

UM MODELO ELASTO-PLÁSTICO PARA A ADERÊNCIA DA INTERFACE ENTRE CONCRETO E REFORÇO DE AÇO

Daiane de Senna Brisotto^a, Eduardo Bittencourt^b, Virgínia M. Rosito d'Avila^c

^a*Centro de Mecânica Aplicada e Computacional, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, Porto Alegre, RS, Brasil, daiabrisotto@yahoo.com.br*

^b*Centro de Mecânica Aplicada e Computacional, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, Porto Alegre, RS, Brasil, eduardo.bittencourt@ufrgs.br*

^c*Centro de Mecânica Aplicada e Computacional, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, Porto Alegre, RS, Brasil, vichy@ufrgs.br*

Keywords: Fracture Mechanics, cohesive models, Plasticity, reinforced concrete.

Abstract. Stress transfer between concrete and steel bars of the reinforcement is a complex phenomena dependent on many variables. Uncountable studies on the subject have been presented by decades, but few are capable of simulating the complex iterations that occur at the interface. To simplify analyses, many models define a priori the sliding versus bonding stress relation of the interface, which depend on several factor, as the concrete confinement. In the model proposed in this work, an elasto-plastic model is used. Yielding/rupture surfaces are defined in the Mohr's space in order to take into account different fracture modes found at the interface: pull-out, splitting and steel yielding. Softening that follows the damage process is considered. In this case the sliding versus bonding stress relation is obtained automatically as a result of the analyses, capturing, for instance, the effect of concrete confinement. The change from splitting failure to pull-out failure can be also automatically captured by the model. Comparisons of experimental results with simulations made in a finite-element context for a simple pull-out test confirm the adequacy of the model.

1 INTRODUÇÃO

Testes de arrancamento são frequentemente usados para a avaliação da aderência entre barras de armadura e o concreto em peças de concreto armado. Pode-se considerar que, neste caso, dois diferentes mecanismos de falha se desenvolvem: O primeiro é denominado fendilhamento (*splitting* em inglês) e tem sua origem na dilatação que se desenvolve no entorno da barra de aço, quando a mesma tende a ser arrancada. Esta dilatação forma um cone centrado na barra que traciona o concreto circunferencialmente no entorno do cone (Tepffers, 1973, Fusco, 1995). Se o concreto não está devidamente confinado, fissuras longitudinais à barra desenvolver-se-ão levando a perda brusca da aderência, devido ao colapso do cobrimento. O escoamento do aço, quando ocorre, também pode ser classificado como uma ruptura deste tipo. O segundo tipo de fissura é denominado de arrancamento (*pull-out* em inglês) e ocorre quando o concreto está bem confinado, seja por um maior cobrimento ou devido à armaduras transversais. Neste caso o concreto entre nervuras é esmagado surgindo trincas de corte entre as nervuras, fazendo com que a barra seja simplesmente arrancada, sem que ocorra maior dano ao concreto que envolve a barra (Tassios, 1979). O fendilhamento pode ser considerado uma fratura frágil, pois ocorre de forma abrupta e para baixos níveis de carregamento, enquanto o arrancamento é considerado uma fratura dútil pois ocorre para níveis mais elevados de carga e apresenta certa tenacidade após ultrapassado o pico de carga (ver Figura 1).

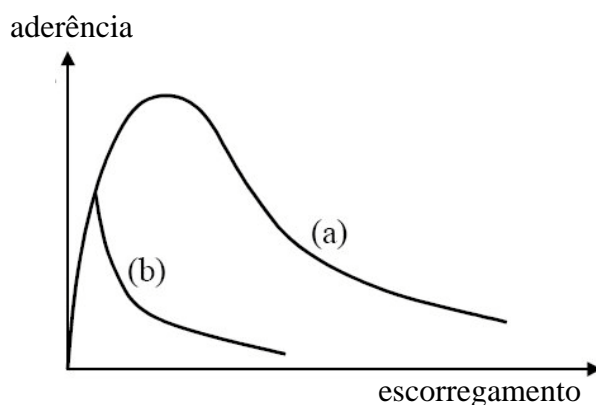


Figura 1: Relação aderência versus escorregamento para (a) falha por arrancamento e (b) falha por fendilhamento.

Ao longo dos anos, têm sido formuladas relações constitutivas para a interface concreto/armadura capazes de levar em conta tais mecanismos de fissuração. Neste caso estipula-se a priori a relação entre tensão de aderência e escorregamento da interface, dependendo, entre outros fatores, das condições de confinamento do concreto (Nilson, 1968, Tassios, 1979, Somayaji e Shah, 1981, Eligehausen et al., 1983, Yankelevsky, 1985, etc). Pode-se considerar tais modelos como mesoscópicos pois, através de uma interface, caracterizam o comportamento de uma camada de espessura finita no entorno da barra.

Mais recentemente estes modelos se sofisticaram e passaram a considerar também o efeito das tensões normais na aderência. Trabalhos desenvolvidos por Akesson (1993), Cox (1994), Cox e Hermann (1998) e por Lundgren (1999, 2000, 2002) são considerados pioneiros nesta abordagem. Neste caso são propostas relações constitutivas de interface no qual define-se superfícies de ruptura capazes de identificar os processo de colapso relatados (fendilhamento e arrancamento) com base somente no estado de tensões na interface. As relações tensão de aderência versus escorregamento são automaticamente obtidas, sem a necessidade de serem

definidas apriori. Esta abordagem será seguida no presente trabalho. Na seção 2 será descrita a metodologia adotada; na seção 3 serão realizadas experimentações numéricas de diferentes processos de arrancamento. O trabalho é finalizado com considerações finais.

