

## DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE PARÁMETROS TERMOHIDRODINÁMICOS EN COJINETES

**Gustavo G. Vignolo<sup>a,b,c</sup>, Daniel O. Barilá<sup>c</sup>, Lidia M. Quinzani<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av Alem 1253 – 8000 – Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [gvignolo@plapiqui.edu.ar](mailto:gvignolo@plapiqui.edu.ar)*

<sup>b</sup> *Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), Universidad Nacional del Sur – CONICET Camino La Carrindanga km. 7 – CC 717 - Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [lquinzani@plapiqui.edu.ar](mailto:lquinzani@plapiqui.edu.ar)*

<sup>c</sup> *Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Ruta Prov. N° 1, Km. 4 – 9000 – Comodoro Rivadavia - Chubut, ARGENTINA, [dbarila@unpata.edu.ar](mailto:dbarila@unpata.edu.ar)*

**Palabras Clave:** Lubricación Termo-hidrodinámica, Cojinete.

**Resumen:** Lubricación hidrodinámica es aquella que se forma debido al movimiento relativo de dos superficies que se deslizan una sobre otra separadas por una película fluida. El propio movimiento y la geometría de la película generan presión suficiente en el fluido evitando el contacto entre las partes. La ecuación diferencial que gobierna dicha presión se denomina ecuación de Reynolds y surge de integrar los balances de cantidad de movimiento y masa para el fluido lubricante en el espesor de la película. En esta ecuación, la presión es constante en el espesor, por lo que el problema se reduce a dos dimensiones si se considera que el fluido es isotérmico. No obstante, a medida que se van incrementando las necesidades desde el punto de vista tecnológico, las condiciones de operación de las máquinas que emplean cojinetes se hacen más severas. Esto implica mayor carga unitaria y velocidad de rotación, ocasionando que la temperatura del fluido lubricante varíe notablemente como consecuencia de la disipación de energía por efectos viscosos. Dado que las propiedades del fluido son funciones de la temperatura (fundamentalmente la viscosidad), cuanto más severas sean las condiciones de operación de un cojinete, menos certera será la predicción de su funcionamiento utilizando la hipótesis de flujo isotérmico. Por ende, si se desea obtener una descripción detallada y más realista del flujo en cojinetes, se necesita resolver el balance de energía acoplado con los balances de cantidad de movimiento y masa, que permitirán obtener los perfiles de presión y temperatura.

En este trabajo se presenta la solución numérica de las ecuaciones de conservación acopladas, para el caso de cojinetes lubricados con un fluido Newtoniano cuya viscosidad varía exponencialmente con la temperatura. Para ello, se ha extendido un programa de cálculo desarrollado previamente en el que se trabaja con diferencias finitas de orden dos en las coordenadas coincidentes con las direcciones principales del flujo. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve mediante el método de Gear acoplado con una técnica de shooting.

Las distribuciones de presión y temperatura del lubricante calculadas usando esta formulación muestran buena concordancia con datos disponibles en la literatura. Se ha analizado, además, la validez y limitaciones de desarrollos termo-hidrodinámicos simplificados y la influencia del balance de cantidad de movimiento en la dirección del espesor, como resultado de la consideración del perfil térmico. Asimismo, se presentan diversas variantes del algoritmo en busca de optimizar los tiempos de ejecución.

