

## CONTACTO CON FRICCIÓN ENTRE SÓLIDOS 3D ANISÓTROPOS USANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

**Luis Rodríguez-Tembleque, Federico Buroni, Ramón Abascal\* and Andrés Sáez**

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla Camino de los Descubrimientos s/n,  
41092 Sevilla, Spain*

*luisroteso@us.es, fburoni@us.es, abascal@us.es, andres@us.es*

*<http://www.etsi.us.es>*

**Keywords:** Contacto, Fricción, Anisotropía, MEC.

**Abstract.** En este trabajo se presenta un estudio numérico del problema de contacto en tres dimensiones (3D) entre sólidos con comportamiento elástico anisótropo. La formulación empleada se basa en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) para el cálculo de los coeficientes de influencia elástica, y en las funciones de proyección sobre el lagrangiano aumentado de las tracciones de contacto. Las ecuaciones constitutivas de la zona de contacto potencial son las condiciones Signorini de contacto y la ley de Coulomb de fricción. La formulación emplea un enfoque explícito introducido recientemente para la evaluación de soluciones fundamentales, que es válido para comportamiento anisótropo general, incluyendo el caso degenerado. La precisión y robustez de la metodología propuesta se ilustra con la solución de algunos ejemplos presentados en la literatura.

## 1 INTRODUCCIÓN

El incremento del número de aplicaciones de los materiales anisótropos en composites, láminas delgadas, micro y nano-elementos electrónicos, estructuras inteligentes, y álabes de turbina monocristales, entre otros, ha centrado la atención de numerosos investigadores sobre los problemas elásticos anisótropos durante las últimas décadas. Numerosos fallos en estos materiales tienen su origen en problemas de interacción mecánica como pueden ser los de indentación o daño por fretting.

El contacto elástico anisótropo ha sido tratado inicialmente por Willis (1966), que proporcionó un tratamiento analítico para el contacto de dos cuerpos que no son conformes, y más tarde por Turner (1980), que consideró el caso especial de los sólidos transversalmente anisótropos en contacto, tal que sus ejes de simetría sean paralelos a la normal en el punto de contacto. El análisis de Willis fue particularizado a un medio transversalmente isótropo en Gladwell (1980). Entre los trabajos más recientes destacan los de Vlassak and Nix (1993, 1994); Vlassak et al. (2003), Hwu and Fan (1998), Swadener and Pharr (2001), y Batra and Jaing (2008). Sin embargo, debido a la complejidad matemática, las soluciones analíticas incorporan varios supuestos restrictivos (indentadores rígidos sobre semiespacios elásticos, ...).

Debido al gran desarrollo que actualmente se está llevando a cabo en el ámbito de los materiales cerámicos y los cristales con aplicaciones tecnológicas, es necesario disponer de métodos robustos, flexibles y precisos para el modelado de la interacción mecánica de estos sistemas, que sean capaces de considerar geometrías 3D reales, fricción e interacción de elementos de diferente material, para compensar las limitaciones de las soluciones analíticas. Además ayudan a comprender mejor el comportamiento de la mecánica de contacto asociados a los sólidos anisótropos.

En el área numérica, destacan algunos trabajos basados en el Método de Elementos Finitos (MEF) para estudiar un problema de contacto entre sólidos anisótropos, entre los que se pueden encontrar: Lovell (1998) y Arakere et al. (2006). Como se puede ver en estos trabajos, es necesario una malla muy fina para aproximar el problema de contacto entre los sólidos anisótropos. El Método de los Elementos de Contorno (MEC) ha mostrado ser una herramienta numérica muy precisa y eficiente para el análisis de tensiones en los problemas lineales elásticos Aliabadi (2002); Brebbia and J. (1992). En particular, para estudiar los problemas de contacto, como se muestra en: Abascal and Rodríguez-Tembleque (2007); González et al. (2008); Rodríguez-Tembleque and Abascal (2010a,b); Rodríguez-Tembleque et al. (2010).

Hasta donde los autores conocen, el MEC nunca se ha utilizado para el modelado de un problema de contacto 3D entre materiales anisótropos. Basado en un esquema de elementos de contorno explícito presentado por Buroni et al. (2010), el objetivo de este trabajo es proporcionar una formulación de elementos de contorno, y demostrar su viabilidad en 3D para simular problemas de contacto con fricción entre sólidos anisótropos. La metodología de contacto que se sugiere en este trabajo se basa en trabajos precursores en la formulación lagrangiana aumentada: Alart and Cournier (1991), Klarbring (1992), Laursen (2002) y Wriggers (2002). El MEC calcula los coeficientes de influencia elásticos, y mediante funciones de proyección que actúan sobre el Lagrangiano aumentado de las tracciones, se impone las restricciones de contacto. La formulación propuesta se aplica para resolver algunos ejemplos en los que se considera el rozamiento entre materiales similares y no similares.

## 2 ECUACIONES DE CONTACTO

### 2.1 Ecuaciones cinemáticas

Considere el contacto entre dos cuerpos elásticos lineales anisótropos  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , con contorno  $\partial\Omega^\alpha$ , definidos respecto de un sistema de coordenadas cartesianas  $\{x_i\}$  ( $i = 1 - 3$ ) en  $\mathbb{R}^3$ . El comportamiento anisótropo se caracteriza por un tensor de cuarto rango con componentes  $C_{ijkl}^\alpha$ , que verifica las relaciones de simetría  $C_{ijkl}^\alpha = C_{jikl}^\alpha$ ,  $C_{ijkl}^\alpha = C_{ijmk}^\alpha$  y  $C_{ijkl}^\alpha = C_{klij}^\alpha$ . Con el fin de conocer la posición relativa entre ambos cuerpos en todo instante  $\tau$ , se define una variable para la pareja de puntos  $I \equiv \{P^1, P^2\}$  ( $P^\alpha \in \partial\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ), como

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^T(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}^\alpha$  es la posición de  $P^\alpha$  en cada instante, definida como:  $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{X}^\alpha + \mathbf{u}_o^\alpha + \mathbf{u}^\alpha$  ( $\mathbf{X}^\alpha$ : posición global,  $\mathbf{u}_o^\alpha$ : desplazamiento global de sólido rígido;  $\mathbf{u}^\alpha$ : desplazamiento elástico expresado en el sistema global). La matriz  $\mathbf{B} = [\tilde{\mathbf{t}}_1 | \tilde{\mathbf{t}}_2 | \mathbf{n}]$ , es la matriz de cambio de base que expresa la separación de la pareja  $I$  en relación a la base local ortonormal  $\{\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2, \mathbf{n}\}$  asociada a cada pareja  $I$ . El vector unitario  $\mathbf{n}$  es normal a las superficies en contacto, con el sentido de la normal hacia  $\partial\Omega^1$  y expresado en el sistema global. Los vectores  $\{\tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2\}$  son los vectores unitarios tangentes.

