Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXIX, págs. 5237-5258 (artículo completo)
Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.)
Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010

MODELAGEM DA EVOLUÇÃO DO DANO ORTOTRÓPICO ACOPLADO À ELASTOPLASTICIDADE EM METAIS

Andresa Freitas, Paulo de Tarso R. de Mendonça, Clovis Sperb de Barcellos

Grupo de Análise e Projeto Mecânico - GRANTE, departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina,88040-900, Florianópolis, SC, Brasil, http://www.grante.ufsc.br

Palavras Chave: dano anisotrópico, mecânica do dano, elastoplasticidade, Método dos Elementos Finitos.

Resumo. Neste trabalho estuda-se um modelo de dano dúctil tridimensional baseado nos princípios da mecânica do contínuo, na hipótese de equivalência de deformação e no conceito de tensão efetiva, com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis. Faz-se o acoplamento das teorias de elastoplasticidade e dano (modelo de Lemaitre) a fim de realizar uma simulação numérica da evolução do dano em estruturas, via Método dos Elementos Finitos (MEF). Postulados da mecânica do dano em meio contínuo foram utilizados buscando-se incorporar o dano como uma variável interna. Primeiramente utiliza-se uma variável de dano escalar isotrópica e posteriormente introduz-se a anisotropia na distribuição das micro-trincas, através do dano ortotrópico, representado por um tensor simétrico de segunda ordem. O código computacional desenvolvido é baseado no MEF e no modelo constitutivo de Lemaitre adaptado para materiais metálicos, considerando-se um comportamento isotrópico do material, com encruamento isotrópico linear e critério de plastificação de von Misses. O algoritmo numérico correspondente à integração das equações constitutivas é baseado em uma etapa de previsão (estado elástico teste) e uma etapa de correção (estado corretor plástico/dano), sendo que a implementação da simulação numérica é realizada com a utilização do programa MATLAB®. Apresentam-se o algoritmo de integração e mapeamento de retorno baseado no modelo constitutivo mencionado acima, bem como os resultados da análise, onde se realizam simulações que mostram a influência de alguns parâmetros de dano na evolução do dano ortotrópico.

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais metas da ciência de engenharia com relação a um projeto mecânico é analisar e se possível, prever a falha de um componente. Para o caso de fratura (dúctil ou frágil), esta análise se baseia na investigação da existência de micro-trincas (Lemaitre, 1996), representando o dano, que é uma deterioração do material e ocorre antes da falha. Desta forma, o enfoque é dado na evolução do dano interno antes que ele seja visível macroscopicamente na forma de trincas ou fraturas.

A Mecânica do Dano em Meio Contínuo (MDC) representa uma abordagem local de detecção da falha, sendo considerada uma das ferramentas mais promissoras para prever a iniciação e a propagação da macro-trinca (Doghri, 1995), tratando o material danificado como macroscopicamente homogêneo (Chaboche, 1981).

O objetivo deste trabalho é acoplar as teorias de plasticidade e dano a fim de realizar uma simulação numérica, via Método dos Elementos Finitos (MEF), da evolução do dano em estruturas submetidas à carga uniforme, considerando-se apenas a cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Além disso, pretende-se identificar a influência de alguns parâmetros de dano na evolução do dano ortotrópico.

As rotinas desenvolvidas são adequadas a metais, para um material de comportamento isotrópico e encruamento isotrópico linear. A implementação da simulação numérica foi realizada com a utilização do programa MATLAB® 7.6.0.

Com relação ao dano, primeiramente faz-se referência ao dano isotrópico e posteriormente introduz-se a anisotropia na distribuição das micro-trincas, através do dano ortotrópico. A importância deste tipo de dano está em situações onde, por exemplo, dois ou mais carregamentos altamente direcionais são aplicados seqüencialmente. Nestes casos, cada carregamento causará o crescimento de micro-trincas em uma direção preferencial, afetando a resposta do material para carregamentos posteriores em direções diferentes. Neste sentido, a hipótese usual de isotropia pode oferecer uma boa primeira aproximação, mas pode apresentar erros substanciais em muitas aplicações práticas (Souza Neto et al. 2008).

2 PLASTICIDADE

A seguir serão apresentadas as equações que governam a plasticidade clássica no contexto tridimensional, considerando-se as referências Chen e Han (1988), Simo e Hughes (1998) e Souza Neto et al. (2008) .

Este estudo é motivado pelo modelo unidimensional, considerando-se o escoamento plástico como um processo irreversível e caracterizado em termos da história das seguintes variáveis independentes: o tensor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, o tensor de deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e a variável interna de encruamento α. Aqui será enfatizado o modelo com encruamento isotrópico linear. A generalização do modelo unidimensional para o caso tridimensional é apresentada a seguir:

1) A decomposição aditiva do tensor deformação total assume a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}, \text{ isto é } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} \quad (1)$$

que pode representar o tensor deformação elástica como $\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}$.

2) O tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ está relacionado com a deformação elástica da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p}\right], \text{ isto é } \sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl}^{e} \quad (2)$$

onde $\boldsymbol{C}$ é o tensor de módulo elástico, um tensor constitutivo linear de quarta ordem constante:

$$\boldsymbol{C} = \lambda \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{II} = 2\mu(\boldsymbol{II} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) + \kappa \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \tag{3}$$

onde

$$\boldsymbol{I} = \delta_{ij} e_i \otimes e_j \tag{4}$$

é o tensor identidade de segunda-ordem e

$$\boldsymbol{II} = \frac{1}{2}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right] e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \tag{5}$$

é o tensor identidade simétrico de quarta-ordem, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker, κ o módulo volumétrico e λ e μ as constantes de Lamé, relacionadas ao módulo de elasticidade longitudinal E e ao coeficiente elástico de Poisson ν.

3) A condição de escoamento é definida como uma função $f : S \times \Re \rightarrow \Re$ e os estados admissíveis $\{\boldsymbol{\sigma}, q\} \in S \times \Re$ são restringidos ao espaço de tensões sobre o conjunto E_σ, definido como:

$$E_\sigma := \left\{(\boldsymbol{\sigma}, q) \in S \times \Re \ \text{ tal que } \ f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0\right\} \tag{6}$$

onde q é uma variável dada por $q = H'\alpha$; H' é o módulo plástico de encruamento isotrópico associado a variável de estado α, que é a variável interna de encruamento isotrópico relacionado à evolução da deformação plástica. $S := \left\{\xi : \Re^{\mathrm{n_{dim}}} \rightarrow \Re^{\mathrm{n_{dim}}} \text{ tal que } \xi \text{ é linear e } \xi = \xi^{\mathrm{T}}\right\}$ é o espaço vetorial com produto interno $\xi : \xi = \mathrm{tr}\left[\xi^{\mathrm{T}}\xi\right] \equiv \xi_{\mathrm{ij}}\xi_{\mathrm{ij}}$.

4) O domínio elástico é definido pelo interior de E_σ e denotado por $\mathrm{int}(E_\sigma)$ e a superfície de escoamento no espaço de tensões é formada pelo contorno de E_σ, denotada por ∂E_σ. Como no caso unidimensional, $E_\sigma = \mathrm{int}(E_\sigma) \cup \partial E_\sigma$.

5) Adotando-se a associatividade no encruamento, as equações de evolução para $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e q, chamadas de regra do escoamento e lei do encruamento, respectivamente, são:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma\, \partial_\sigma f \tag{7}$$

$$\dot{q} = -\gamma\, H'\, \partial_q f \tag{8}$$

onde $\partial_\sigma f$ e $\partial_q f$ indicam $\partial f / \partial \sigma$ e $\partial f / \partial q$, respectivamente. O parâmetro $\gamma \geq 0$ é uma função não-negativa, chamada de parâmetro de consistência, que dá a "velocidade" da plastificação e obedece as condições de complementaridade de Kuhn-Tucker (condições de carga-descarga):

$$\gamma \geq 0, \qquad f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0, \qquad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \tag{9}$$

além disso, satisfaz a condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \tag{10}$$

onde $\dot{f}$ é a taxa da função de escoamento.