2 METODOLOGIA

Na interface concreto-armadura se desenvolvem vetores tensões (ou *tractions* do inglês) na direção normal e longitudinal à barra, que serão aqui respectivamente denominadas tensões normais ou de separação (t_n) e tensões tangenciais ou de aderência (t_t). Os deslocamentos normais (dilatação) serão denominados u_n e os tangenciais (escorregamento) u_t . Vetorialmente estas grandezas serão representadas em negrito como \mathbf{t} e \mathbf{u} . No cálculo destas tensões serão aqui consideradas duas relações constitutivas: elástica e elasto-plástica.

2.1 Relação constitutiva elástica

Para baixos níveis de carregamento, as relações constitutivas de interface podem ser consideradas elásticas. Esta relação é definida, segundo Lundgren (1999), como:

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & \frac{|u_t|}{u_t} D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} \quad (1)$$

Cox e Herrmann (1998) também fornecem uma expressão similar, porém admitindo que a mesma é simétrica.

Tensões normais t_n são causadas por duas parcelas, uma relacionada ao deslocamento u_n (rigidez D_{11}) e outra causada pelo escorregamento u_t (rigidez D_{12}). Teoricamente, se u_n é positivo, há separação na zona de interface e D_{11} deve ser nulo. No caso se u_n negativo, há interpenetração na zona de interface e D_{11} deve ser um valor infinitamente elevado. Neste caso D_{11} seria unicamente um fator de penalização. Para evitar instabilidades numéricas devido à mudança brusca no seu valor, uma transição (ou regularização) puramente numérica é empregada. Na Figura 2 é mostrada a relação usada neste trabalho, onde E_c é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

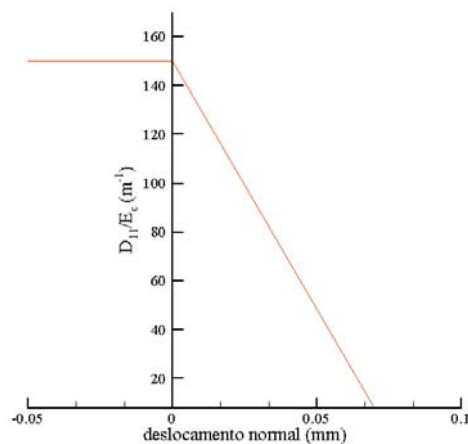


Figura 2: Relação deslocamento normal com a rigidez D_{11} .

A rigidez D_{12} fornece o quanto de tensão normal será produzida por um dado escorregamento. Este valor é normalmente negativo, significando que o escorregamento em

qualquer direção irá causar t_n negativo, ou seja, forças compressivas no concreto. Da eq. 1, podemos dizer que:

$$t_n = D_{11} u_n + D_{12} |u_t| \quad (2)$$

Considerando uma relação de atrito entre as componentes de tensão, no limite, pela lei de Coulomb podemos dizer que $t_n = -t_t/\mu$, logo pode-se definir $D_{12} = -D_{22}/\mu$ onde μ é o coeficiente de atrito. Como esta é uma relação limite, normalmente emprega-se $D_{12} > -D_{22}/\mu$.

Analicamente pode ser demonstrado que a rigidez D_{22} é função linear do módulo de elasticidade longitudinal do concreto. Também apresenta uma dependência linear com a altura das nervuras e espaçamento, sendo que aumenta com a primeira e diminui com a segunda. Conforme Lundgren (1999) D_{22} pode ser medido experimentalmente como a rigidez de descarga da curva aderência-escorregamento. A autora sugere a seguinte expressão como um limite superior:

$$D_{22} = E_c (2A / \pi d l_k l) \quad (3)$$

onde A é a área das nervuras projetada transversalmente, d o diâmetro da barra, l_k a distância (longitudinal) entre os centros das nervuras e l uma média entre l_k e a separação entre nervuras.

O procedimento de cálculo aqui descrito é válido para níveis de baixos de tensão. Quando as tensões atingem o limite de ruptura, correções plásticas (devido aos fenômenos dissipativos de ruptura) são aplicadas.

2.2 Relação constitutiva elasto-plástica

Os limites das tensões são definidos por "superfícies de ruptura" no espaço de Mohr. Akesson (1993) e Cox (1994) definem tais superfícies através de uma única função equanto Lundgren (1999) emprega duas funções F_1 e F_2 . Esta última será a abordagem aqui seguida e tais funções serão definidas abaixo.

Embora o processo de aderência em barras nervuradas seja por engrenamento mecânico, pode-se considerar o problema de forma aproximada como sendo controlado por atrito. A função F_1 descreve as combinações de tensões que definem o início de escorregamento por atrito. Esta função é definida por

$$F_1 = |t_t| + \mu t_n = 0 \quad (3)$$

onde μ é um coeficiente de atrito aparente. Esta superfície está em geral associada à falha por fendilhamento.