La expresión (1) puede ser escrita como:  $\mathbf{g} = \mathbf{B}^T(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}_o^2 - \mathbf{u}_o^1) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)$ , siendo  $\mathbf{B}^T(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1)$  la *separación geométrica* entre dos sólidos expresados en la configuración de referencia ( $\mathbf{g}_g$ ), y  $\mathbf{B}^T(\mathbf{u}_o^2 - \mathbf{u}_o^1)$  la separación originada debido a los *movimientos de sólido rígido* ( $\mathbf{g}_o$ ). Por tanto, el gap de la pareja  $I$  se expresa como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{go} + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{g}_{go} = \mathbf{g}_g + \mathbf{g}_o$ . En este trabajo, la configuración de referencia de cada sólido ( $\mathbf{X}^\alpha$ ) que será considerada, es la configuración inicial (antes de aplicar la carga). Consecuentemente,  $\mathbf{g}_g$  ha de ser llamada *separación geométrica inicial*. En la expresión (2) dos componentes pueden ser identificadas: la separación normal,  $g_n = g_{go,n} + u_n^2 - u_n^1$ , y la separación tangencial o *deslizamiento*,  $\mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{go,t} + \mathbf{u}_t^2 - \mathbf{u}_t^1$ , siendo  $u_n^\alpha$  y  $\mathbf{u}_t^\alpha$  las componentes normales y tangenciales de los desplazamientos.

### 2.2 Restricciones de contacto

Recopilando, para un análisis cuasi-estático, la *condición de contacto unilateral* y la *ley de fricción* definida para cualquier pareja  $I \equiv \{P^1, P^2\} \in \partial\Omega_c$  ( $\partial\Omega_c$ : *Zona de Contacto*) de puntos en contacto, puede ser recopilada conforme a su estado de contacto como:

$$\begin{array}{l} \text{Contacto-adhesión:} \\ \text{Contacto-deslizamiento:} \\ \text{No contacto :} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_n \leq 0 \quad ; \quad g_n = 0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{g}}_t = \mathbf{0} \\ t_n \leq 0 \quad ; \quad g_n = 0 \\ \|\mathbf{t}_t\| = \mu |t_n| \quad ; \quad \dot{\mathbf{g}}_t \cdot \mathbf{t}_t = -\|\dot{\mathbf{g}}_t\| \|\mathbf{t}_t\| \\ t_n = 0 \quad ; \quad g_n \geq 0 \quad ; \quad \mathbf{t}_t = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (3)$$

En la expresión anterior  $g_n$  es la separación normal de la pareja  $I$ , y  $t_n$  es la tracción normal de contacto definida como:  $t_n = \mathbf{B}_n^T \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_n^T \mathbf{t}^2$ , donde  $\mathbf{t}^\alpha$  es la tracción del punto  $P^\alpha \in \Gamma_c^\alpha$  expresado en el sistema de referencia global, y  $\mathbf{B}_n = [\mathbf{n}]$  es la tercera columna de la matriz de cambio de base:  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t | \mathbf{B}_n] = [\tilde{\mathbf{t}}_1 | \tilde{\mathbf{t}}_2 | \mathbf{n}]$ .

Las tracciones normales actuando sobre la pareja  $I$  son iguales y contrarias, de acuerdo con la tercera ley de Newton. Las tracciones tangenciales son definidas como  $\mathbf{t}_t = \mathbf{B}_t^T \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_t^T \mathbf{t}^2$

y satisfacen la ley de Coulomb, donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción.  $\dot{\mathbf{g}}_t$  es el ratio de deslizamiento tangencial. Introduciendo una simple diferencia finita como en Strömberg (1997), la velocidad de deslizamiento  $\dot{\mathbf{g}}_t$  puede ser expresada en el instante  $\tau_k$  como:  $\dot{\mathbf{g}}_t \simeq \Delta \mathbf{g}_t / \Delta \tau$ , donde  $\Delta \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t(\tau_k) - \mathbf{g}_t(\tau_{k-1})$  y  $\Delta \tau = \tau_k - \tau_{k-1}$ .

Las restricciones de contacto pueden ser formuladas mediante funciones de proyección como:

$$\mathbf{t} - \mathbb{P}_{\mathbb{C}_f}(\mathbf{t}^*) = \mathbf{0} \quad (4)$$

donde el operador de contacto  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_f}$  se define como  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_f}(\mathbf{t}^*) = \{\mathbb{P}_{\mathbb{C}_\rho}(\mathbf{t}_t^*), \mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}(t_n^*)\}$ , siendo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}$  y  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_\rho}$  las funciones de proyección normal y tangencial, respectivamente, definidas como  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_-$ ,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}(x) = \min(x, 0) \quad (5)$$

donde se proyecta la variable  $x$  en  $\mathbb{R}_-$ , y el operador de contacto tangencial  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_\rho}(\cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}_\rho}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{if } \|\mathbf{x}\| < \rho \\ \rho \mathbf{e}_t & \text{if } \|\mathbf{x}\| \geq \rho \quad (\mathbf{e}_t = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|) \end{cases} \quad (6)$$

que garantiza que el valor de la variable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  permanece en el disco de Coulomb,  $\mathbb{C}_\rho$ .

En la función  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_\rho}$ , la región  $\mathbb{C}_\rho$  posee un radio  $\rho = |\mu \mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}(t_n^*)|$ . Las variables aumentadas de contacto son:  $(\mathbf{t}^*)^T = [(t_t^*)^T t_n^*]$ , siendo  $t_t^* = t_t - r \dot{\mathbf{g}}_t$  y  $t_n^* = t_n + r g_n$ , donde  $r$  es un parámetro de penalización positivo ( $r \in \mathbb{R}_+$ ). La ecuación (4) recopila la ley de contacto unilateral y la ley de fricción, tomando los siguientes valores en función del estado de contacto de la pareja de puntos  $I$ :

- $(t_n^*)_I > 0$  (No Contacto):  $(\mathbf{t})_I = \mathbf{0}$

- $(t_n^*)_I \leq 0$  (Contacto):

- $\|(\mathbf{t}_t^*)_I\| < |\mu \mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}((t_n^*)_I)|$  (Adhesión):  $\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{g}}_t \\ g_n \end{Bmatrix}_I = \mathbf{0}$

- $\|(\mathbf{t}_t^*)_I\| \geq |\mu \mathbb{P}_{\mathbb{R}_-}((t_n^*)_I)|$  (Deslizamiento):  $\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_t + \mu t_n^* \boldsymbol{\omega}_t^* \\ g_n \end{Bmatrix}_I = \mathbf{0}$

siendo  $\boldsymbol{\omega}_t^* = \mathbf{t}_t^* / \|\mathbf{t}_t^*\|$ .