A partir da condição de consistência, sabendo-se que o tensor $\boldsymbol{C}$ é positivo definido, pode-se obter uma expressão para $\gamma > 0$:

$$\text{se } \dot{f} = 0, \text{ então } \gamma = \frac{\partial_\sigma f : \boldsymbol{C} : \dot{\varepsilon}}{\partial_\sigma f : \boldsymbol{C} : \partial_\sigma f + \partial_q f \; H' \; \partial_q f} \tag{11}$$

Após o escoamento plástico, substituindo (11) na equação constitutiva em taxa e usando a equação ((7)), obtém-se a relação:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{12}$$

onde $\boldsymbol{C}^{ep}$ é o módulo tangente elastoplástico, dado por:

$$\boldsymbol{C}^{ep} = \begin{cases} \boldsymbol{C}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \boldsymbol{C} - \dfrac{\boldsymbol{C} : \partial_\sigma f \otimes \boldsymbol{C} : \partial_\sigma f}{\partial_\sigma f : \boldsymbol{C} : \partial_\sigma f + \partial_q f \; H' \; \partial_q f} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \tag{13}$$

$\boldsymbol{C}^{ep}$ é um tensor de quarta ordem frequentemente chamado de operador tangente elastoplástico contínuo (Simo, 1985). Geralmente, $\boldsymbol{C}^{ep}$ não é simétrico, exceto no caso onde é usado um modelo associativo.

As equações vistas acima fazem parte do conjunto de equações que governam a plasticidade geral, podendo ser aplicadas a diferentes modelos constitutivos elastoplásticos, já que não foi feita alguma particularização com relação à função $f(\boldsymbol{\sigma}, q)$.

2.1 Modelo elastoplástico J_2 com encruamento isotrópico linear

No caso do modelo elastoplástico J_2 com encruamento isotrópico linear, que é o utilizado neste trabalho, a condição de escoamento de von Mises é dada por:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \varsigma - (\sigma_y + q) \leq 0 \tag{14}$$

onde $q = H'\alpha$, $\varsigma = \sqrt{3J_2}$ é denominada tensão equivalente ou tensão de Von Mises, em que J_2 é o segundo invariante do tensor deviatórico de tensões $\boldsymbol{s}$.

A taxa de deformação plástica fica expressa na forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \, \partial_\sigma f = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{n} = \gamma \boldsymbol{N} \tag{15}$$

onde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} / \|\boldsymbol{s}\|$ é um tensor de norma unitária que dá a direção do escoamento plástico e $\boldsymbol{N} = \sqrt{3/2}\, \boldsymbol{n}$ é denominado tensor de escoamento.

Considerando o fato de que para o modelo de von Mises $\boldsymbol{N}$ é um tensor deviatórico, tem-se (Souza Neto et al. 2008):

$$\boldsymbol{NC} : \boldsymbol{N} = 2\mu \boldsymbol{N} \tag{16}$$

e usando $\boldsymbol{N} = \sqrt{3/2}\, \boldsymbol{n}$, segue que:

$$\boldsymbol{N} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{N} = 3\mu \tag{17}$$

A equação ((8)) pode ser reescrita como:

$$\dot{q} = -\gamma H' \, \partial_q f = -\gamma H'(-1) = \gamma H' \tag{18}$$

A lei de evolução para α é dada por:

$$\dot{\alpha} = -\gamma \, \partial_q f = \gamma \tag{19}$$

Em termos da descrição termodinâmica, o modelo de von Mises com encruamento isotrópico é obtido postulando-se que:

$$\alpha \equiv \varepsilon_{ac}^{p} \tag{20}$$

onde ε_{ac}^{p} é a deformação plástica acumulada, com taxa dada por $\dot{\varepsilon}_{ac}^{p} = \sqrt{2/3}\left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}\right\| = \gamma$.

A partir da equação (13), adotando-se $\partial_\sigma f = \boldsymbol{N}$ (normalidade) e usando-se as equações ((16)) e ((17)), chega-se a forma:

$$\boldsymbol{C}^{ep} = \boldsymbol{C} - \frac{6\mu^2}{3\mu + H'}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) = \lambda \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu\left[\boldsymbol{II} - \frac{(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})}{1+\frac{H'}{3\mu}}\right], \; se \; \gamma > 0 \tag{21}$$

3 MECÂNICA DO DANO EM MEIO CONTÍNUO

A Mecânica do Dano em Meio Contínuo (MDC) é um ramo da mecânica dos sólidos em meio contínuo, onde é possível formular modelos constitutivos capazes de descrever a degradação interna de sólidos.

Muitos modelos para estimativas de acúmulo de micro-dano em materiais dúcteis têm sido estudados, alguns baseados na micro-mecânica do dano (modelo de dano micro-mecânico), enquanto outros estão baseados na teoria de dano contínuo (modelo de dano fenomenológico) que é o modelo estudado neste trabalho.

A formulação de dano aqui apresentada é baseada nos princípios da mecânica em meio contínuo, no princípio de equivalência de deformação e no conceito de tensão efetiva $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, tendo L.M. Kachanov como pioneiro neste estudo (Katan e Voyiadjis, 2002; Ladevèze, 1983; Armero e Ollers, 2000).

Neste estudo original de Kachanov, que usa a hipótese de dano isotrópico, a variável de dano é fisicamente definida pela redução da área de um plano da seção transversal A que corta um elemento de volume representativo (EVR), devido à micro-trincas (Voyiadjis e Kattan, 1999; Souza Neto et al. 2008). Desta forma, seja um corpo danificado sujeito a uma força trativa F, a variável de dano D é definida como um escalar da seguinte maneira:

$$D = \frac{A - \bar{A}}{A} = \frac{A_D}{A} \tag{22}$$

onde A_D é a área danificada e $\bar{A}$ é a área que efetivamente resiste ao carregamento. Daí, segue desta definição que o valor da variável escalar D é limitada por 0 e 1:

$$0 \le D \le 1 \tag{23}$$

onde $D = 0$ corresponde ao material do elemento sem dano e $D = 1$ é um valor crítico que implica na ruptura do elemento em duas partes.

A tensão efetiva $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, relacionada à superfície que resiste efetivamente ao carregamento, é dada por:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} \tag{24}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é a tensão uniaxial da barra, que é facilmente encontrada pela fórmula $F = \boldsymbol{\sigma} A$.

Alguns pesquisadores tendem a adotar uma variável de dano escalar isotrópica, que é tradicional e mais simples. No entanto, para uma aplicação mais realista dos princípios da mecânica do dano, é necessário considerar a anisotropia do dano, onde o fenômeno anisotrópico da distribuição de micro-danos num material é interpretado usando um tensor simétrico de segunda ordem. Neste caso, diferentes níveis de dano são relacionados a direções principais, e um simples parâmetro de dano escalar não é mais suficiente para quantificar o dano em todas as direções (Al-Rub e Voyiadjis, 2003).

Desde o desenvolvimento original de Kachanov (1958) e Rabotnov (1963), não levou muito tempo para que o conceito de variável de dano interno fosse generalizado para situações tridimensionais.

Fisicamente, a variável de dano é definida como a densidade da superfície de micro-trincas sobre um plano do EVR de seção transversal δS. Para um plano de normal n, tem-se:

$$D_{(\mathrm{n})} = \frac{\delta S - \delta \tilde{S}}{\delta S} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \tag{25}$$

onde $\delta \tilde{S}$ representa a área íntegra num meio danificado e δS_D é a superfície danificada.

Para o estudo de dano tridimensional em metais dúcteis acoplado com plasticidade, será considerado o modelo de Lemaitre para dano isotrópico e ortotrópico (Lemaitre e Desmorat, 2005; Souza Neto et al. 2008), baseado no conceito de tensão efetiva e na hipótese de equivalência de deformação.