Neste caso, assume-se uma analogia com a análise plástica e emprega-se uma regra de fluxo-não associada. Portanto, uma vez atingida a superfície de ruptura, aparecem deslocamentos plásticos ou dissipativos, $d\mathbf{u}^p$, definidos como

$$d\mathbf{u}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{t}} \quad (4)$$

$$G = \frac{|u_t|}{u_t} t_t + \eta t_n = 0 \quad (5)$$

onde G é a função potencial plástico, $d\lambda$ é um multiplicador plástico incremental, a ser determinado. O parâmetro η define a direção dos deslocamentos plásticos. A hipótese usual em problemas de atrito é admitir que η é igual a zero, ou seja não ocorrem processos dissipativos na direção normal. Porém, devido às irregularidades na superfície de

escorregamento, considera-se que deslocamentos plásticos advêm também dos deslocamentos normais (este fenômeno também é conhecido como dilatância). Isto é válido apenas macroscopicamente pois microscopicamente a dissipação do atrito só pode ter origem no escorregamento.

A outra função, F_2 , descreve o limite da falha por arrancamento. Esta função é determinada a partir do equilíbrio das forças resultantes da interação mecânica entre a barra de aço e o concreto, resultando a seguinte expressão:

$$F_2 = t_n^2 + t_r^2 + ct_n = 0 \tag{6}$$

onde a variável c representa a resistência à compressão do concreto. Para a determinação da deformação plástica é empregada uma regra de fluxo associada, assim

$$d\mathbf{u}^p = d\lambda \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{t}} \tag{7}$$

Para a região compreendida entre as duas funções é aplicada a regra de Koiter. Neste caso, a combinação das duas leis é usada, e a deformação plástica é dada por

$$d\mathbf{u}^p = d\lambda_1 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{t}} + d\lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{t}} \tag{8}$$

A Figura 3 mostra as superfícies de ruptura, definida pelas funções F_1 e F_2 , bem como a orientação das deformações plásticas.

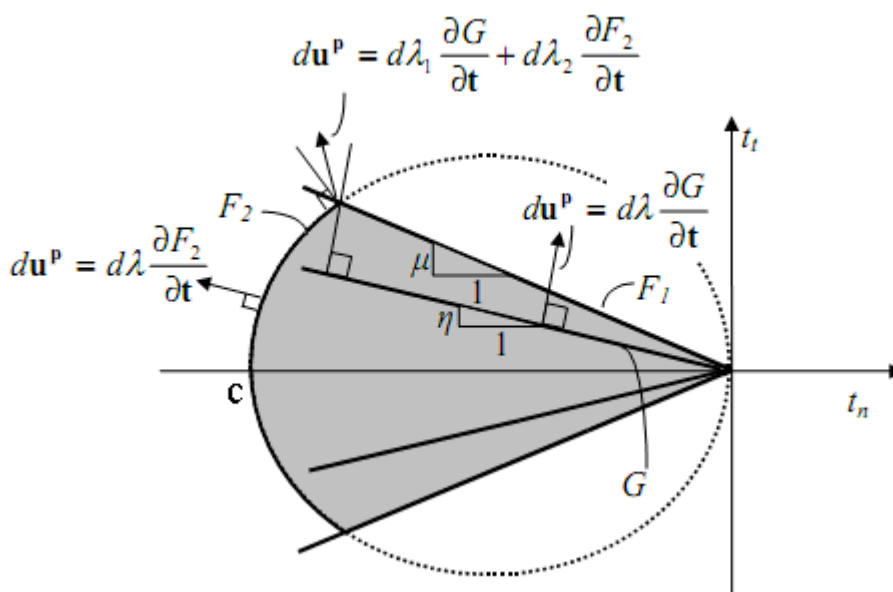


Figura 3 - Superfícies de escoamento e orientação das deformações plásticas (Lundgren, 1999).

Os coeficientes μ e c são definidos conforme Figuras 4 e 5, respectivamente.

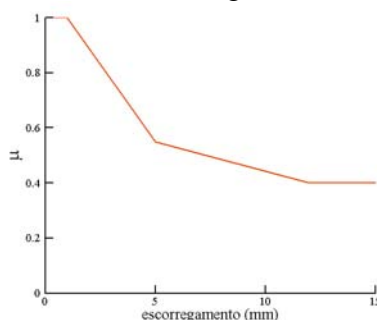


Figura 4: Variação do coeficiente de atrito em função do escorregamento.

A função c representa a variação da tensão no concreto resultante da interação mecânica entre os materiais. Assim, seu valor máximo é igual a resistência à compressão do concreto.

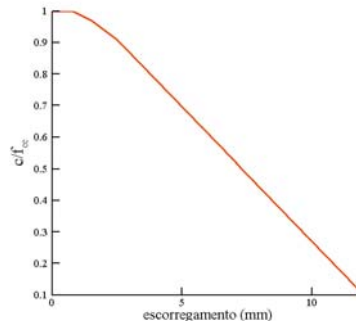


Figura 5: Variação da variável c em função do escorregamento (f_{cc} é a resistência à compressão do concreto).

Como estes parâmetros são decrescentes, a superfície de ruptura vai diminuindo com o processo de deformação. Isto corresponde a um "amolecimento" da relação constitutiva com os processos dissipativos.

Com todos os parâmetros definidos, pode-se determinar os valores de tensão na interface admitindo-se que o incremento de tensões de interface seja definido como:

$$dt = \mathbf{D}(du - du^p) \quad (10)$$

onde \mathbf{D} é a matriz de rigidez elástica, definida na equação 1. Substituindo-se na equação acima as equações 4, 7 ou 8 (dependendo da região) e, uma vez integradas no tempo, o resultado substituído na correspondente equação da superfície (equação 3 ou 6), pode-se obter os valores de $d\lambda$, a partir do qual todas as variáveis do problema podem ser determinadas.