### 3 ECUACIONES DE ELEMENTOS DE CONTORNO ANISÓTROPAS

#### 3.1 Expresiones explícitas de las ecuaciones integrales de contorno

La formulación de elementos de contorno para un medio elástico  $\Omega$  con contorno  $\partial\Omega$  es bien conocida y puede encontrarse en muchos textos clásicos como Brebbia and J. (1992); Aliabadi (2002). Para un punto del contorno ( $P \in \partial\Omega$ ), la *Identidad de Somigliana* puede ser escrita como:

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u}(P) + CPV \left\{ \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^* \mathbf{u} dS \right\} = \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{U}^* \mathbf{t} dS \quad (7)$$

donde  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{b}$  son, respectivamente, los desplazamientos, las tracciones del contorno y las fuerzas de volumen de  $\Omega$ .  $\mathbf{U}^* = \{U_{ij}^*(P, Q)\}$  es el tensor de soluciones fundamentales, y  $\mathbf{T}^* = \{T_{ij}^*(P, Q)\}$  es el propio para la solución fundamental de las tracciones en el punto  $Q$  en la dirección  $i$  debido a una carga unitaria aplicada en el punto  $P$ , en la dirección  $j$ . La matriz  $\tilde{\mathbf{C}}$

es igual a  $\frac{1}{2} \mathbf{I}$  para un contorno  $\partial\Omega$  suave, y  $CPV \left\{ \int \cdot dS \right\}$  denota el *Valor Principal de Cauchy* de la integral  $\int \cdot dS$ .

La función de Green para medios anisótropos se puede expresar como un término singular por una función de modulación  $\mathbf{H}$  como

$$\mathbf{U}^*(r\hat{\mathbf{e}}) = \frac{1}{4\pi r} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}}) \tag{8}$$

donde  $r = \|\mathbf{x}(Q) - \mathbf{x}(P)\|$  y  $\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{x}(Q) - \mathbf{x}(P))/r$ , siendo  $\|\cdot\|$  la *norma Euclidea*.  $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}})$  es uno de los tres tensores Barnett-Lothe que es simétrica y definida positiva. El tensor  $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}})$  puede ser evaluado como [Ting and Lee \(1997\)](#)

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{-1}(p) dp \tag{9}$$

con  $\Gamma(p) = \mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p + \mathbf{T}p^2$ , expresado en términos del parámetro  $p$ , y

$$Q_{jk} = C_{ijkl}\hat{n}_i\hat{n}_l \quad R_{jk} = C_{ijkl}\hat{n}_i\hat{m}_l \quad T_{jk} = C_{ijkl}\hat{m}_i\hat{m}_l \tag{10}$$

donde  $\hat{n}_i$  y  $\hat{m}_i$  son las componentes de cualquiera de los dos vectores unitarios mutuamente ortogonales tales que  $\{\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{e}}\}$  es una triada ortogonal. Índices repetidos implica suma.

Las componente de la solución fundamental de las tracciones se obtiene facilmente de la derivación de la función de Green como

$$T_{ik}^* = C_{ijlm}\eta_j \frac{\partial U_{lk}^*}{\partial x_m} \tag{11}$$

donde  $\eta_j$  son las componentes del vector unitario extremo al contorno  $\partial\Omega$ , en el punto  $Q$ . La derivada de la función de Green debe ser expresada de la misma forma que la ecuación (8), como un término singular por una modulación que solo depende de  $\hat{\mathbf{e}}$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*(r\hat{\mathbf{e}})}{\partial x_q} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}^*(\hat{\mathbf{e}})}{\partial x_q} \tag{12}$$

donde, de acuerdo con la aproximación de Lee [Lee \(2003\)](#), las componentes de la función de modulación son dadas por

$$\frac{\partial \tilde{U}_{ij}^*(\hat{\mathbf{e}})}{\partial x_l} = -\hat{e}_l H_{ij} + \frac{C_{pqrs}}{\pi} (M_{lqiprj}\hat{e}_s + M_{sliprj}\hat{e}_q) \tag{13}$$

$M_{sliprj}$  son integrales (13) que poseen la siguiente representación en términos del parámetro  $p$  [Lee \(2003\)](#):

$$M_{ijklmn} = \frac{1}{|\mathbf{T}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_{ijklmn}(p)}{(p - p_1)^2(p - p_2)^2(p - p_3)^2} dp \tag{14}$$

donde  $\mathbf{T}$  ha sido previamente definido en (10),  $p_\alpha$  son los autovalores de Stroh y corresponden a las tres raíces complejas del polinomio de sexto orden  $|\Gamma(p)| = 0$  con parte imaginaria positiva ([Ting \(1996\)](#)). En la ecuación (14) se introduce,

$$\Phi_{ijklmn}(p) := \frac{D_{ij}(p)\hat{\Gamma}_{kl}(p)\hat{\Gamma}_{mn}(p)}{(p - \bar{p}_1)^2(p - \bar{p}_2)^2(p - \bar{p}_3)^2} \tag{15}$$

junto con la definición de  $D_{ij} := \hat{n}_i \hat{n}_j + (\hat{n}_i \hat{m}_j + \hat{m}_i \hat{n}_j)p + \hat{m}_i \hat{m}_j p^2$ , siendo  $\hat{\Gamma}_{jk}$  la adjunta de  $\Gamma_{jk}$ , definida como  $\Gamma_{pj} \hat{\Gamma}_{jk} = |\Gamma(p)| \delta_{pk}$  ( $\delta_{pk}$  es la delta de Kronecker).

Con el propósito de proporcionar una formulación de elementos de contorno explícita, la teoría de residuos de Cauchy para múltiples polos es aplicada para evaluar las integrales en (9) y (14), de forma que no tenga que realizar ninguna integración Buroni et al. (2010).

La ecuación integral (7) puede ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{u}(P) + \sum_{e=1}^{N_e} CPV \left\{ \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{T}^* \mathbf{u} \, dS \right\} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{U}^* \mathbf{t} \, dS \right\} \quad (16)$$

en caso de ausencia de fuerzas de volumen ( $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), donde el contorno  $\partial\Omega$  es dividido en  $N_e$  elementos,  $\partial\Omega^e \in \partial\Omega$ , de manera que:  $\partial\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \partial\Omega^e$  y  $\bigcap_{e=1}^{N_e} \partial\Omega^e = \emptyset$ .

Los campos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{t}$  son aproximados sobre cada elemento  $\partial\Omega^e$  usando funciones de forma, como una función de los valores nodales ( $\mathbf{d}^e$  y  $\mathbf{p}^e$ ):  $\mathbf{u} \simeq \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{d}^e$  y  $\mathbf{t} \simeq \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{N}\mathbf{p}^e$ , siendo  $\mathbf{N}$  la matriz de aproximación de funciones de forma.

Después de la discretización, la ecuación (16) puede ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{C}}_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{H}}_i^e \mathbf{d}^e = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{G}}_i^e \mathbf{p}^e \quad (17)$$

siendo:  $\tilde{\mathbf{H}}_i^e = CPV \left\{ \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{T}^* \mathbf{N} \, d\Gamma \right\}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}_i^e = \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{U}^* \mathbf{N} \, d\Gamma$ , las integrales sobre el elemento  $e$  cuando el punto de colocación es el nodo  $i$ . Finalmente, la contribución para todo nodo  $i$  puede ser escrita conjuntamente en forma matricial para dar lugar el sistema global de ecuaciones,

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{p} \quad (18)$$

donde  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{p}$  son los vectores de desplazamientos y las tracciones nodales, respectivamente.