Neste caso, a forma generalizada da relação constitutiva estabelece uma relação entre tensores de segunda ordem de tensão e de deformação por meio de um tensor constitutivo de rigidez elástica de quarta ordem

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl} \tag{26}$$

3.1 Termodinâmica do dano

O ponto de partida dessa teoria é a hipótese de que a energia livre, tomada como potencial termodinâmico, é uma função do conjunto de variáveis de estado internas $\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^p,\ \alpha, D\right\}$ (Souza Neto et al. 2008), isto é:

$$\psi = \psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}^e,\ \alpha, D\right) \tag{27}$$

3.1.1 Potencial de dissipação e leis de evolução

A dissipação, que precisa ser positiva para satisfazer a segunda lei da termodinâmica, é escrita através da desigualdade de Clausius-Duhem, da seguinte forma (Torres, 2003):

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - q\dot{\alpha} - Y\dot{D} \geq 0 \tag{28}$$

Considera-se um potencial de dissipação φ, que é função das variáveis associadas

$\{\boldsymbol{\sigma}, q, Y\}$ das quais derivam as leis de evolução para $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e,\ \alpha,\ D\}$ (Lemaitre, 1985). Admite-se sua decomposição em uma parcela relativa aos efeitos de plastificação e encruamento φ^p e outra relativa à danificação φ^d,

$$\varphi = \varphi^p\left(\boldsymbol{\sigma}, q; D\right) + \varphi^d\left(Y; D\right) \tag{29}$$

Do potencial de dissipação são derivadas as leis que governam a evolução das variáveis internas $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p,\ \alpha,\ D\}$, que para o caso de dano acoplado com plasticidade, são escritas como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{30}$$

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial q} \tag{31}$$

$$\dot{D} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \tag{32}$$

3.2 Dano isotrópico

Para o dano isotrópico, a variável de dano D é um escalar e apresenta o mesmo valor em todas as direções (Omerspahic, 2007), não dependendo da normal n.

Segundo a hipótese de decomposição entre elasticidade-dano e encruamento plástico, a energia livre pode ser escrita como a seguinte soma (Souza Neto et al. 2008):

$$\psi = \psi^{ed}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D\right) + \psi^p\left(\alpha\right) \tag{33}$$

onde ψ^{ed} e ψ^p são, respectivamente, a contribuição de elasticidade-dano e a contribuição plástica para a energia livre. De acordo com o princípio de equivalência de deformação, o potencial de elasticidade-dano é dado por (Lemaitre e Desmorat, 2005):

$$\rho\psi^{ed}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : (1-D)\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{2E}\frac{\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \frac{\nu}{2E}\frac{tr\left(\boldsymbol{\sigma}\right)^2}{1-D} \tag{34}$$

ou em termos das tensões deviatórica e volumétrica:

$$\rho\psi^{ed}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D\right) = \frac{1+\nu}{2E}\frac{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}{1-D} + \frac{3(1-2\nu)}{2E}\frac{p^2}{1-D} = \frac{\varsigma R_\nu}{2E(1-D)} \tag{35}$$

onde ρ é a densidade do material, $\boldsymbol{C}$ é o tensor de módulo elástico isotrópico do meio íntegro, $p = \frac{1}{3}tr\left(\boldsymbol{\sigma}\right)$ é a tensão volumétrica, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\boldsymbol{I}$ é a tensão deviatórica, $\varsigma = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}$ a tensão equivalente de von Mises, ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de elasticidade e R_ν é a função de triaxialidade, dada por:

$$R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{p}{\varsigma}\right)^2 \tag{36}$$

Para este potencial particular, a lei da elasticidade é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e}} = (1-D)\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \tag{37}$$

O tensor tensão efetivo $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ pode ser escrito como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-D)} \tag{38}$$

A relação constitutiva do meio danificado contínuo é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \tag{39}$$

onde $\tilde{\boldsymbol{C}}$ é o tensor de módulo elástico efetivo, que considera o efeito da danificação. Com a hipótese de equivalência de deformação, obtém-se:

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = (1-D)\boldsymbol{C} \tag{40}$$

onde a variável de dano toma valores no intervalo $[0,1]$.

A força termodinâmica relacionada à variável interna de dano também é definida pelo potencial termodinâmico e é dada por:

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}^{e}, D) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{e} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e} = -\frac{\varsigma^{2} R_{v}}{2E(1-D)^{2}} \tag{41}$$

Comumente conhecido como a taxa de densidade de energia liberada pelo dano, $(-Y)$ corresponde à variação da densidade de energia interna devido ao crescimento do dano sob tensão constante.

Quanto ao potencial de dissipação, suas parcelas relativas aos efeitos de plastificação e encruamento φ^{p} e danificação φ^{d}, são dadas por:

$$\varphi^{p}(\boldsymbol{\sigma}, q, D) = f(\boldsymbol{\sigma}, q, D) \tag{42}$$

$$\varphi^{d}(Y, D) = \frac{\mathrm{r}}{(1-D)(\mathrm{s}+1)}\left(\frac{-Y}{\mathrm{r}}\right)^{\mathrm{s}+1} \tag{43}$$

sendo que r e s são parâmetros do material, definidas mediante ensaios experimentais. Aqui é adotada a hipótese de plasticidade associada, onde o critério de escoamento é usado como potencial plástico.

Para a função de escoamento f, é adotada a seguinte forma de von Mises:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q, D) = \bar{\varsigma} - (\sigma_{y} + q) \tag{44}$$

onde $\bar{\varsigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{\boldsymbol{s}} : \bar{\boldsymbol{s}}} = \sqrt{3J_{2}(\bar{\boldsymbol{s}})}$, $q = H'\alpha$ e σ_{y} é a tensão limite de escoamento inicial do material.

A regra da normalidade (hipótese clássica de materiais padrão generalizados) com relação a φ pode ser considerada válida, e obtêm-se as seguintes equações de evolução:

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\partial \varphi^{p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \boldsymbol{N} \quad (\text{regra do escoamento}) \tag{45}$$

onde γ é o parâmetro de consistência, $\boldsymbol{N}$ é o tensor de escoamento plástico (Souza Neto et al. 2008):

$$\boldsymbol{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{s}}{(1-D)\|\boldsymbol{s}\|} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{s}}{(1-D)\sqrt{3J_2(\boldsymbol{s})}} \tag{46}$$

e J_2 é o segundo invariante do tensor deviatórico de tensões $\boldsymbol{s}$.

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -\gamma \frac{\partial \varphi^{p}}{\partial q} = \gamma \tag{47}$$

Fazendo-se uso da regra do escoamento, dada pela equação (45), a lei de evolução da deformação plástica acumulada é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{ac}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}\| \tag{48}$$

e a lei de evolução do dano é escrita como:

$$\dot{D} = -\gamma \frac{\partial \varphi^{d}}{\partial Y} = \left(\frac{-Y}{\mathrm{r}}\right)^{\mathrm{s}} \dot{\varepsilon}_{ac}^{p} \tag{49}$$

Este modelo admite que o dano evolua somente após ser atingido certo valor para a deformação plástica acumulada ε_{ac}^{p}, sendo que este valor crítico é chamado limiar de dano e é denotado por ε_D. Assim, a lei de evolução do dano (49) pode ser modificada para:

$$\dot{D} = \mathrm{H}\left(\varepsilon_{ac}^{p} - \varepsilon_D\right)\left(\frac{-Y}{\mathrm{r}}\right)^{\mathrm{s}} \dot{\varepsilon}_{ac}^{p}, \quad \varepsilon_{ac}^{p} > \varepsilon_D \tag{50}$$

sendo que $\varepsilon_{ac}^{p} = \alpha$ enquanto não houver dano e a função de Heaviside H é definida como:

$$\mathrm{H}(a) = \begin{cases} 1 \text{ se } a \geq 0 \\ 0 \text{ se } a < 0 \end{cases}, \quad \text{para algum escalar } a \tag{51}$$

A condição de iniciação de uma meso-trinca é alcançada quando a variável escalar de dano atinge o valor crítico D_c, que é considerado uma constante do material e não é fácil de medir.