3 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção são mostradas experimentações numéricas com o objetivo de verificar a aplicabilidade dos procedimentos expostos no capítulo anterior, ou seja, comprovar se o modelo é capaz de representar os diferentes tipos de falha devido a aderência.

Nestes testes, a armadura é constituída por aço com diâmetro de 16 mm, tensão de escoamento 580 MPa, tensão de ruptura 880 MPa e é considerada um material elastoplástico com endurecimento isotrópico. O concreto é modelado como sendo elástico linear, portanto toda não-linearidade e efeitos de ruptura estão considerados apenas na região da interface. Nos casos analisados, a barra de aço é envolta em um cilindro de concreto. Devido a geometria cilíndrica, elementos finitos axissimétricos foram empregados nas simulações numéricas. No concreto, os elementos finitos são triângulos constantes enquanto que no aço os elementos são quadriláteros lineares.

Dois casos são estudados: no primeiro, o comprimento de ancoragem da armadura é longo o suficiente para causar o escoamento da mesma. No segundo, o concreto está confinado o suficiente para causar falha por arrancamento. Em todos os casos, $\eta=0.04$ e as características geométricas das barras levam a um valor de $D_{22}E_c=6 \text{ m}^{-1}$. D_{12} foi adotado como $-0,5D_{22}$.

3.1 Caso com longo comprimento de ancoragem

Inicialmente foi analisado o teste de arrancamento realizado por Magnusson (2000), no qual o comprimento da armadura incorporada no concreto é longo o suficiente para provocar

o escoamento da barra de aço. A armadura é localizada no centro da estrutura de concreto que apresenta um raio de 200 mm e altura de 480 mm. O comprimento da armadura incorporada ao concreto é de 360 mm.

A Figura 6 apresenta a malha empregada na análise. A face superior do concreto tem os deslocamentos em x e y restringidos. Devido a simetria, os nós à esquerda no aço têm os deslocamentos em x restringidos. A barra de aço é deslocada para cima, na direção y , conforme indicado na figura. Os pontos A e B indicam os limites da zona de interface concreto-armadura.

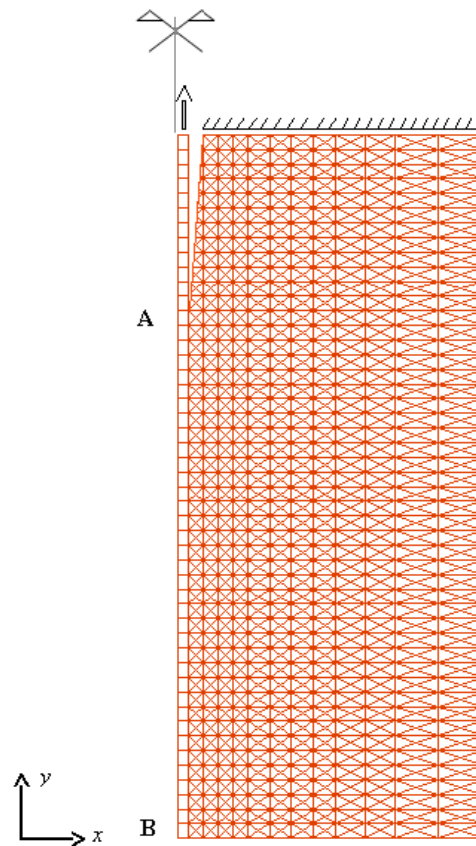


Figura 6: Malha empregada na análise via MEF.

O concreto apresenta uma resistência à compressão (f_{cc}) de 27.6 MPa, resistência à tração (f_{ct}) de 2.2 Mpa e um módulo de elasticidade longitudinal (E_c) de 30.3 GPa. Na Figura 7 estão representadas as curvas carga aplicada x deslocamento obtidas no ponto de aplicação da carga. São apresentadas comparações com valores experimentais e numéricos obtidos por Lundgren (2005), bem como os valores obtidos utilizando a relação tensão de aderência x escorregamento indicada pelo CEB-FIP (1990). Neste último caso, inicialmente é necessário definir os parâmetros a serem empregados na relação, considerando as condições de aderência e se o concreto encontra-se confinado ou não. Para o exemplo em questão, foram adotados os parâmetros referentes ao concreto não-confinado com boas condições de aderência.

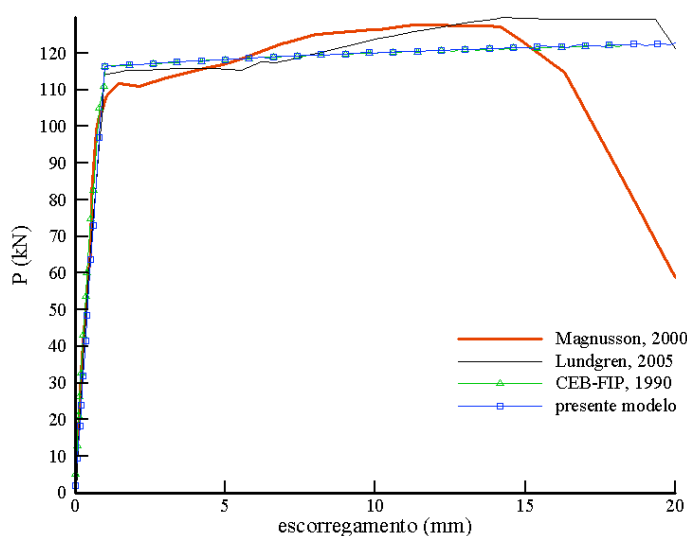


Figura 7: Carga aplicada no aço x deslocamento do mesmo (escorregamento na interface) para várias situações.