Las matrices  $\tilde{\mathbf{G}}$  y  $\tilde{\mathbf{H}}$  son construidas ensamblando los términos de las matrices  $\tilde{\mathbf{H}}_i^e$  y  $\tilde{\mathbf{G}}_i^e$ .

### 3.2 Discretización de las variables de contacto

Para considerar el contacto entre dos sólidos, las tracciones de contacto ( $\mathbf{t}_c$ ), la separación ( $\mathbf{g}$ ), la velocidad de deslizamiento tangencial ( $\hat{\mathbf{g}}_t$ ), y los desplazamientos de los sólidos ( $\mathbf{u}^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ), son discretizados sobre las interfases de contacto ( $\partial\Omega_c$ ). Para ello,  $\partial\Omega_c$  es dividido en  $N_e^f$  elementos superficiales  $\partial\Omega_c^e$ , de manera que:  $\partial\Omega_c = \bigcup_{e=1}^{N_e^f} \partial\Omega_c^e$ ;  $\bigcap_{e=1}^{N_e^f} \partial\Omega_c^e = \emptyset$ . Estos elementos ( $\partial\Omega_c^e$ ) constituyen el *marco de contacto*.

Las ecuaciones de contacto son discretizadas sobre el marco de contacto como:

$$\mathbf{t}_c \simeq \hat{\mathbf{t}}_c = \sum_{i=1}^{N^f} \delta_{P_i} \boldsymbol{\lambda}_i \quad (19)$$

donde  $\delta_{P_i}$  es la delta de Dirac sobre cada nodo  $i$  del marco, y  $\boldsymbol{\lambda}_i$  es el multiplicador de Lagrange en el nodo ( $i = 1 \dots N^f$ ). La separación ( $\mathbf{g}$ ) es aproximada de la misma forma:

$$\mathbf{g} \simeq \hat{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{N^f} \delta_{P_i} \mathbf{k}_i, \quad (20)$$

donde  $\mathbf{k}_i$  es el valor nodal. La velocidad de deslizamiento tangencial es aproximada como:  $\hat{\mathbf{g}} \simeq \Delta \hat{\mathbf{g}}_t / \Delta \tau$ .

Las expresiones discretas de la ecuación (2) pueden ser escritas como:

$$\mathbf{k} = \mathbf{L}_g \mathbf{k}_{go} + (\mathbf{L}^2)^T \mathbf{x}^2 - (\mathbf{L}^1)^T \mathbf{x}^1 \quad (21)$$

siendo  $\mathbf{k}$  el vector separación de las parejas  $I$  y  $\mathbf{k}_{go}$  la separación geométrica inicial y el vector de movimiento sólido rígido. Las matrices  $\mathbf{L}^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) y  $\mathbf{L}_g$  son definidas como:  $\mathbf{L}^\alpha = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \sum_{j=1}^{N^f} (i,j) \equiv I (\mathcal{L}_i^\alpha)^T \mathbf{B}_j \mathcal{L}_j^f$ ;  $\mathbf{L}_g = \sum_{i=1}^{N^f} \sum_{j=1}^{N^f} (i,j) \equiv I (\mathcal{L}_i^f)^T \mathcal{L}_j^f$ , donde  $\mathcal{L}_i^\alpha$  y  $\mathcal{L}_i^f$  son operadores Booleanos de ensamblaje:  $\mathbf{d}_i^\alpha = \mathcal{L}_i^\alpha \mathbf{x}^\alpha$  y  $\lambda_i = \mathcal{L}_i^f \Lambda$ . El operador matricial  $\mathcal{L}_i^\alpha$  permite extraer el desplazamiento del nodo  $i$  de contacto ( $\mathbf{d}_i^\alpha$ ), del vector  $\mathbf{x}^\alpha$ .  $\mathcal{L}_i^f$  extrae del vector de multiplicadores ( $\Lambda$ ), la variable asociada al nodo  $i$  ( $\lambda_i$ ). El vector  $\mathbf{x}^\alpha$  es organizado como  $(\mathbf{x}^\alpha)^T = [(\mathbf{x}_p^\alpha)^T (\mathbf{d}_c^\alpha)^T]$  ( $\mathbf{x}_p^\alpha$ : incógnitas externas;  $\mathbf{d}_c^\alpha$ : incógnitas de desplazamientos de contacto), de forma que la matriz  $\mathbf{L}^\alpha$  posee la siguiente estructura:  $(\mathbf{L}^\alpha)^T = [\mathbf{0} \quad (\tilde{\mathbf{L}}^\alpha)^T]$ . (La matriz  $\mathbf{L}_g$  es igual a la matriz identidad en estos problemas:  $\mathbf{L}_g = \mathbf{I}$ ).

### 3.3 Ecuaciones discretas de contacto con elementos de contorno

La ecuación (18) puede ser escrita para problemas de contacto como:  $\mathbf{A}_x \mathbf{x} + \mathbf{A}_p \mathbf{p}_c = \mathbf{f}$ , siendo  $(\mathbf{x})^T = [(\mathbf{x}_q)^T (\mathbf{d}_d)^T]$  el vector de incógnitas nodales que recolecta las incógnitas externas a la zona de contacto ( $\mathbf{x}_q$ ) y los desplazamientos nodales de contacto ( $\mathbf{d}_c$ ).  $\mathbf{p}_c$  son las tracciones de contacto nodales.  $\mathbf{A}_p$  se construye a partir de las columnas de  $\tilde{\mathbf{G}}$  pertenecientes a las incógnitas nodales de contacto, y  $\mathbf{A}_x = [\mathbf{A}_x \quad \mathbf{A}_d]$  con las columnas de las matrices  $\tilde{\mathbf{H}}$  y  $\tilde{\mathbf{G}}$ , correspondientes a la matriz de variables exteriores ( $\mathbf{A}_x$ ) y el desplazamiento nodal de contacto ( $\mathbf{A}_d$ ).

EL sistema no-lineal de ecuaciones de contacto se expresa de acuerdo con Rodríguez-Tembleque and Abascal (2010a,b) como:  $\Theta(\mathbf{z}) = \mathbf{A}(\mathbf{z}) - \mathbf{f} = \mathbf{0}$ , donde  $\mathbf{z} = \{ \mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \Lambda, \mathbf{k} \}$  y