## 1 INTRODUCCIÓN

Cuando un elemento de máquina está soportado por un segundo elemento, y hay movimiento relativo entre ellos de tal forma que las superficies de ambos deslizan una sobre la otra, se dice que el conjunto constituye un cojinete. No obstante, suele denominarse como cojinete al elemento estático que soporta al elemento móvil (generalmente un rotor). Entre las diversas variantes existentes, resultan de interés en este trabajo los cojinetes hidrodinámicos cilíndricos, en los cuales las superficies sólidas en movimiento relativo (eje y cojinete) son mantenidas separadas por una fina película de lubricante. La presión necesaria para ello es generada por la geometría del sistema y las condiciones del flujo. La descripción físico-matemática de este fenómeno lleva usualmente a una ecuación diferencial elíptica de segundo orden en derivadas parciales conocida como ecuación de Reynolds (Pinkus, 1961). La misma surge del análisis dimensional y posterior integración de las ecuaciones de conservación en el espesor del fluido. Si bien este tratamiento presenta la ventaja de eliminar una coordenada, y por ende simplificar sensiblemente su solución, el hecho de considerar que la presión es independiente de la coordenada a lo largo del espesor de la película fluida dificulta (aunque no imposibilita) la incorporación de escenarios más realistas como, por ejemplo, el flujo de lubricante no isotérmico (Pinkus, 1984).

En general, el análisis termohidrodinámico de cojinetes puede dividirse en dos categorías (Elrod, 1987). En la primera de ellas se incluye el tratamiento completo del balance de energía a lo largo del espesor de la película fluida usando métodos de diferencias o elementos finitos (Mitsui, 1987). En la segunda se emplea alguna aproximación para considerar todo el fenómeno que sucede en el espesor, usualmente empleando la distribución local de temperatura a través de algún valor “representativo” (Vignolo *et al.*, 2008). Las ventajas y desventajas de la primera radican en la exactitud del modelo a expensas de complejidad, mientras que para la segunda se gana en sencillez a expensas de exactitud del modelo. Dependiendo de las necesidades, puede optarse por uno u otro enfoque.

En este trabajo se presenta la ampliación de una plataforma numérica previamente desarrollada (Vignolo *et al.*, 2009) en la que se resuelven numéricamente las ecuaciones de conservación de manera acoplada. En esta etapa del desarrollo, la cual se encuadra dentro de la primer categoría mencionada, se ha incorporado el balance de energía para considerar el campo térmico dentro de la película fluida, así como un tratamiento más adecuado de la existencia de cavitación en la misma. En esta instancia se detalla el desarrollo de las ecuaciones, método numérico y resultados obtenidos para cojinetes de longitud arbitraria, con flujo no-isotérmico de un lubricante Newtoniano. Asimismo, se presenta la evaluación de diversas variantes analizadas con el objetivo de acelerar los tiempos de cálculo del algoritmo.

## 2 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

En su forma más elemental, un cojinete hidrodinámico cilíndrico consta de un eje que gira (rotor) contenido dentro de un cilindro de ajuste estrecho (cojinete), cuyas superficies están separadas por una pequeña película de lubricante. Si el rotor gira a una velocidad angular  $\Omega$  y existe una fuerza  $F$  aplicada al mismo, los centros del eje y del cojinete no permanecen coincidentes, sino que muestran cierta excentricidad,  $e$  (Figura 1a). Esto genera una geometría convergente-divergente en la película fluida que, junto con el movimiento relativo entre las superficies sólidas, permite que se desarrolle presión por efectos viscosos en la misma, logrando así capacidad para soportar la carga aplicada y evitar el contacto entre dichas superficies.

Al estudiar el flujo de lubricante, la principal hipótesis simplificatoria que se considera en

el análisis, es que la capa de fluido es tan delgada, comparada con el radio del cojinete, que su curvatura puede despreciarse. Así, el flujo que en principio está descrito en coordenadas cilíndricas, se trata en coordenadas cartesianas (Figura 1b).