3.3 Dano ortotrópico

Para considerar a ortotropia do dano, será usada uma extensão do modelo de dano dúctil isotrópico descrito anteriormente.

O dano geral anisotrópico é representado por um tensor de quarta ordem, mas para aplicações práticas é frequentemente usado um tensor de segunda ordem simétrico (Desmorat e Cantournet, 2007), assim como os tensores de tensões e deformações. Como mostrado por observações microscópicas, o tensor de dano é principalmente dirigido pela deformação plástica, que o faz ortotrópico (Lemaitre e Desmorat, 2001).

Como o dano modifica as propriedades elásticas dos materiais, um tensor de elasticidade efetivo de quarta ordem é comumente introduzido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{52}$$

e utilizando o princípio de equivalência de deformacão, obtém-se:

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{M}^{-1} : \boldsymbol{C} \tag{53}$$

$\boldsymbol{M}$ é um tensor de quarta ordem, que também define o tensor tensão efetivo:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\sigma} \tag{54}$$

O tensor $\boldsymbol{M}$ pode ser escrito como:

$$M_{ijkl} = H_{ik}H_{lj} - \frac{1}{3}\left[H_{kl}^2\delta_{ij} + H_{ij}^2\delta_{kl}\right] + \frac{1}{9}H_{pp}^2\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{3\left(1-d_H\right)}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{55}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker,

$$d_H = \eta D_H \tag{56}$$

na qual η é um parâmetro do material introduzido por Lemaitre (Lemaitre et al. 2000) associado com a variação do coeficiente de Poisson devido ao dano. O parâmetro η depende do material e frequentemente, para metais, $\eta \approx 3$. D_H é dado por:

$$D_H = \frac{1}{3}tr\left(\boldsymbol{D}\right) = \frac{1}{3}D_{kk} \tag{57}$$

O tensor de segunda ordem $\boldsymbol{H}$ é chamado de tensor de dano efetivo, dado por:

$$H_{ij} \equiv \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\right)_{ij}^{-\frac{1}{2}} \tag{58}$$

O potencial $\rho\psi^{ed}$ (equação (35) para o caso isotrópico) representado pelo tensor $\boldsymbol{D}$ é (Lemaitre e Desmorat, 2005):

$$\rho\psi^{ed} = \frac{1+\nu}{2E}H_{ij}s_{jk}H_{kl}s_{li} + \frac{3\left(1-2\nu\right)}{2E}\frac{p^2}{1-d_H} \tag{59}$$

Com relação às parcelas deviatórica e volumétrica, o tensor de tensões efetivo pode ser escrito como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{s}} + \bar{p}\boldsymbol{I} \tag{60}$$

na qual $\bar{\boldsymbol{s}}$ e $\bar{p}$ são, respectivamente, a tensão efetiva deviatórica e volumétrica, definidas como:

$$\bar{\boldsymbol{s}} \equiv dev\left[\boldsymbol{HsH}\right] \tag{61}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{1-d_H} \tag{62}$$

O tensor taxa de densidade de energia liberada pelo dano $\left(-\boldsymbol{Y}\right)$ é dado por $-Y_{ij} = \rho \dfrac{\partial \psi}{\partial D_{ij}}$, mas é substituído na lei de evolução do dano pelo escalar $\left(-\overline{Y}\right)$ chamado de densidade de energia elástica efetiva, que pode ser escrito como uma função da tensão efetiva:

$$-\overline{Y} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{e} \varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2} \overline{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^{e} = \frac{\overline{\varsigma}^{2} \overline{R}_{v}}{2E} \tag{63}$$

onde C_{ijkl} são as componentes do tensor de elasticidade $\boldsymbol{C}$, E é o módulo elástico e $\overline{R}_{v}$ é a função de triaxialidade efetiva:

$$\overline{R}_{v} = \frac{2}{3}\left(1+\nu\right) + 3\left(1-2\nu\right)\left(\frac{\overline{p}}{\overline{\varsigma}}\right)^{2} \tag{64}$$

com

$$\overline{\varsigma} = \left(\boldsymbol{HsH}\right)_{eq} = \left[\frac{3}{2} dev\left(\boldsymbol{HsH}\right) : dev\left(\boldsymbol{HsH}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{65}$$

onde $\left(\cdot\right)_{eq} = \sqrt{\dfrac{3}{2} dev\left(\cdot\right) : dev\left(\cdot\right)}$.

Segundo (Lemaitre et al. 2000), a lei de evolução do dano anisotrópico é uma simples extensão do caso isotrópico, se for considerado o seguinte potencial de dissipação:

$$\varphi = f + \varphi^{d} = f + \left(-\frac{\overline{Y}}{\mathrm{r}}\right)\left(-Y_{ij}\right)\left|\frac{d\varepsilon^{p}}{d\alpha}\right|_{ij} \tag{66}$$

onde $\left|\cdot\right|$ aplicado a um tensor significa o valor absoluto em termos das componentes principais, α é a variável interna associada ao encruamento isotrópico, f é a função de escoamento de von Mises dada por:

$$f = \overline{\varsigma} - \left(\sigma_{y} + q\right) \tag{67}$$

A lei de evolução da deformação plástica é:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \boldsymbol{N}^{X} \tag{68}$$

onde são definidas as normais (Lemaitre e Desmorat, 2005):

$$\boldsymbol{N}^{X} = dev\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{n}^{X}\boldsymbol{H}\right) \tag{69}$$

$$\boldsymbol{n}^{X} = \frac{3}{2}\frac{\overline{\boldsymbol{s}}}{\overline{\varsigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\overline{\boldsymbol{s}}}{\left\|\overline{\boldsymbol{s}}\right\|} \tag{70}$$

A evolução da variável de escoamento continua com sua forma usual:

$$\dot{\alpha} = \gamma \tag{71}$$

e a taxa da deformação plástica acumulada é:

$$\dot{\varepsilon}_{ac}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}\right\| = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{N}^{X} : \boldsymbol{N}^{X}}\,\gamma \tag{72}$$

De acordo com o contexto da termodinâmica, a lei de evolução para o tensor dano deriva do potencial de dissipação, onde segue a mesma direção da deformação plástica:

$$\dot{\boldsymbol{D}} = -\gamma\frac{\partial\varphi^{d}}{\partial Y} = \left(\frac{-Y}{\mathrm{r}}\right)^{\mathrm{s}}\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{D}^{p} \tag{73}$$

sendo que $\varepsilon_{ac}^{p} = \alpha$ enquanto não houver dano e $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{p}$ é a taxa da deformação plástica absoluta definida como:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{p} = \sum_{i=1}^{3}\left|\dot{\varepsilon}_{i}^{p}\right| e_{i}^{p} \otimes e_{i}^{p} \tag{74}$$

onde $\dot{\varepsilon}_{i}^{p}$ são os autovalores do tensor taxa de deformação plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$ e $\left\{e_{i}^{p}\right\}$ é a base ortonormal de autovetores da $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$.
A evolução do dano inicia somente após ser atingido um limiar escrito em termos da deformação plástica acumulada, ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{D}} = 0, \text{ se } \varepsilon_{ac}^{p} < \varepsilon_{D} \tag{75}$$

De acordo com a definição física de dano, a condição de iniciação de uma meso-trinca é alcançada quando a intensidade do dano em certo plano atinge o valor crítico D_c e isto ocorre quando o maior valor principal de dano D_I atinge D_c (Lemaitre e Desmorat, 2001):

$$\max D_I = D_c \rightarrow \text{ início da meso-trinca} \tag{76}$$

Para o caso de dano anisotrópico, um valor aproximado para o dano crítico é D_c = 0,5.

3.4 Algoritmo de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade acoplada ao dano

Abaixo, apresenta-se o modelo constitutivo, na sua fórmula incremental implícita que conduz ao algoritmo de retorno, para o caso de elastoplasticidade tridimensional com encruamento isotrópico, acoplado ao dano isotrópico e ortotrópico, proposto em (Lemaitre e Desmorat, 2005). O algoritmo numérico é baseado em uma etapa de previsão, que corresponde ao estado elástico (teste) e uma etapa de correção correspondente a um estado de plastificação/dano.