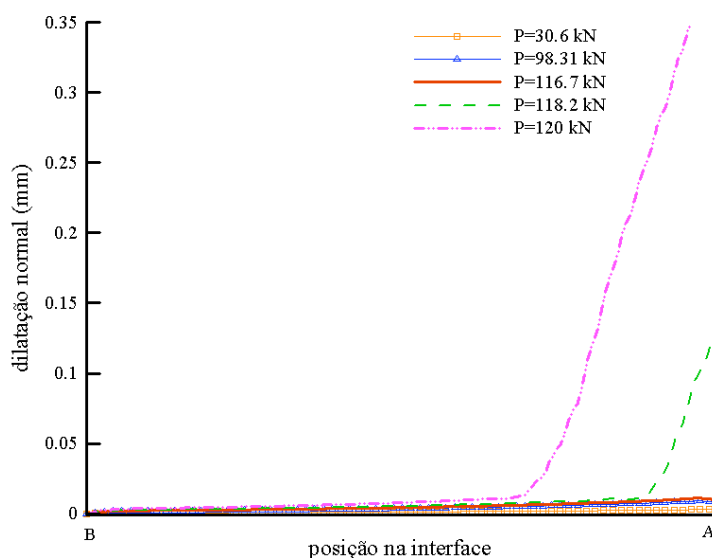


Figura 8: Dilatação da interface ao longo da armadura (posições *A* e *B* são identificadas na Figura 6).

As Figuras 8 e 9 mostram a variação do escorregamento e dilatação, respectivamente, ao longo da interface, para vários estágios do carregamento. Os diagramas foram obtidos para cinco níveis diferentes de carregamento, a fim de obter a variação do comportamento da interface ao longo de todo o processo. Foi considerada uma carga no início do carregamento ($P=30,6$ kN), uma carga um pouco antes do escoamento da armadura ($P=98,3$ kN), a carga de início do escoamento da armadura ($P=116,7$ kN), uma carga logo após o escoamento da armadura ($P=118,2$ kN) e uma carga no fim do processo ($P=120$ kN).

Na Figura 8 pode-se observar que, logo após a carga de pico, ocorre um grande aumento da dilatação junto às primeiras interfaces mais próximas do ponto de aplicação dos deslocamentos. Isto ocorre pois o patamar de escoamento das barras é alcançado provocando uma acelerada diminuição do raio da barra da armadura por efeito poisson. Os correspondentes valores de escorregamento (Figura 9) mostram o mesmo comportamento, ou

seja, os escorregamentos aumentam na mesma proporção que a dilatação aumenta, devido a perda de aderência. Novamente, o processo se acelera após o escoamento da barra.

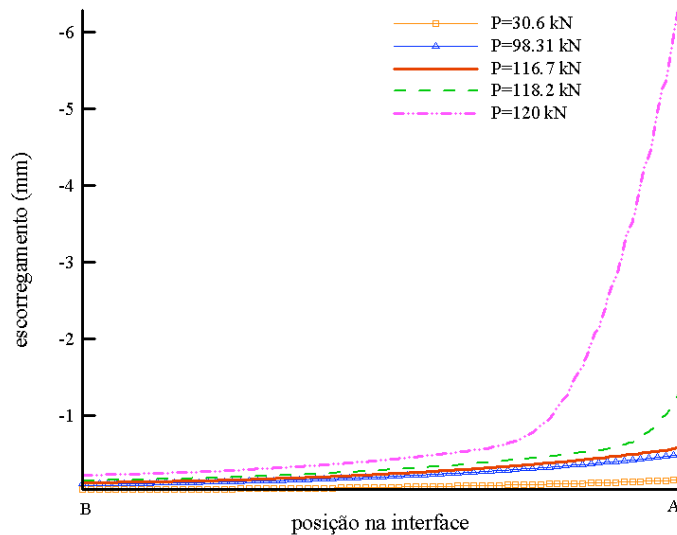


Figura 9: Escorregamento da interface ao longo da armadura (posições *A* e *B* são identificadas na Figura 6).

Analisando o estado de tensões na interface, pode-se concluir que, neste caso, ele se mantém na zona F_I (Figura 2), caracterizando portanto falha por fendilhamento.

3.2 Caso com concreto confinado

Neste caso (Lundgren, 1999), a barra de armadura está localizada dentro de um cilindro de concreto e este, por sua vez, é revestido por um tubo de aço, o que garante o confinamento do concreto. O tubo de aço tem um diâmetro de 70 mm, altura de 100 mm e espessura de 1 mm. O comprimento da armadura incorporado no concreto é de 50 mm.

A Figura 10 mostra a geometria e seção transversal do cilindro de concreto, bem como a malha de elementos finitos empregada na análise. A face superior do concreto tem os deslocamentos em x e y restringidos. Devido a simetria, os nós à esquerda no aço têm os deslocamentos em x restringidos. A barra de aço é deslocada para cima, na direção y , conforme indicado na figura. Os pontos *A* e *B* indicam os limites da zona de interface concreto-armadura.