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p^1 \tilde{\mathbf{L}}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_x^2 & -\mathbf{A}_p^2 \tilde{\mathbf{L}}^2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{L}^1)^T & -(\mathbf{L}^2)^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_\lambda & \mathbf{P}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \Lambda \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{L}_g \mathbf{k}_{go} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Las primeras dos filas en la expresión anterior representan el equilibrio de cada sólido  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). La tercera fila es la ecuación cinemática de contacto y la última fila expresa las restricciones nodales de contacto. El vector  $\Lambda$  representa las tracciones nodales de contacto, de manera que:  $\mathbf{p}_c^1 = \tilde{\mathbf{L}}^1 \Lambda$  y  $\mathbf{p}_c^2 = -\tilde{\mathbf{L}}^2 \Lambda$ . Las matrices  $\mathbf{P}_\lambda$  y  $\mathbf{P}_g$  son los términos no lineales obtenidos mediante ensamblaje de las matrices  $(\mathbf{P}_\lambda)_I$  y  $(\mathbf{P}_g)_I$ , asociadas a la pareja  $I$  de nodos en contacto:  $\mathbf{P}_\lambda = \sum_{i=1}^{N^f} \sum_{j=1}^{N^f} (i,j) \equiv I (\mathcal{L}_i^f)^T (\mathbf{P}_\lambda)_I \mathcal{L}_j^f$  y  $\mathbf{P}_g = \sum_{i=1}^{N^f} \sum_{j=1}^{N^f} (i,j) \equiv I (\mathcal{L}_i^f)^T (\mathbf{P}_g)_I \mathcal{L}_j^f$ . Los valores de estas matrices depende del estado de contacto de la pareja  $I$ :

- **No-Contacto:**  $(\Lambda_n^*)_I \geq 0$

$$(\mathbf{P}_\lambda)_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_I \quad (\mathbf{P}_g)_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_I \quad (23)$$

- **Contacto-Adhesión:**  $(\Lambda_n^*)_I < 0$  y  $\|(\Lambda_t^*)_I\| < \mu |(\Lambda_n^*)_I|$

$$(\mathbf{P}_\lambda)_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_I \quad (\mathbf{P}_g)_I = \begin{bmatrix} r_t & 0 & 0 \\ 0 & r_t & 0 \\ 0 & 0 & -r_n \end{bmatrix}_I \quad (24)$$

- **Contacto-Deslizamiento:**  $(\Lambda_n^*)_I < 0$  y  $\|(\Lambda_t^*)_I\| \geq \mu|(\Lambda_n^*)_I|$

$$(\mathbf{P}_\lambda)_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu\omega_{t_1}^* \\ 0 & 1 & \mu\omega_{t_2}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_I \quad (\mathbf{P}_g)_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_n \end{bmatrix}_I \quad (25)$$

siendo  $(\omega_t)_I = (\Lambda_t^*)_I / \|(\Lambda_t^*)_I\|$ , y  $(\Lambda_n^*)_I$  y  $(\Lambda_t^*)_I$  las componentes de las variables aumentadas normal and tangential asociadas a la pareja de contacto  $I$ :  $(\Lambda_n^*)_I = (\Lambda_n)_I + r_n(\mathbf{k}_n)_I$  y  $(\Lambda_t^*)_I = (\Lambda_t)_I - r_t(\mathbf{k}_t)_I$ .

#### 4 RESOLUCIÓN

Para resolver el sistema  $\Theta(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ , se ha empleado el *Generalized Newton Method with Line Search* (GNMLS). El GNMLS es una extensión efectiva del método de Newton para funciones  $\mathcal{B}$ -diferenciables propuesto por Pang (1990) en un contexto general y particularizado por Alart (1997) y Christensen et al. (1998) para el problema de contacto.

Definiendo  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in (0, 1/2)$ , y  $\varepsilon > 0$ , pero pequeño, la aplicación del algoritmo del GNMLS para resolver las ecuaciones no lineales, puede ser resumido en los siguientes pasos:

- (1) Comienza la iteración, bucle  $n$ .
- (2) Resolvemos para  $\Delta\mathbf{z}^{(n)}$ , el sistema  $\partial\Theta(\mathbf{z}^{(n)}; \Delta\mathbf{z}^{(n)}) = -\Theta(\mathbf{z}^{(n)})$ .
- (3) Obtener el menor entero  $m = 1, 2, \dots$  que satisfaga la siguiente función error:  $\Psi(\mathbf{z}^{(n)} + \alpha^{(n)} \Delta\mathbf{z}^{(n)}) \leq (1 - 2\sigma\alpha^{(n)}) \Psi(\mathbf{z}^{(n)})$ , con  $\Psi(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\|\Theta(\mathbf{z})\|^2$  y  $\alpha = \beta^m$ .
- (4) Actualiza solución:  $\mathbf{z}^{(n+1)} = \mathbf{z}^{(n)} + \alpha\Delta\mathbf{z}^{(n)}$ .
- (5) Si termina  $\Psi(\mathbf{z}^{(n+1)}) \leq \varepsilon$  la solución es  $\mathbf{z}^{(n+1)}$ , en otro caso calculamos una nueva iteración ( $n \leftarrow n + 1$ ).

El algoritmo utiliza un bucle  $n$  para la subiteración de Newton, permitiéndole obtener la solución  $\mathbf{z}$ . En cada una de estas subiteraciones un sistema lineal tiene que ser resuelto para calcular la dirección de búsqueda  $\Delta\mathbf{z}^{(n)}$ . Usando el esquema de la resolución y la función de proyección presentada en Rodríguez-Tembleque and Abascal (2010b), el sistema lineal presenta una reducción del número de incógnitas, gracias a la cuasi-complementariedad de las variables de contacto que se obtiene con el operador de proyección de contacto empleado.

#### 5 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para mostrar las posibilidades y validar la formulación presentada en este trabajo, se van a resolver dos ejemplos. Alguno de los resultados se comparan con trabajos previos presentados en la literatura. Esta formulación permite considerar la fricción en el problema de contacto, así como el caso de problemas similares y no similares. Por lo tanto, algunos estudios acerca de la fricción, la influencia de la orientación del material y las diferencias de materiales son presentados.

##### 5.1 Indentación anisótropa de un punzón parabólico

Se ha resuelto un problema de indentación de un paraboloides rígido sobre un dominio ortótropo, tal y como se presenta en la Fig.1(a). Las dimensiones de los sólidos son:  $L_1 =$



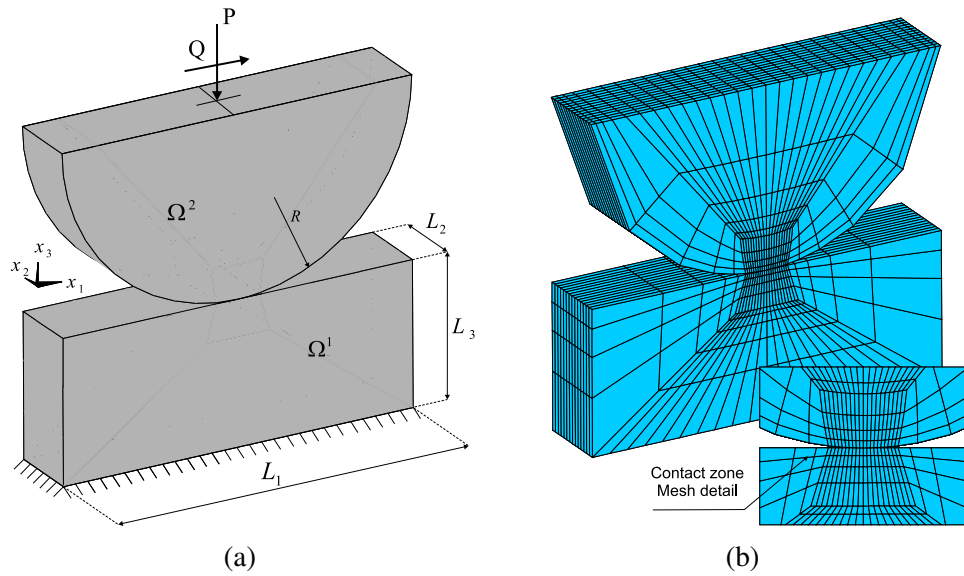


Figure 1: (a) Esquema del problema. (b) Detalles de las mallas de los sólidos.