1) Calcula estado teste (preditor elástico):

Dado $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ e as variáveis de estado em t_n, calcular o estado elástico teste

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n}^{e} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_{n}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ac\ (n+1)}^{teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ac\ (n)}$$

$$\boldsymbol{D}_{n+1}^{teste} = \boldsymbol{D}_n$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{teste} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste}$$

2) Testa consistência plástica:

Se $f_{n+1}^{teste} :== \bar{\varsigma}_{n+1}^{teste} - \left(\sigma_y + H'\alpha_{n+1}^{teste}\right) \leq 0$, então passo elástico.

Logo, o conjunto $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$ e $\boldsymbol{C}_{n+1}^{ep} = \boldsymbol{C}$,

finaliza.

Senão, passo plástico, vá para (3).

3) Mapeamento de retorno (estado de correção):

Seja o residual local definido por $\{R_{loc}\} = \left\{R_{\boldsymbol{\varepsilon}^e}, R_{\Delta\gamma}, R_{\boldsymbol{D}}\right\}^T$, resolve o sistema abaixo para as variáveis independentes $W = \left\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta\gamma, \boldsymbol{D}\right\}$:

$$\left\{\begin{array}{c} R_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e - \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\gamma_{n+1}^{(i)} N_{n+1}^X \\ R_{\Delta\gamma} = f_{n+1} :== \bar{\varsigma}_{n+1}^{(i)} - \left(\sigma_y + H'\left(\alpha_n + \Delta\gamma_{n+1}^{(i)}\right)\right) \\ R_{\boldsymbol{D}} = \left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{D}_{n+1}^{(i)} - \boldsymbol{D}_n - \left(\dfrac{-Y}{\mathrm{r}}\right)^s \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}^{(i)}}{1 - \boldsymbol{D}_{n+1}^{(i)}} & \text{(isotrópico)} \\ \boldsymbol{D}_{n+1}^{(i)} - \boldsymbol{D}_n - \left(\dfrac{-\bar{Y}}{\mathrm{r}}\right)^s \tilde{\varepsilon}^p & \text{(ortotrópico)} \end{array}\right. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

onde $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$.

Para solucionar o sistema acima, pode-se usar novamente o esquema iterativo de Newton-Raphson. Logo, resolve-se o problema iterativo local:

$$\left\{R_{loc\ (n+1)}^i\right\} + \left[\frac{\partial\{R_{loc}\}}{\partial\Delta W}\right]_{n+1}^{(i)} \left(W_{n+1}^{(i+1)} - W_{n+1}^{(i)}\right) = 0$$

com $\Delta W = \left\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e, \Delta\Delta\gamma, \Delta\boldsymbol{D}\right\}$, onde a expressão para a matriz jacobiana $[\boldsymbol{Jac}] = \left[\dfrac{\partial\{R_{loc}\}}{\partial\Delta W}\right]_{n+1}^{(i)}$ (ou alguma boa aproximação dela) se faz necessária por razões de convergência. Neste trabalho utilizou-se o método de diferenças finitas para calcular a matriz jacobiana.

4) Atualização:

Uma vez que as variáveis $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, $\Delta\gamma_{n+1}$ e $\boldsymbol{D}_{n+1}$ tenham sido determinadas na resolução do sistema do passo (3), as variáveis remanescentes são atualizadas explicitamente:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_{n+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^e_{n+1}$$

$$\varepsilon^p_{ac\ (n+1)} = \varepsilon^p_{ac\ (n)} + \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}}\Delta\gamma_{n+1}\text{, para dano ortotrópico}$$

$$\varepsilon^p_{ac\ (n+1)} = \varepsilon^p_{ac\ (n)} + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{1-D_{n+1}}\text{, para dano isotrópico}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{M}^{-1}_{n+1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}\text{, para dano ortotrópico}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left(1-D_{n+1}\right)\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}\text{, para dano isotrópico}$$

$$\bar{\varsigma}_{n+1} = \left[\frac{3}{2}dev\left(\boldsymbol{H}_{n+1}\boldsymbol{s}_{n+1}\boldsymbol{H}_{n+1}\right):dev\left(\boldsymbol{H}_{n+1}\boldsymbol{s}_{n+1}\boldsymbol{H}_{n+1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\text{, para dano ortotrópico}$$

$$\bar{\varsigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}_{n+1}}{\left(1-D_{n+1}\right)}:\frac{\boldsymbol{s}_{n+1}}{\left(1-D_{n+1}\right)}}\text{, para dano isotrópico}$$

5) Calcula o operador tangente elastoplástico:

Seja a primeira coluna da inversa da matriz jacobiana $\left[\boldsymbol{Jac}\right]$, na convergência, dada por:

$$\begin{bmatrix} \left[\boldsymbol{Jac}\right]^{-1}_{\Delta\gamma,\boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ \left[\boldsymbol{Jac}\right]^{-1}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e,\boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ \left[\boldsymbol{Jac}\right]^{-1}_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\varepsilon}^e} \end{bmatrix}$$

a expressão para o operador tangente elastoplástico consistente com o algoritmo de integração implícito desenvolvido acima é (Lemaitre e Desmorat, 2005):

$$\boldsymbol{C}^{ep} = \boldsymbol{M}^{-1}:\boldsymbol{C}:\left[\boldsymbol{Jac}\right]^{-1}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e,\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial \boldsymbol{M}^{-1}}{\partial \boldsymbol{D}}:\left[\boldsymbol{Jac}\right]^{-1}_{\boldsymbol{D},\boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo será feita uma análise dos resultados encontrados na implementação numérica de um problema onde é feito o acoplamento de plasticidade com os danos isotrópico e ortotrópico, através da aplicação do modelo detalhado no algoritmo da Seção 3.4.

Toda a implementação computacional foi realizada via código próprio implementado em MATLAB® 7.6.0, sendo que a visualização dos resultados da análise foi realizada através do software GID® 9.0.2, que é um sistema de pré e pós-processamento de resultados de Elementos Finitos.

Foram utilizados elementos sólidos isoparamétricos (hexaedros) de vinte nós e funções de forma quadráticas.

Este problema consiste na análise tridimensional de uma chapa de espessura unitária com dois recortes cilíndricos (Figura 1), sujeita a um deslocamento controlado na direção do eixo y, ao longo de 100 passos. O modelo constitutivo do material da chapa é o elastoplástico, com critério de plastificação de von Mises, encruamento isotrópico linear e dano isotrópico e ortotrópico, conforme apresentado na seção 3.4. Os dados do problema são:

E = 210 GPa (módulo de elasticidade);
ν = 0,3 (coeficiente de Poisson);
H' = 10,5 GPa (módulo de encruamento plástico isotrópico);
σ_y = 620 MPa (tensão limite de escoamento);
D_c = 0,40 (dano crítico);
ε_D = 0,0 (limiar de dano);
η = 1,0 (parâmetro do material referente ao dano – caso isotrópico);
η = 3,0 (caso ortotrópico);
r = 3,5 (parâmetro do material referente ao dano);
s = 1,0 (parâmetro do material referente ao dano);
d = 1,0 mm (deslocamento prescrito).

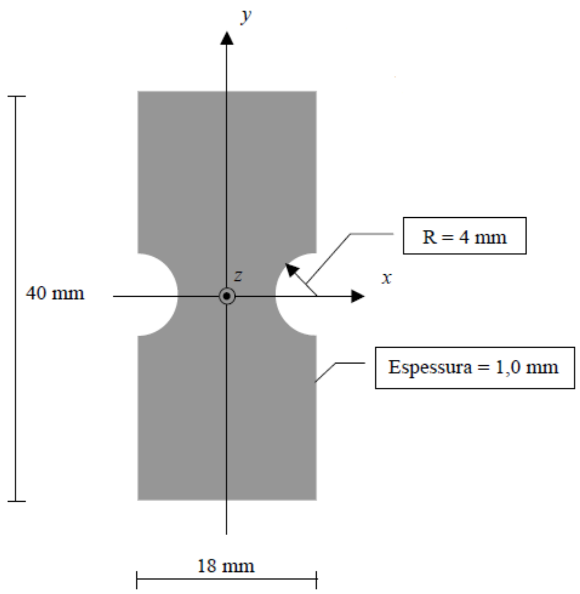

Figura 1: Dimensões da chapa

A análise estrutural é realizada apenas sobre um oitavo da estrutura. A Figura 2 mostra a estrutura efetivamente analisada, indicando a face em que é aplicado o deslocamento controlado na direção do eixo y e seus respectivos valores. Nas superfícies x = 0, y = 0 e z = 0, são impostas condições de contorno de simetria.