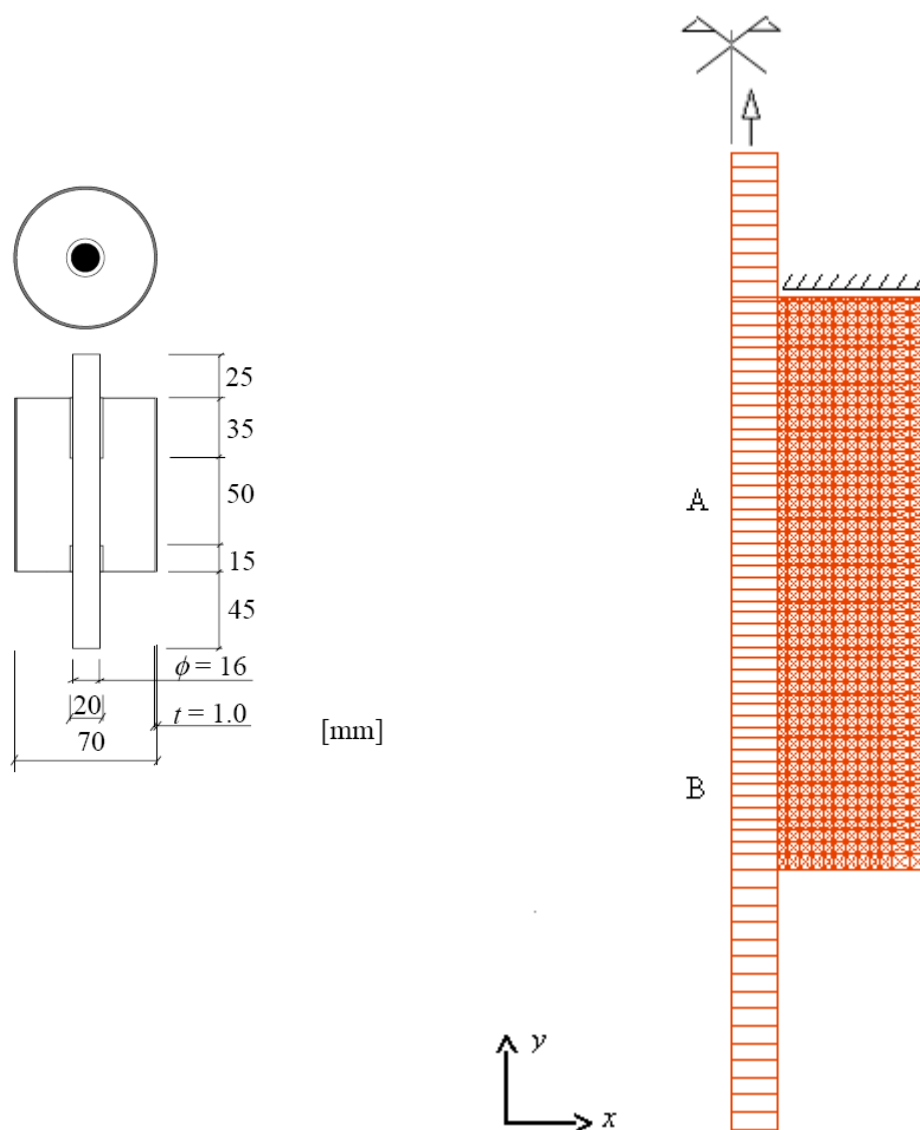


Figura 10: Geometria do corpo de prova e malha adotada para análise numérica.

O concreto apresenta as seguintes propriedades: $f_{cc}=35,6$ MPa, $f_{ct}=2,7$ Mpa e $E_c=30.3$ GPa. A Figura 11 mostra os resultados obtidos através do modelo proposto, bem como comparações com valores experimentais e numéricos obtidos por Lundgren (2005). Também são apresentados os valores obtidos utilizando a relação *tensão de aderência x escorregamento*, indicada pelo CEB-FIP (1990), como dado de entrada para a análise numérica. Neste último caso, foram adotados os parâmetros referentes ao concreto confinado e considerando boas condições de aderência.

Pode-se observar um bom ajuste dos resultados aqui obtidos com resultados experimentais e numéricos (Lundgren, 2005). Já o CEB-FIP subestima a carga de pico e fornece um patamar de aderência pós-pico superestimado, em relação aos experimentos.

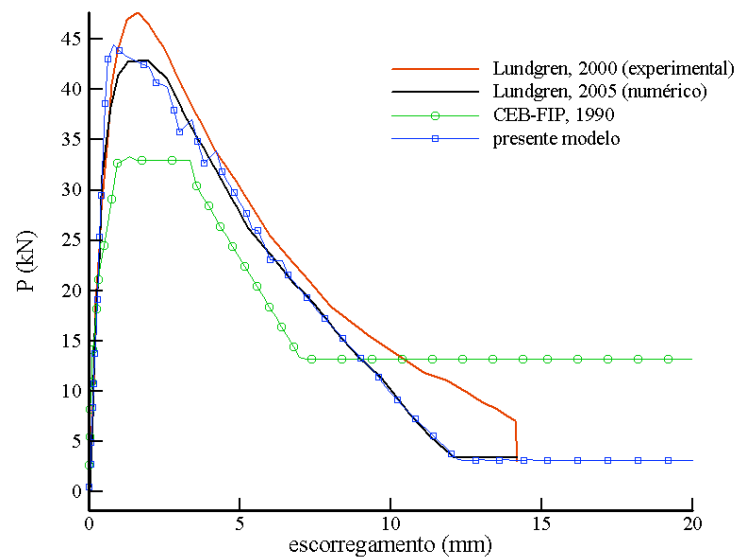


Figura 11: Carga aplicada no aço x deslocamento do mesmo (escorregamento na interface) para várias situações.