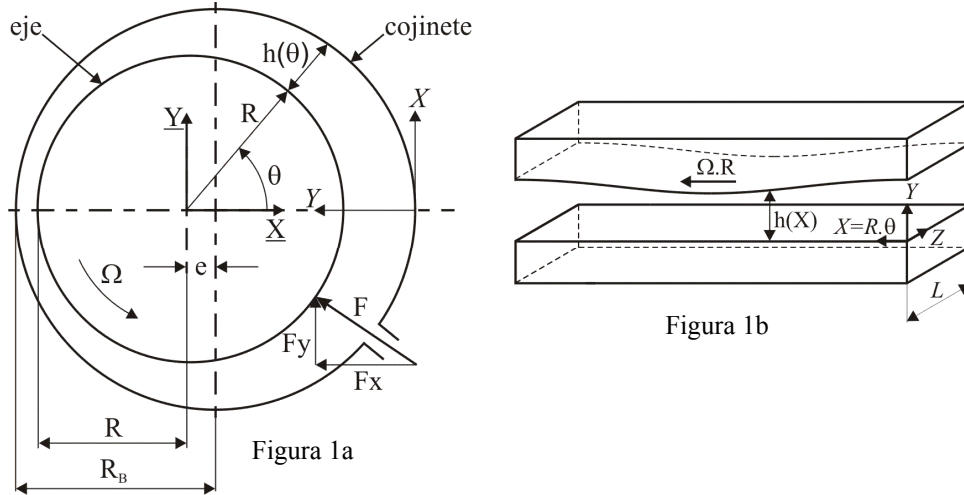


Figura 1: Geometría de un cojinete hidrodinámico (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b). Al despreciarse la curvatura, la coordenada X puede considerarse como  $R\theta$ .

**2.1 Análisis dimensional**

Si se considera que el fluido es Newtoniano, con densidad,  $\rho$ , y capacidad calorífica,  $C_v$ , constantes, y que el huelgo,  $c=R_B-R$ , entre el eje y el cojinete es varios órdenes de magnitud menor que el diámetro,  $D=2R$ , los términos dominantes de las ecuaciones de conservación adimensionales son:

$$\text{Balance de Masa: } 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1}$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (\Theta): 0 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \frac{\mu_{(T)}}{\mu_0} \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (y): 0 = -\frac{L^2}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{(T)}}{\mu_0} \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (z): 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_{(T)}}{\mu_0} \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{4}$$

$$\text{Balance de Energía: } \left( \frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\mu_{(T)}}{\mu_0} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \tag{5}$$

donde  $\lambda = \frac{kR}{Uc^2\rho C_v}$ ,  $k$  es la conductividad del fluido,  $U$  la velocidad tangencial del eje y  $\mu_{(T)}$  es la ley de variación de la viscosidad con la temperatura. En este caso se adopta la Ley de Vogel, definida como:

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)} \quad (6)$$

que puede reescribirse de la forma

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)} = \mu_0 e^{-\beta_0 T_{REF}} = \mu_0 e^{-\kappa_1 t} \quad (7)$$

donde  $\kappa_1 = \beta_0 T_{REF} = \beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2$  se conoce como “parámetro adimensional de aumento de temperatura”,  $\mu_0$  es la viscosidad de referencia y  $\beta_0$  es una constante que depende del fluido.

Las variables adimensionales se definen como:

$$p = \frac{P - P_0}{P_{REF}} \quad \text{con} \quad P_{REF} = \frac{\mu_0 U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2, \quad t = \frac{T - T_0}{T_{REF}} \quad \text{con} \quad T_{REF} = \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{c}\right)^2, \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{X}{\pi R}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad u = \frac{V_\Theta}{U}, \quad v = \frac{V_y}{U} \frac{R}{c}, \quad \text{y} \quad w = \frac{V_z}{U} \frac{R}{L}$$

Si se considera el flujo isotérmico de lubricante (derivadas de la temperatura nulas) el Balance de Cantidad de Movimiento en dirección  $y$  es de orden de magnitud  $c^2/R^2$  si se lo compara con, por ejemplo, el balance en la dirección  $\Theta$ , por lo que podría asumirse que la presión es prácticamente independiente de la coordenada  $y$ . No obstante si se considera la variación de temperatura dentro de la película fluida, dicho balance debe ser tenido en cuenta dado que el coeficiente adimensional  $\kappa_1$  puede modificar el orden de magnitud de la ecuación, ya que:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + e^{-\kappa_1 t} \left( \beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Claramente puede observarse que la dependencia de la presión con  $y$  cobra importancia a medida que la relación  $(R/L)^2$  aumenta. Esta consideración suele obviarse en el análisis termo-hidrodinámico de cojinetes ya que, por lo general, se trabaja con la ecuación de Reynolds Generalizada, la cual no contempla la ecuación de conservación en la dirección  $y$  (Mitsui, 1987).