$1 \times 10^3 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 0.4 \times 10^3 \text{ mm}$ ,  $L_3 = 0.2 \times 10^3 \text{ mm}$ , y  $R = 0.5 \times 10^3 \text{ mm}$ , como es considerado en [Batra and Jaing \(2008\)](#). Cada dominio se discretiza con 1252 elementos de contorno cuadriláteros lineales, utilizando  $20 \times 14$  elementos en la zona de contacto potencial, como muestra la Fig.1(b).

En el plano  $x_2 = 0$ , los resultados pueden ser comparados con la solución analítica propuesta por [Hwu and Fan \(1998\)](#), donde se considera deformación plana, y el punzón  $\Omega^2$  se supone que es rígido, por lo que sólo el dominio elástico  $\Omega^1$  necesita ser considerado.

Las componentes del tensor de elasticidad  $C_{ijkl}$  se pueden escribir, para deformaciones en el plano- $x_1$ - $x_3$ , como

$$\begin{aligned} C_{1111} &= (1 - \nu_{23}\nu_{32})E_1/\Delta & C_{3333} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21})E_3/\Delta \\ C_{1133} &= (\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32})E_1/\Delta = (\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23})E_3/\Delta & C_{1313} &= G_{31} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{aligned} \quad (26)$$

donde  $E_i$  es el módulo de Young en dirección  $x_i$ ,  $G_{31}$  es el módulo de elasticidad transversal en el plano- $x_3$ - $x_1$ , y

$$\nu_{ij} = - \frac{\text{deformación normal en la dirección-}x_j}{\text{deformación normal en la dirección-}x_i} \quad (27)$$

para tensión uniaxial aplicada a lo largo de la dirección  $x_i$ . En este ejemplo son consideradas las mismas propiedades del material que [Batra and Jaing \(2008\)](#):  $E_1 = 25 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = E_3 = 1 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $G_{23} = 0.2 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $G_{12} = G_{31} = 0.5 \times 10^3 \text{ MPa}$  y  $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$ .

De acuerdo con [Hwu and Fan \(1998\)](#), la distribución de presiones de contacto sin fricción puede ser expresada como

$$t_n(x) = p_o \sqrt{1 - (x_1/a)^2}, \quad |x_1| < a \quad (28)$$

siendo

$$\begin{aligned} p_o &= a/(AR) & A &= 1/\alpha_3 \kappa_3 E_3 \\ \alpha_3 &= (1 - \nu_{23}\nu_{32})^{-1/2} & \kappa_3 &= (E_3/G_{13} + 2\phi_1 \sqrt{E_3/E_1})^{-1/2} \\ \phi_1 &= \sqrt{(1 - \nu_{12}\nu_{21})(1 - \nu_{32}\nu_{23})} - \sqrt{(\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32})(\nu_{13} - \nu_{23}\nu_{12})} \end{aligned} \quad (29)$$

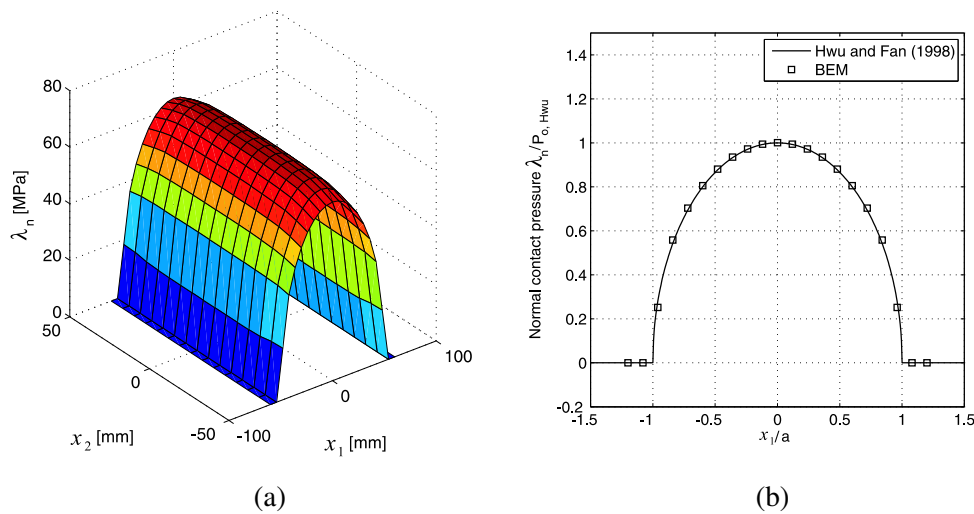


Figure 2: (a) Distribución de la presión de contacto sobre la zona de contacto. (b) Comparación de la presión de contacto, en el plano  $x_2 = 0$ , calculada mediante el MEC con la solución de Hwu y Fan [Hwu and Fan \(1998\)](#).

La Fig.2(a) muestra la distribución de presiones normales de contacto de elementos de contorno, originada por una indentación normal ( $P = p_o \pi a / 2$ ,  $Q = 0$ ) que causa un semiancho de contacto  $a = 50 \text{ mm}$ . La Fig.2(b) compara la presión de contacto de elementos de contorno en el plano  $x_2 = 0$  con (28-29), y se puede ver como presentan un acuerdo excelente, lo que nos permite validar la formulación de contacto presentada.

Además, la formulación de elementos de contorno nos permiten considerar  $\Omega^{(2)}$  con un material elástico. En la Fig.3(a), se presentan las soluciones a problemas de contacto entre casos *ortótropo-ortótropo* e *isótropo-ortótropo*, para un semiancho de contacto fijo  $a$ . Las propiedades ortotropas del material fueron definidas previamente, y las propiedades isótropas son:  $E = 10^3 \text{ MPa}$  y  $\nu = 0.25$ .

Las soluciones son comparadas satisfactoriamente con las distribuciones analíticas, considerando en 29,  $A = A^1 + A^2$ , debido a que las superficies de contacto son coincidentes con planos de simetría de ambos materiales [Swadener and Pharr \(2001\)](#). La expresión de  $A^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) para un material ortótropo ( $A^{ortho}$ ) fue presentada en (29). Para un material isótropo ( $A^{isot}$ ) se puede encontrar en [Hills et al. \(1993\)](#).

En el caso *ortótropo-ortótropo*, se puede estudiar la influencia del módulo de Young relativo  $E_1^2/E_1^1$  sobre el valor de la carga normal ( $P$ ), considerando el mismo semiancho de contacto. En la Fig.3(b), se puede ver como el valor de la carga necesaria crece con el incremento relativo de  $E_1^2$  sobre  $E_1^1$ , hasta un valor constante.