Utilizou-se uma malha constituída de 67 elementos hexaédricos, como mostra a Figura 3, sendo que na espessura há apenas uma camada de elementos.

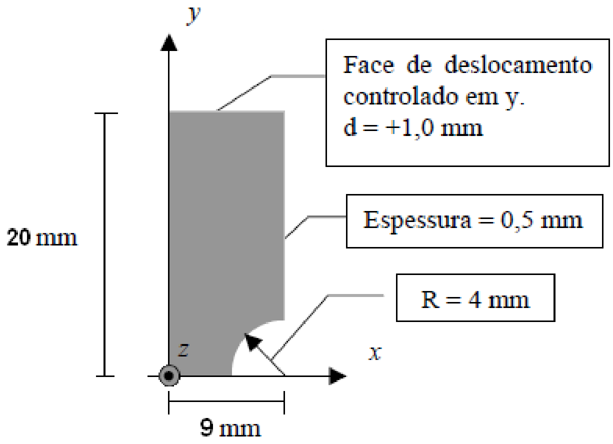

Figura 2: Estrutura efetivamente analisada, utilizando-se vínculos de simetria

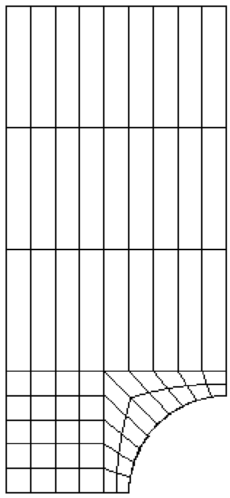

Figura 3: Malha utilizada na análise

4.1 Análise de resultados

Em seguida, apresentam-se curvas que mostram a influência dos parâmetros η, r e ε_D na evolução do dano ortotrópico, com relação ao deslocamento em *y*. A Figura 4 apresenta a influência de η com relação ao valor de dano principal 1 (seu valor máximo). Percebe-se que com o aumento de η, o dano crítico é atingido com mais rapidez e assim o deslocamento é menor. Observa-se que a variável η apresenta influência moderada com relação ao deslocamento final.

A Figura 5 apresenta a influência de r com relação ao valor de dano principal 1 (seu valor máximo). Percebe-se que com o aumento de r, o dano crítico demora mais para ser atingido e assim o deslocamento é maior. Observa-se que a variável r tem grande influência com relação ao deslocamento final.

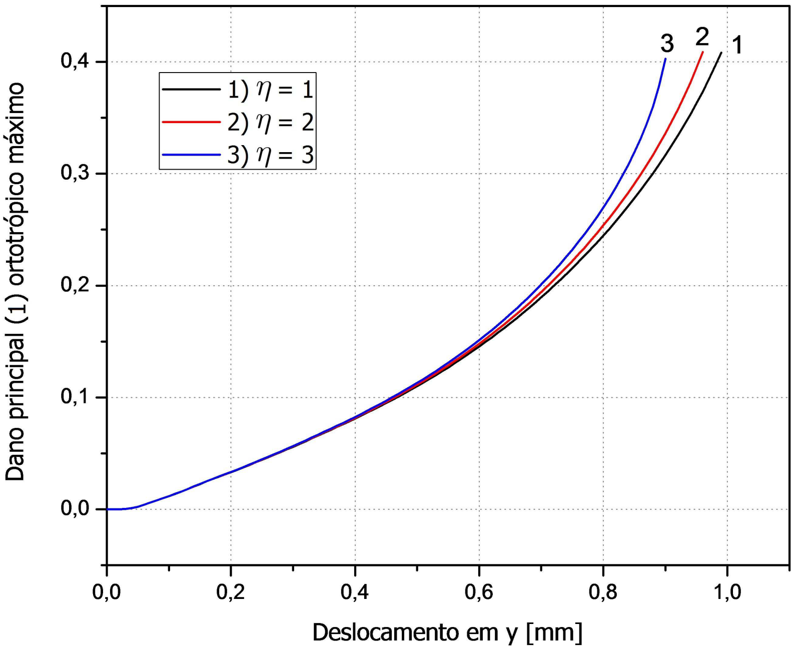

Figura 4: Curva dano - deslocamento em *y* [mm] com variação de η

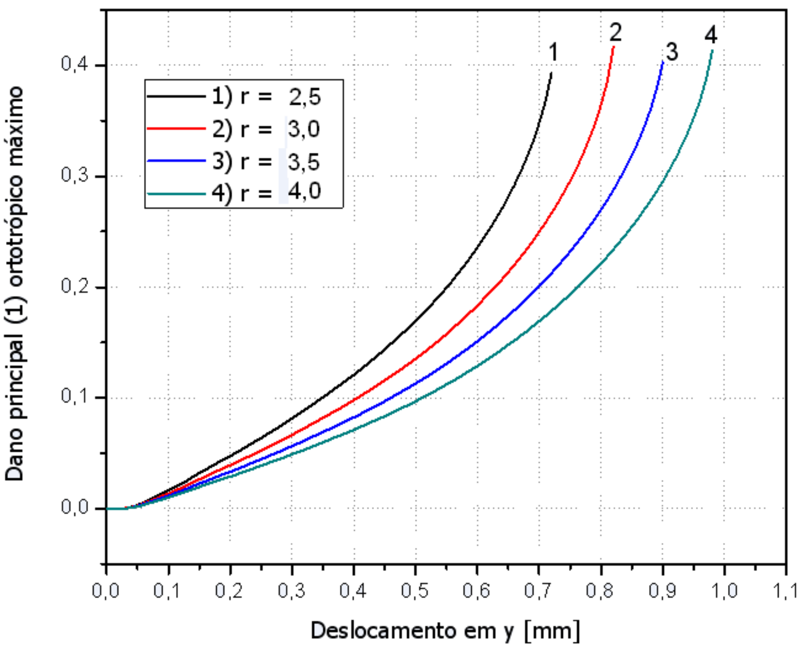

Figura 5: Curva dano - deslocamento em y [mm] com variação de r

A Figura 6 apresenta a influência do limiar de dano ε_D com relação ao valor de dano principal 1 (seu valor máximo). Observa-se que, assim como no caso da variação de r, com o aumento de ε_D, o dano crítico demora mais para ser atingido e assim o deslocamento é maior. Além disso, para ε_D = 0,10 o dano não atinge seu valor crítico.

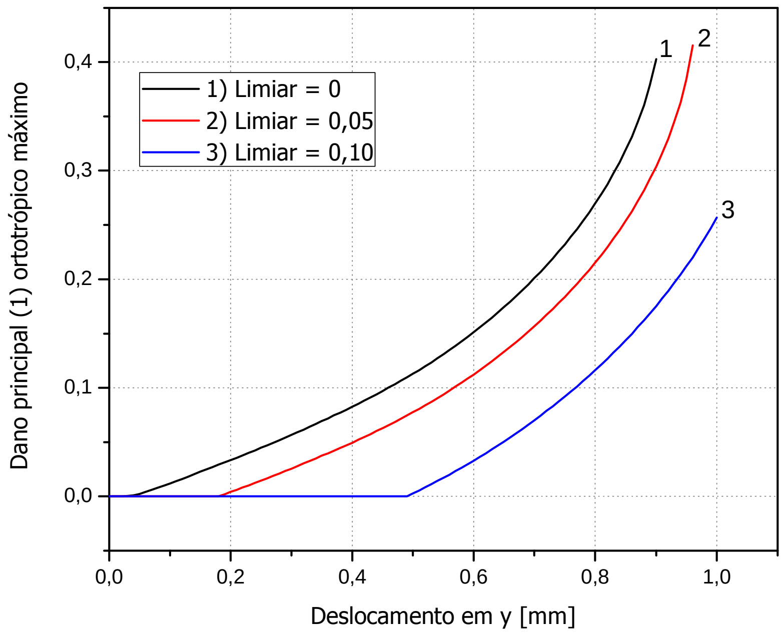

Figura 6: Curva dano - deslocamento em *y* [mm] com variação de ε_D

4.2 Comparação de resultados

Nesta seção, alguns resultados obtidos da simulação com o dano ortotrópico serão comparados com respostas obtidas do caso isotrópico.