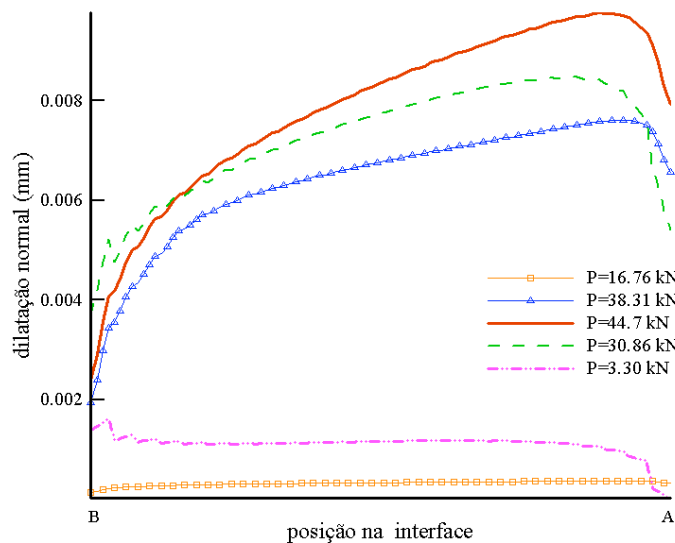


Figura 12: Dilatação da interface ao longo da armadura (posições A e B são identificadas na Figura 10).

A variação da dilatação e escorregamento ao longo da interface, para vários estágios do carregamento, estão graficadas nas Figuras 12 e 13, respectivamente. Os diagramas foram obtidos para cinco níveis diferentes de carregamento, a fim de obter a variação do comportamento da interface ao longo de todo o processo. Foi considerada uma carga no início do carregamento ($P=16.76$ kN), uma carga um pouco antes do pico ($P=38.31$ kN), a carga de pico ($P=44.7$ kN), uma carga logo após o pico ($P=30.86$ kN) e uma carga no fim do processo ($P=3.3$ kN).

Comparando-se a dilatação aqui obtida (Figura 12) com a do caso anterior (Figura 8), observa-se que no presente caso a dilatação da interface é quase duas ordens de grandeza menor. Isto ocorre devido ao grande confinamento neste caso. Além disto, a dilatação aqui

passa por um máximo na carga de pico e posteriormente diminui. Já no caso anterior, o processo de dilatação é sempre crescente. Considerando-se o escorregamento, o mesmo vai sempre aumentando ao longo do processo, como pode-se observar na Figura 13. Outra característica única do escorregamento neste caso é o fato do mesmo ser praticamente uniforme ao longo de toda interface concreto-armadura, indicando um movimento de corpo rígido da barra. Este comportamento é típico da falha por arrancamento e é bem distinto do escorregamento encontrado no caso de escoamento da armadura (Figura 9). Uma análise do estado de tensões na interface comprova que o mesmo é delimitado, de fato, pela região F_2 (Figura 2), que caracteriza falha por arrancamento.

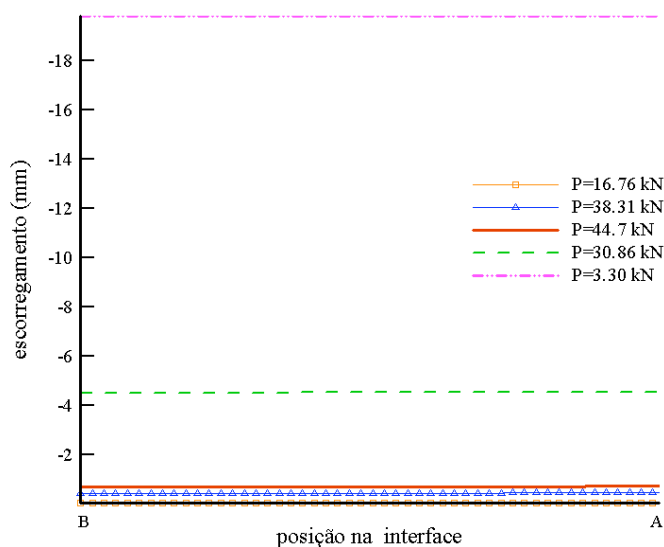


Figura 13: Escorregamento da interface ao longo da armadura (posições A e B são identificadas na Figura 10).

4 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando e comparando os resultados apresentados anteriormente, conclui-se que o modelo proposto é capaz de simular diferentes modos de falha devido a aderência, ou seja, o modelo consegue capturar os mecanismos de arrancamento e fendilhamento (escoamento do aço). Empregou-se as mesmas propriedades de interface em ambos os casos e não foi considerado nenhum conhecimento prévio quanto ao mecanismo de ruptura, ao contrário do que normalmente é necessário quando prescreve-se curvas de tensão de aderência \times escorregamento (por exemplo, as curvas fornecidas pelo CEB-FIP). Portanto a metodologia apresentada tem um caráter preditivo quanto ao mecanismo de falha.