## 5.2 Carga tangencial

A continuación se consideran dos ejemplos de carga tangencial ( $Q \neq 0$ ). Para el primer caso, consideramos un problema de contacto con fricción similar entre dos dominios ortotropos. El material de los sólidos es el mismo que en el ejemplo anterior. En el segundo caso, se resuelve un problema de contacto no similar, modificando sólo el módulo de Young:  $E_3^2 = 50 \times 10^3 \text{ MPa}$ . En ambos casos el coeficiente de fricción es  $\mu = 0.1$  y  $g_{o,x_1} = 0.15 \text{ mm}$ .

La Fig.4 muestra las componentes de las tracciones de contacto  $\lambda_n$  y  $\lambda_{x_1}$  para contacto similar y no similar. Como se puede ver en la Fig.4(a-b), no existe diferencia en la distribución de las tracciones normales, pero la distribución de tracciones tangenciales es completamente

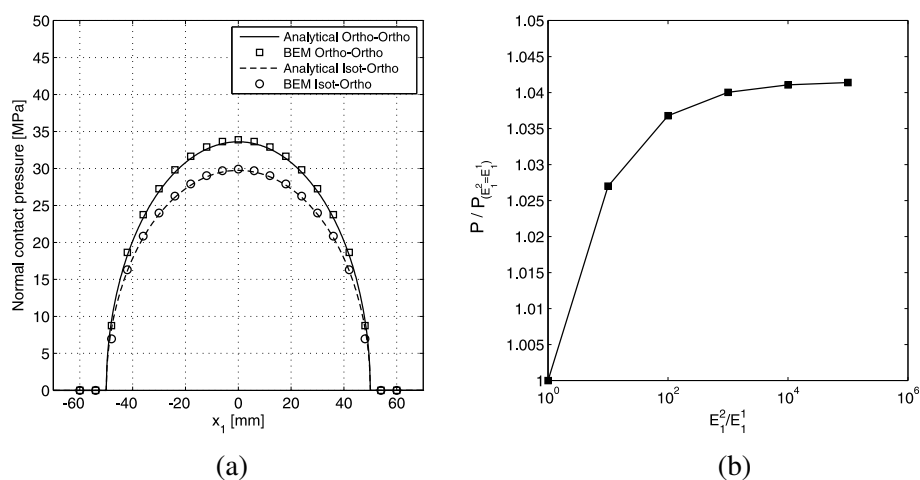


Figure 3: (a) Contacto de materiales similares (ortótropo-ortótropo) y no similares (isótropo-ortótropo). (b) Influencia del módulo de Young relativo  $E_1^2/E_1^1$  sobre  $P$ .

diferente.

La Fig.4(c) presenta una distribución de tracciones de contacto tangencial simétrica, con una zona de adhesión en el centro. La Fig.4(d) muestra una distribución no simétrica como consecuencia del deslizamiento tangencial. La parte principal de la zona de adhesión está situada en la región  $x_1 < 0$ . En ambos casos, la solución tangencial cumple el principio de máxima disipación de la energía presentado en (3).

Por último, se estudia también la influencia del módulo de Young relativo  $E_1^2/E_1^1$  sobre las cargas normales y tangenciales ( $P$  y  $Q$ ), para un valor fijo de  $g_{o,x_1}$  y  $g_{o,x_3}$ . Podemos ver como la relación  $P-g_{o,x_3}$  y  $Q-g_{o,x_1}$  se ve afectada por el modulo de Young relativo  $E_1^2/E_1^1$ . La Fig.5 presenta un incremento de la carga normal hasta un valor constante, como se esperaba. Sin embargo, la carga tangencial presenta una reducción significativa.

## 6 RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una formulación explícita de elementos de contorno 3D para resolver problemas de contacto 3D entre sólidos elásticamente anisótropos. Su exactitud y robustez ha sido testada en los ejemplos presentados, comparando con soluciones analíticas de la literatura. Esta formulación permite considerar el comportamiento anisótropo general de los materiales de los sólidos en contacto, incluso en el caso de cualquier degeneración matemática dentro del contexto del formalismo de Stroh, que se pueda presentar en ellos (como puede ser el caso isótropo). Además, esta formulación considera geometrías reales 3D, contacto con fricción, y materiales similares y no similares. Gracias a ello, en este trabajo se realizan algunos estudios considerando contacto con fricción, la influencia de la orientación del material, las no similitudes de los materiales. En los ejemplos podemos ver como en el caso de contacto sin fricción y con fricción, la discrepancia entre los módulos de Young transversales a la dirección de indentación (de los sólidos) afecta a la rigidez de contacto (Compliance) normal y tangencial.

Por tanto, como muestran los ejemplos resueltos, esta formulación permite estudiar las propiedades de interacción mecánica de los materiales, posibilitando encontrar unas orientación preferentes o propiedades del material adecuadas ante una carga de contacto normal o tangencial. Además, esta formulación posee potenciales aplicaciones al análisis de daño