A Figura 7 apresenta a curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada (seus valores máximos no fundo do entalhe), para os modelos de dano isotrópico e ortotrópico, até que o dano atinja seu valor crítico, com deslocamento de 0,93 mm e 0,90 mm, respectivamente. Pode-se perceber que para o caso isotrópico a tensão atinge seu valor máximo quando o valor da deformação plástica acumulada é igual a 0,2. Para o caso ortotrópico, a deformação plástica acumulada não atinge 0,2. Após certo ponto, a tensão equivalente efetiva torna-se maior do que a verdadeira, como se esperava.

A Figura 8 mostra a curva dano - deformação plástica acumulada (seus valores máximos), para dano isotrópico e ortotrópico, até o dano atingir seu valor crítico. No caso ortotrópico são aprensentados os valores principais de dano, correspondentes às direções de ortotropia. Assim como acontece com a tensão equivalente, pode-se perceber que no caso ortotrópico o dano atinge seu valor máximo com deformação plástica inferior à do caso isotrópico.

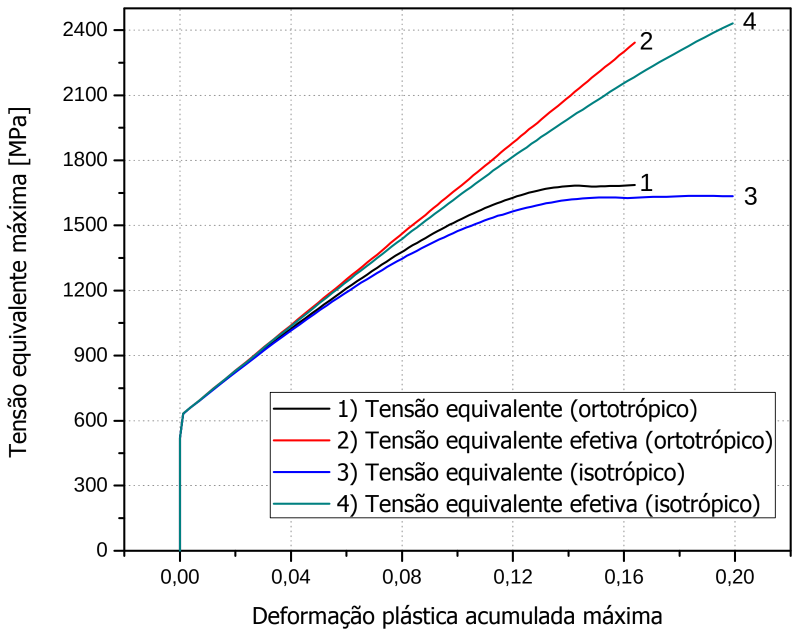

Figura 7: Curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada até o valor crítico de dano

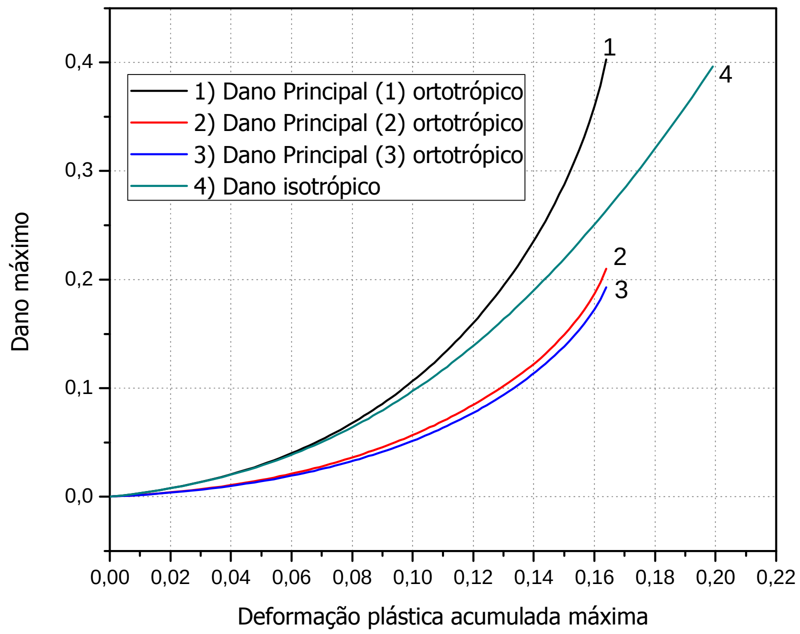

Figura 8: Curva dano - deformação plástica acumulada até o valor crítico de dano

A Figura 9 apresenta a curva dano - deslocamento em y para dano isotrópico e ortotrópico (seus valores máximos) até que o dano atinja seu valor crítico. Para o dano ortotrópico é apresentado o valor de dano principal 1. Pode-se perceber que no caso ortotrópico o dano crítico ocorre num valor de deslocamento menor do que para o caso isotrópico e de acordo com a Figura 10, o dano fica mais concentrado próximo ao entalhe no caso ortotrópico.

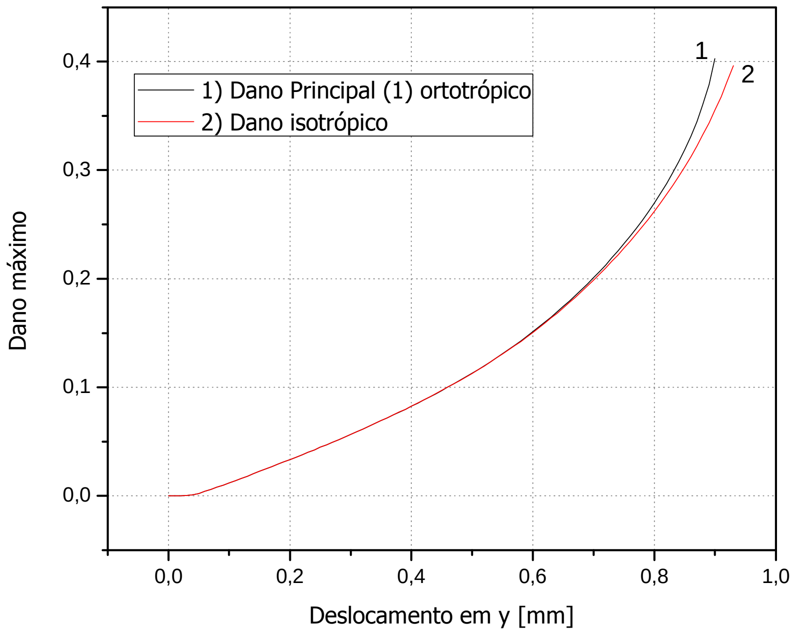

Figura 9: Curva dano - deslocamento em *y* [mm]

