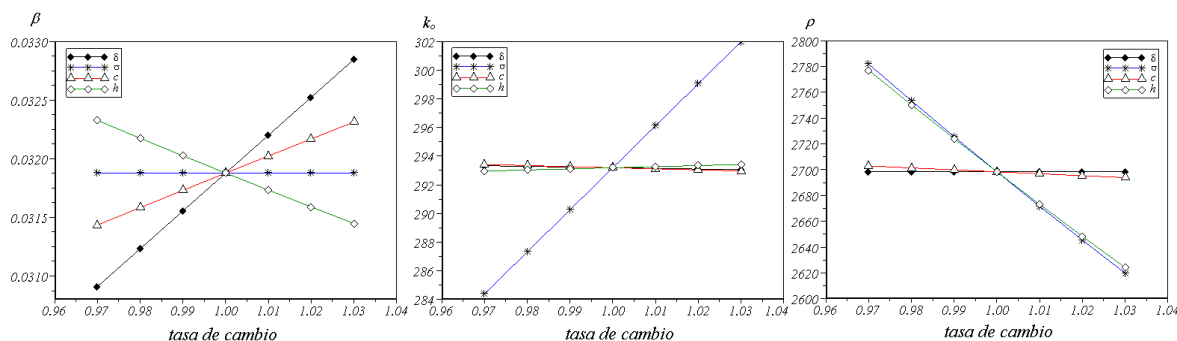


Figura 2: β, k_o y ρ versus la variación relativa de $\{\delta, \sigma, c, h\}$ en el Caso 1 de Frontera Móvil.

2.2.2. Caso 4

En este caso se observa en la Figura 3 que:

- i) el parámetro β tiene sensibilidad positiva respecto de σ , sensibilidad negativa respecto de k_o , y presenta pequeñas variaciones respecto de δ y h ;
- ii) el parámetro ρ tiene sensibilidad positiva respecto de k_o , sensibilidad negativa respecto de σ y h , y permanece constante respecto de δ ;
- iii) el parámetro c tiene sensibilidad positiva respecto de σ , sensibilidad negativa respecto de k_o , y presenta pequeñas variaciones respecto de δ y h .

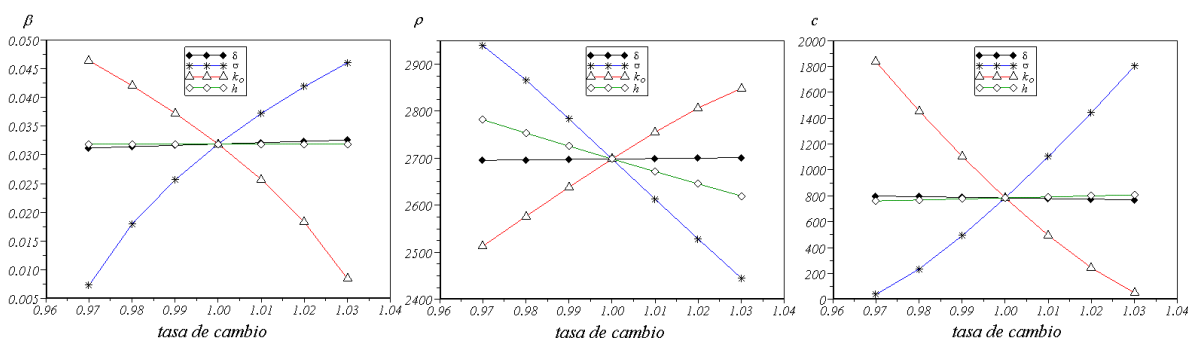


Figura 3: β, ρ y c versus la variación relativa de $\{\delta, \sigma, k_o, h\}$ en el Caso 4 de Frontera Móvil.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP N° 0460 de CONICET-UA, y Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCIAS

- Alexiades V. y Solomon A. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Hemisphere-Taylor & Francis, Washington, 1996.
- Arderius J., Lara M., y Tarzia D. Experimental-numerical determination of thermal coefficient through a phase-change process. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 23:745–754, 1996.
- Cannon J. *The one-dimensional heat equation*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.
- Carslaw H. y Jaeger C. *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
- Cho S. y Sunderland J. Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity. *J. Heat Transfer*, 96C:214–217, 1974.
- Colin E., Étienne S., y Pelletier D. A general sensitivity equation formulation for turbulent heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, 49:125–153, 2006.
- Crank J. *Free and moving boundary problem*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- Das D., Mishra S., y Uppaluri R. Retrieval of thermal properties in a transient conduction-radiation problem with variable thermal conductivity. *Int.J. Heat Transfer*, 52:2749–275, 2009.
- Imani A., Ranjbar A., y Esmkhani M. Simultaneous estimation of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity based on modified genetic algorithm. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 7:767–783, 2006.
- Inatomi Y., Onishi F., Nagashio K., y Kuribayashi K. Density and thermal conductivity measurements for silicon melt by electromagnetic levitation under a static magnetic field. *Int.J. Thermophysics*, 28:44–59, 2007.
- Lamvik M. y Zhou J. A novel technique for measuring the thermal conductivity of metallic materials during meeting and solidification. *Meas. Sci. Technol.*, 6:880–887, 1995.
- Marinetti S. y Vavilov V. Sensitivity analysis of classical heat conduction solutions applied to materials characterization. *Heat Transfer Engineering*, 26:50–60, 2005.
- Press W., Teukolsky S., Vetterling W., y Flannery B. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Press Syndicate of the University of Cambridge, New York, 1986.
- Tarzia D. Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem. *Advances in Applied Mathematics*, 3:74–8, 1982.
- Tarzia D. Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26:1151–1158, 1983.
- Tarzia D. The determination of unknown thermal coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 25:139–147, 1998.
- Tarzia D. A bibliography on moving-free boundary problems for heat diffusion equation. The Stefan problem. *MAT-Serie A*, 2:1–297, 2000.
- Vajjha R. y Das D. Experimental determination of thermal conductivity of three nanofluids and development of new correlations. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52:4675–4682, 2009.
- Wang A., Liang X., y Ren J. Constructal enhancement of heat conduction with phase-change. *Int. J. Thermophysics*, 27:126–138, 2006.
- Yang L., Yu J., y Deng Z. An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation. *Applied Math. Modelling*, 32:1984–1995, 2008.
- Yang Y. y Zhou J. An experimental technique for liquid/solid thermal conductivity measurements at the melting point. *Int. J. Thermophysics*, 27:184–194, 2006.