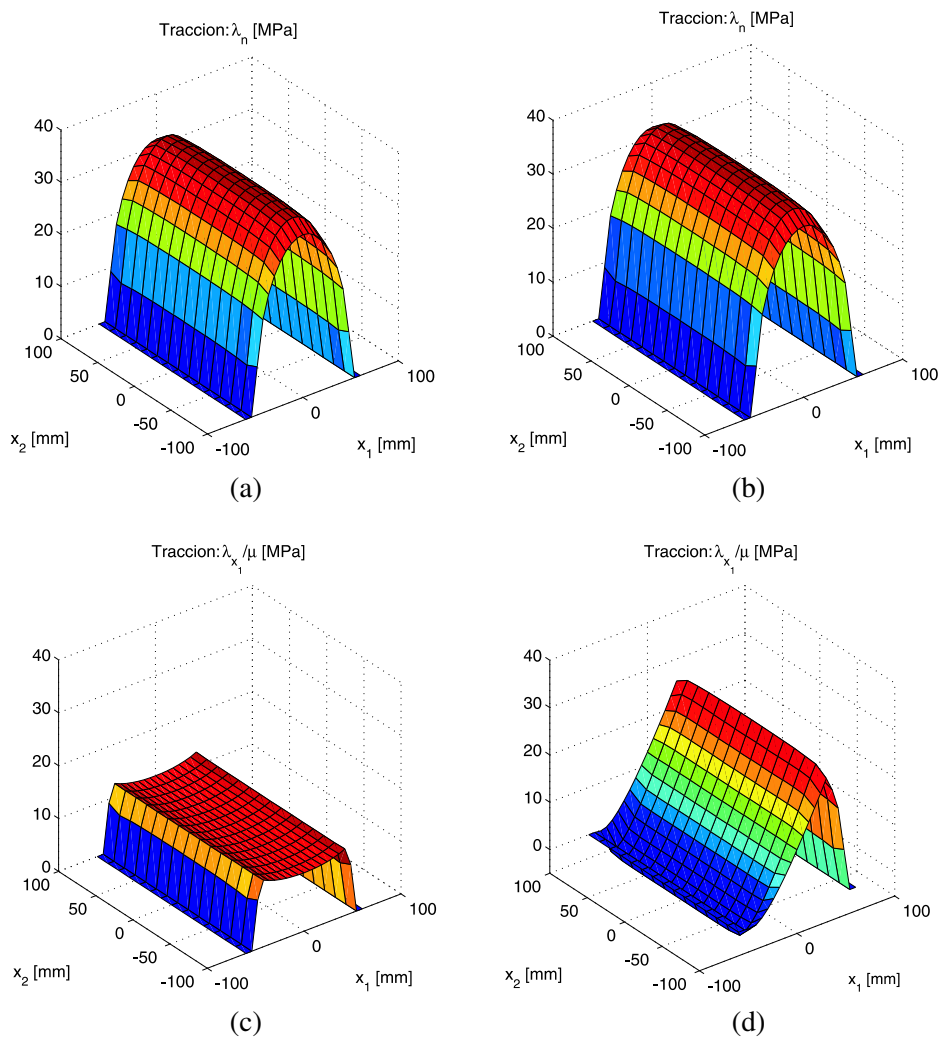


Figure 4: Tracciones de contacto  $\lambda_n$  y  $\lambda_{x_1}$  para el caso de contact similar (a-c), y no similar (b-d).

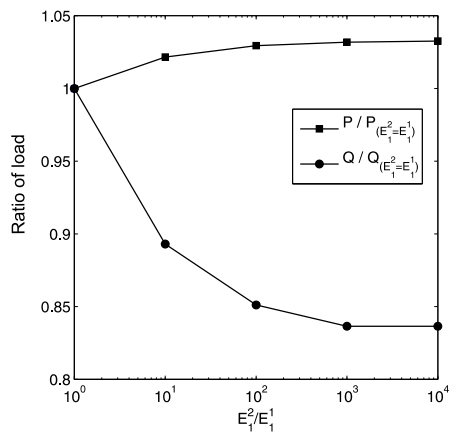


Figure 5: Influencia del modulo de Young relativo  $E_1^2/E_1^1$  sobre P y Q.

mecánico como el que tiene lugar en el fretting.

## 7 ACKNOWLEDGMENTS

Este trabajo ha sido cofinanciado por la DGICYT del *Ministerio de Ciencia y Tecnología* de España, proyectos de investigación DPI2006-04598 y DPI2007-66792-C02-02, y por la *Consejería de Innovación Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía*, España, proyectos de investigación P06-TEP-02355 y P08-TEP-03804.

## REFERENCES

- Abascal R. and Rodríguez-Tembleque L. Steady-state 3d rolling-contact using boundary elements. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 33:905–920, 2007.
- Alart P. Méthode de newton généralisée en mécanique du contact. *J. Math. Pure Appl.*, 76:83–108, 1997.
- Alart P. and Cournier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, 92:353–375, 1991.
- Aliabadi M. *The Boundary Element Method Vol2: Applications in Solids and Structures*. John Wiley & Sons, 2002.
- Arakere N., Kundsen E., Swanson G., Duke G., and Ham-Battista G. Subsurface stress fields in face-centered-cubic single-crystal anisotropic contact. *J. Eng. Gas Turbines Power.*, 128:879–888, 2006.
- Batra R. and Jaing W. Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer. *Int. J. Solids Struct.*, 45:5814–5830, 2008.
- Brebbia C. and J. D. *Boundary Elements: An Introductory Course (second edition)*. Computatinal Mechanics Publications. John Wiley & Sons, 1992.
- Buroni F., Ortiz J., and Sáez A. Multiple pole residue approach for 3d bem analysis of mathematical degenerate and non-degenerate materials. *Submitted for publication*, 2010.
- Christensen P., Klarbring A., Pang J., and Strömberg N. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 42:145–173, 1998.
- Gladwell G. *Contact problem in the classical theory of elasticity*. Sijthoff & Noordhoff. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.
- González J., Park K., Felippa C., and Abascal R. Formulation based on localized lagrange multipliers for bem-fem coupling in contact problems. *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, 197:623–640, 2008.
- Hills D., Nowell D., and Sackfield A. *Mechanics of Elastic Contact*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1993.
- Hwu C. and Fan C. Sliding punches with or without friction along the surface of an anisotropic elastic half-plane. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 51:159–177, 1998.
- Klarbring A. *Mathematical Programming and Augmented Lagrangian Methods for Frictional Contact Problems*. In: Curnier A.(ed.), *Proceedings Contact Mechanics International Symposium*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.
- Laursen T. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer, England, 2002.
- Lee V. Explicit expressions of derivatives of elastic greens functions for general anisotropic materials. *Mech. Res. Comm.*, 30:241–249, 2003.
- Lovell M. Analysis of contact between transversely isotropic coated surfaces: development of stress and displacement relationships using fem. *Wear.*, 194:60–70, 1998.
- Pang J. Newton's method for b-differentiable equations. *Math. Oper. Research.*, 15:311–341,

1990.

- Rodríguez-Tembleque L. and Abascal R. A 3d fem-bem rolling contact formulation for unstructured meshes. *Int. J. Solids Struct.*, 47:330–353, 2010a.
- Rodríguez-Tembleque L. and Abascal R. A fem-bem fast methodology for 3d frictional contact problems. *Comput. Struct.*, 88:924–937, 2010b.
- Rodríguez-Tembleque L., Abascal R., and Aliabadi M. A boundary element formulation for wear modeling on 3d contact and rolling-contact problems. *Int. J. Solids Struct.*, 47:2600–2612, 2010.
- Strömberg N. An augmented lagrangian method for fretting problems. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 16:573–593, 1997.
- Swadener J. and Pharr G. Indentation of elastically anisotropic half-spaces by cones and parabolae of revolution. *Philos. Mag. A.*, 81:447–466, 2001.
- Ting T. *Anisotropic Elasticity*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- Ting T. and Lee V. The three-dimensional elastostatic green's function for general anisotropic linear elastic solids. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 50:407–426, 1997.
- Turner J. Contact on a transversely isotropic half-space, or between two transversely isotropic bodies. *Int. J. Solids Struct.*, 16:409–419, 1980.
- Vlassak J., Ciavarella M., Barber J., and Wang X. The indentation modulus of elastically anisotropic materials for indenters of arbitrary shape. *J. Mech. Phys. Solids.*, 51:1701–1721, 2003.
- Vlassak J. and Nix W. Indentation modulus of elastically anisotropic half spaces. *Philos. Mag. A.*, 67:1045–1056, 1993.
- Vlassak J. and Nix W. Measuring the elastic properties of anisotropic materials by means of indentation experiments. *J. Mech. Phys. Solids.*, 42:1223–1245, 1994.
- Willis J. Hertzian contact of anisotropic bodies. *J. Mech. Phys. Solids.*, 14:163–176, 1966.
- Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. West Sussex, England, 2002.