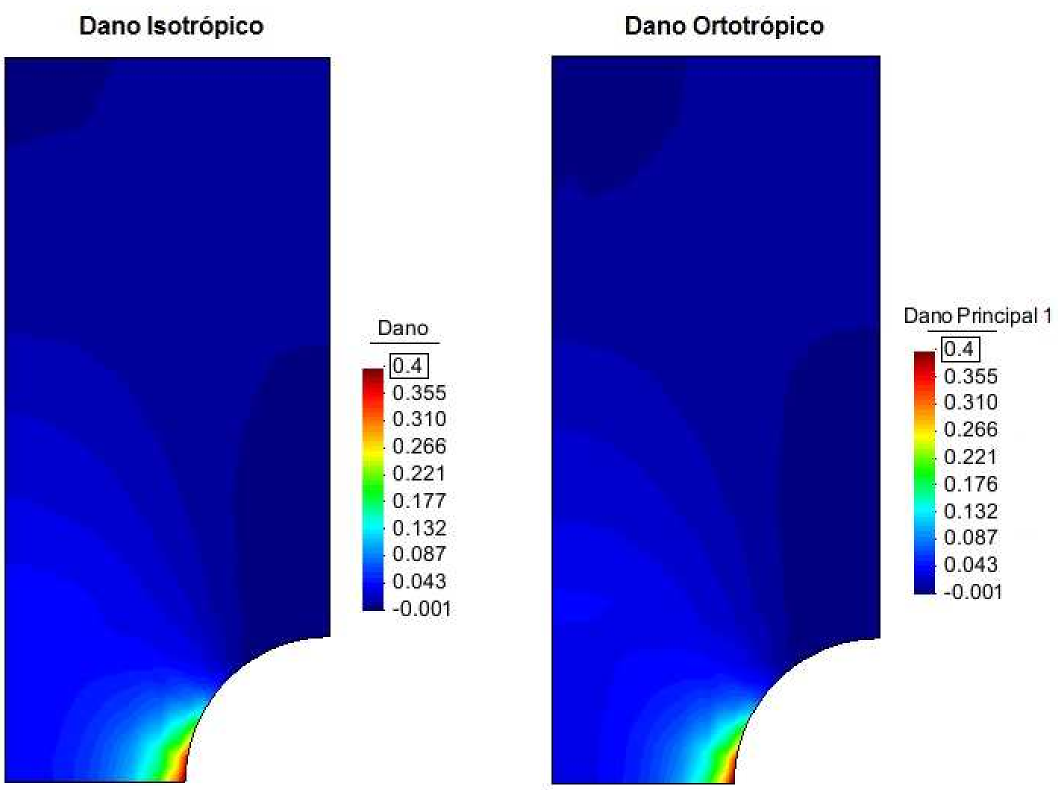

Figura 10: Concentração do dano próximo ao entalhe no passo de deslocamento referente ao dano crítico

5 CONCLUSÕES

O objetivo desse trabalho foi, através da simulação numérica, verificar a evolução do dano ortotrópico em metais acoplando-se as teorias de plasticidade e dano.

A implementação computacional realizada, adaptada a análises tridimensionais, foi baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF) e num modelo de dano constitutivo de Lemaitre que é próprio para materiais metálicos. Este modelo serve tanto para análise de dano isotrópico como para dano ortotrópico, além da análise sem danificação (apenas plastificação).

Neste estudo considerou-se um comportamento isotrópico do material, com encruamento isotrópico linear, critério de encruamento de von Mises e o modelo de dano de Lemaitre para dano isotrópico e ortotrópico.

Foram realizadas simulações que mostraram a influência de alguns parâmetros de dano na evolução do dano ortotrópico. Para isso, compararam-se os deslocamentos na direção axial da peça, ao ser atingido o dano crítico ou o deslocamento imposto. Com relação ao parâmetro η, observou-se que com o seu aumento, o deslocamento final diminui de forma moderada. Com relação ao parâmetro r, percebe-se que com o seu aumento, o deslocamento final aumenta de forma bastante significativa. E com relação ao limiar de dano ε_D, observa-se que, assim como no caso da variação de r, o deslocamento final aumentou com o aumento ε_D.

Alguns resultados obtidos com a simulação de dano ortotrópico foram comparados com os resultados da simulação de dano isotrópico. Observou-se que o dano crítico ocorre para valores de tensão equivalente de von Mises bem próximos nos casos isotrópico e ortotrópico, mas ocorrem com deformação plástica acumulada e deslocamento final inferiores no caso ortotrópico. Como esperado, verificou-se que o dano concentra-se na parte da peça onde há maior concentração de tensão. O dano ortotrópico em seu valor principal 1 estende-se numa região mais restrita que a região ocupada pelo mesmo valor de dano o isotrópico.

No caso deste trabalho, onde foi utilizado carregamento monotônico e radial, não se observa uma grande diferença entre os valores de dano isotrópico e ortotrópico na direção principal 1, já que as direções principais de deformação plástica permanecem constantes ao longo do carregamento e do dano. No entanto, em situações onde são aplicados dois ou mais carregamentos seqüenciais com mudanças direcionais, cada carregamento causará o crescimento de micro-trincas em uma direção preferencial, afetando a resposta do material para carregamentos posteriores em direções diferentes. Nestes casos, a hipótese usual de isotropia pode fornecer resultados bem distintos dos obtidos pela análise ortotrópica. Sendo assim, a análise isotrópica de dano pode oferecer uma boa primeira aproximação, mas pode apresentar erros substanciais em aplicações práticas mais complexas.

REFERÊNCIAS

Al-Rub, R. K. A.; Voyiadjis, G. Z., On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials. *Solids and Structures*, v. 40, p. 2611-2643, 2003.

Armero, F.; Ollers, S., A general framework for continuum damage models. I. Infinitesimal plastic damage models in stress space. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, p. 7409-7436, 2000.

Idelsohn, S., and Oñate, E., Finite element and finite volumes. Two good friends. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3323–3341, 1994.

Chaboche, J. L., Continuous damage mechanics - A tool to describe phenomena before crack iniciation. *Nuclear Engineering and Design*, v. 64, p. 233-247, 1981.

Chen, W. F., Han, D.J., *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, 1988.

Desmorat, R., Cantournet, S. Modeling microdefects closure effect with isotropic/anisotropic damage. *Damage Mechanics*, v. 00, 2007.

Doghri, I., Numerical implementation and analysis of a class on metal plasticity models coupled with ductile damage. *International Journal for Numerical Methods in Enginnering*, v. 38, p. 3403-3431, 1995.

Kattan, P.I., Voyiadjis, G.Z., *Damage mechanics with finite elements: practical applications with computer tools*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2002.

Ladevèze, P. *On an anisotropic damage theory*. In: Boehler J.P. (Ed.), Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media, p.355-363, 1983.

Lemaitre, J., Coupled elasto-plasticity and damage constitutives equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Enginnering*, v. 51, p. 31-49, 1985.

Lemaitre, J., *A course on damage mechanics*, 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1996.

Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay, M., *Anisotropic damage law of evolution*. European J. Mechanics A/Solids, v. 19, p. 187-208, 2000.

Lemaitre, J., Desmorat, R., *Isotropic and anisotropic damage law of evolution*. Handbook of materials behavior models, v. 2, p. 513-524, 2001. Academic Press, San Diego, 2001.

Lemaitre, J.; Desmorat, R., Engineering *damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2005.

Simo, J. C., Hughes T. J. R., *Computacional Inelásticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.

Simo, J. C., Taylor, R. L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Enginnering*, v. 48, p. 101-118, 1985.

Souza Neto, E. A., Peric, D., and Owen, D. R., *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, 1. ed. John Wiley & Sons, 2008.

Meyer, E.S., Morrison, A.J., and Plummer, C.S., The finite element method: A good friend. *Journal of Numerical Methods*, 32:2223–2241, 1995a.

Meyer, E.S., Morrison, A.J., and Plummer C.S., Finite differences and finite volumes. Two old friends. *Journal of Numerical Methods*, 32:1223–1241, 1995b.

Torres, I. F. R., *Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

Omerspahic, E., Mattiasson, K., Oriented damage in ductile sheets: Constitutive modeling and numerical integration. *International Journal of Damage Mechanics*, v. 16, p. 35-56, 2007.

Voyiadjis, G.Z., Kattan, P.I., *Advances in damage mechanics: metals and metal matrix composites*. 1999.

Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The finite element method*, volume II. McGraw Hill, 1991.