En este trabajo se considera el conjunto completo de ecuaciones, incluyendo el Balance de Cantidad de Movimiento en la dirección  $y$ , con la finalidad de determinar la relevancia de las variaciones de la presión en el espesor.

## 2.2 Condiciones de Borde

El problema queda parcialmente determinado por las condiciones de borde sobre las superficies del eje ( $y = \tilde{h}$ ) y del cojinete ( $y = 0$ ) para las componentes de la velocidad, y por la presión exterior al sistema, y la presión y temperatura de suministro de lubricante, esto es:

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\tilde{h}} = 1, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=\tilde{h}} = \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta}, \quad w|_{y=0} = 0, \quad (10)$$

$$w|_{y=\tilde{h}} = 0, \quad p|_{\Theta=0} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad t|_{\Theta=0}, y \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=1/2} = 0$$

donde  $\tilde{h}$  es el espesor de película adimensional. Para el caso de eje y cojinete alineados (ejes paralelos) dicho espesor se define como:

$$\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos(\pi\Theta) \quad (11)$$

siendo  $\varepsilon = \frac{e}{c}$  la excentricidad relativa.

Para completar la formulación del problema, es necesario definir el mecanismo de transmisión de calor entre el lubricante y las paredes que lo contienen, el cual puede expresarse de diversas formas. Hay cierta cantidad de calor que se transmite desde el lubricante al cojinete, el cual es conducido por el cuerpo de éste hasta alguna interfase en la que otro fluido lo recibe y transporta (aire del ambiente o fluido de refrigeración). En general, el valor de este flujo de calor suele ser pequeño si se lo compara con el que es transportado por convección por el mismo lubricante. Por ello, en este trabajo se considera que el cojinete es adiabático.

Del otro lado de la capa lubricante se encuentra la superficie del muñón. Dado que éste se mueve a alta velocidad tangencial y que la conductividad del eje suele ser elevada comparada con la del lubricante, puede asumirse que el muñón es isotérmico. Esto se debe a que un mismo punto de la superficie atraviesa zonas de distinta temperatura en un breve lapso de tiempo. Se puede considerar que alcanza una temperatura “media” de la vuelta,  $T_M$ . Bajo estas consideraciones, se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad t|_{y=\tilde{h}} = t_M \quad (12)$$

donde  $t_M$  es la temperatura adimensional media alcanzada por el fluido sobre la superficie del eje.

Por otra parte, ya sea que se considere flujo isotérmico o no-isotérmico, debe considerarse el hecho de que el fluido lubricante no puede soportar presiones menores a su presión de vapor. Por ello, se requiere especificar el mecanismo empleado para contemplar la cavitación. La región en la que se manifiesta este fenómeno puede abarcar gran parte de la película fluida, y llega a alterar sensiblemente el comportamiento del sistema eje-cojinete. Existen varios modelos para considerar el efecto de cavitación, siendo los más usuales en grado de complejidad creciente, los de Gumbel, Reynolds (Girón y Cortínez, 2003), Mori (Mori *et al.*, 1968) y Elrod-Adams (Girón y Cortínez, 2003; Ausas *et al.*, 2007, 2009). Si bien sólo el último de ellos conserva la masa de fluido en la interfase entre fluido presurizado (sin cavitación) y fluido a presión de vapor (con cavitación), el de Reynolds (que es significativamente más sencillo de manejar numéricamente) permite obtener resultados similares al de Elrod-Adams para muchos casos (Ausas *et al.*, 2009), por lo que es el empleado en este trabajo. El modelo de Reynolds establece que para una posición  $\Theta = \Theta_{cav}$  (a determinar) se cumple que

$$p = 0 \quad (P = P_{cav}), \text{ y } \frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

La explicación del buen comportamiento de este modelo simple, surge de contemplar la continuidad del flujo en la frontera entre la zona sin y con cavitación.