Na Figura 14 é mostrado a relação tensão de aderência \times escorregamento em um ponto da interface, tipicamente encontrado em cada um dos casos estudados. No caso do fendilhamento (seção 3.1) a perda da aderência é brusca e ocorre a níveis de carga menores do que no caso do arrancamento (seção 3.2). A diferença mais notável no entanto é a forma como ocorre a queda pós-pico: brusca no primeiro caso e lenta e suave no segundo, indicando o caráter "dútil" desta última.

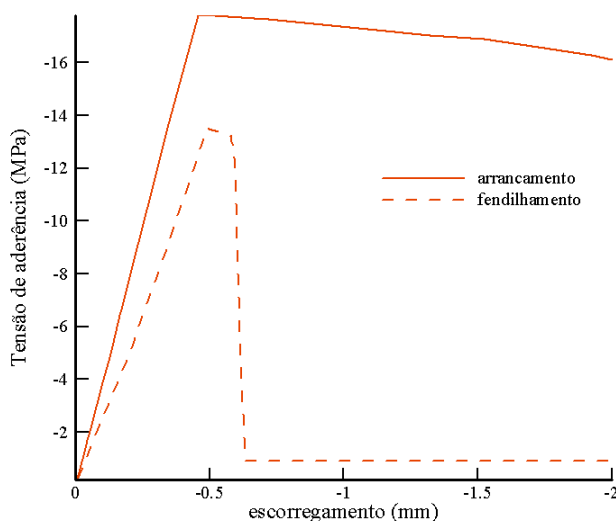


Figura 14: Típica tensão de aderência \times escorregamento no caso de fendilhamento (seção 3.1) e arrancamento (seção 3.2).

O caso de fendilhamento por fissuras longitudinais (não considerado neste trabalho), pode apenas ser capturado fazendo-se considerações tri-dimensionais, por exemplo empregando as metodologias de fissura fictícia (Hillerborg et al. 1976, Bazant e Oh, 1983, etc).

Finalmente, deve-se ressaltar que as propriedades elásticas (matriz \mathbf{D}) e plásticas (μ , c e η), embora mantidas fixas em ambas as análises, podem ter uma forte influência nos resultados obtidos. Sua relação com propriedades físicas e mecânicas do concreto armado nem sempre são triviais. Por esta razão, os autores estão preparando um estudo paramétrico de modo a verificar mais profundamente o efeito de tais propriedades e como relacioná-las às demais características do concreto.

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPQ pelos recursos financeiros obtidos.

REFERÊNCIAS

- Åkesson, M. Fracture Mechanics Analysis of the Transmission Zone in Prestressed Hollow Core Slabs. Licentiate Thesis. Division of Concrete Structures, *Chalmers University of Technology*, Publication 93:5, Göteborg, 1993.
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. *Bulletin d'Informacion*, Lausanne n.213/214, Lausanne: CEB, mar. 1993.
- Cox, J. V. Development of a Plasticity Bond Model for Reinforced Concrete –Theory and Validation for Monotonic Applications. *Naval Facilities Engineering Service Centre*, Port Hueneme, USA, 1994.
- Cox, J.V.; Herrmann, L.R. Development of a plasticity bond model for steel reinforced. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3:155 -180, 1998.
- Eligehausen, R.; Popov, E. P.; Bertero, V. V. Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars under Generalized Excitations. Report n. UCB/EERC 83/23, *University of California, Berkeley*, 1983.
- Fusco, P. B. Técnica de armar as estruturas de concreto armado. *Editora Pini*, cap. 6, p. 135 - 195. São Paulo, 1995.

- Hillerborg, A.; Modéer, M. e Peterson, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773-782, 1976.
- Lundgren, K. Modelling of Bond: Theoretical Model and Analyses. Report 99:5, *Chalmers University of Technology*, Division of Concrete Structures, Göteborg, 1999.
- Lundgren K. Pull-out tests of steel-encased specimens subjected to reversed cyclic loading. *Materials and Structures*, 33:450-456, 2000.
- Lundgren K. and Gylltoft K. A model for the bond between concrete and reinforcement. *Magazine of Concrete Research*, 52:53-63, 2000.
- Lundgren, K. Bond between ribbed bars and concrete. Part 1: Modified model. *Magazine of Concrete Research*, 57:371-382, 2005.
- Magnusson J. Bond and Anchorage of Ribbed Bars in High-Strength Concrete. PhD thesis, Division of Concrete Structures, *Chalmers University of Technology*, Goteborg, 2000.
- Nilson, A. H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *ACI Journal, Proc.* 65: 757-766, 1968.
- Somayajl, S.; Shah, S. P. Bond stress versus slip relationship and cracking response of tension members. *ACI Journal, Proc.* 78: 217-225, may/june 1981.
- Tassios, T. P. Properties of bond between concrete and steel under load cycles idealizing seismic actions. AICAP-CEB symposium. State of art reports - *CEB-Buletin d'information n. 131*, 1: 67-122, Roma, 1979.
- Tepfers R. A Theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices for Deformed Bars. PhD thesis, Division of Concrete Structures, *Chalmers University of Technology*, Goteborg, 1973.
- Yankelevsky, D. Z. New finite element for bond-slip analysis. *Journal of Structural Engineering: ASCE*, 111:1533-1542, 1985.