Si se emplease la ecuación de Reynolds para resolver el flujo isotérmico de lubricante en estado estacionario, los caudales circunferencial y axial de fluido por unidad de ancho en la

citada interfase quedarían determinados por (Childs, 1993):

$$q_{\Theta} = \frac{U}{2}ch - \frac{c\tilde{h}^3U}{12\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta}$$

$$q_z = -\frac{c\tilde{h}^3U}{12} \left(\frac{L}{R}\right) \frac{\partial p}{\partial z}$$
(14)

El primer término en  $q_{\Theta}$  es el debido al flujo Couette. El caudal  $q_z$  y el segundo término de  $q_{\Theta}$  son inducidos por el gradiente de presión dentro del fluido. En la zona antes de la interfase, la presión va disminuyendo conforme aumenta  $\Theta$  hasta el valor límite  $P = P_{cav}$ . Por lo tanto,  $\frac{\partial p}{\partial \Theta} < 0$  y  $q_{\Theta} > \frac{U}{2}ch$ . No obstante, dentro de la zona con cavitación, la presión es constante,  $\frac{\partial p}{\partial \Theta} = 0$ , y  $q_{\Theta} \leq \frac{U}{2}ch$ . De esta manera, se produce una discontinuidad en el flujo de orden  $\frac{cU}{12\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2$  en la frontera donde comienza la cavitación. Un argumento similar puede elaborarse para  $q_z$ . Así, para asegurar la continuidad del flujo en la interfase, se requiere la nulidad de las derivadas de la presión en la frontera, y bajo estas circunstancias (régimen estacionario, fluido isotérmico) la condición de borde de Reynolds es apta.

Cabe comentar que la discontinuidad de flujo citada es proporcional a la relación de aspecto (en forma lineal para  $q_z$ , y cuadrática para  $q_{\Theta}$ ). Este hecho justifica el empleo de la condición de borde de Gumbel ( $1 \leq \Theta < 2 \rightarrow p = 0$ ) en el caso de cojinetes cortos, ya que la citada discontinuidad tiende a anularse cuando  $\frac{L}{R} \rightarrow 0$ . Por este motivo, la solución de Ocvirk, la cual admite sólo la condición de Gumbel para considerar la cavitación, arroja buenos resultados cuando el valor que toma la relación de aspecto se mantiene acotado.

### 3 MÉTODO NUMÉRICO

La solución numérica del problema planteado es compleja debido al acoplamiento de las ecuaciones. En este trabajo se emplea el método de diferencias finitas en las coordenadas circunferencial y axial. Para ello se requiere emplear una transformación del sistema de coordenadas físico ( $\Theta - y - z$ ), a uno computacional ( $\xi - \eta - z$ , respectivamente) en el cual el dominio queda determinado por un prisma rectangular. El procedimiento de generación de la grilla, el cual emplea ecuaciones elípticas tipo Poisson, se detalla en Vignolo *et al.*, 2009.

El algoritmo elaborado considera diferencias centrales en los nodos interiores y diferencias hacia adelante y hacia atrás de orden dos en los extremos (Failla *et al.*, 1996). El sistema resultante consiste de N ecuaciones diferenciales ordinarias en la coordenada  $\eta$ , donde N es el producto del número de variables por nodo por el número total de nodos. En este caso, se trabaja con ocho variables por nodo:  $u, v, w, t, \partial u / \partial \eta, \partial w / \partial \eta, \partial t / \partial \eta$  y  $p$ . Dado que las ecuaciones de conservación brindan sólo cinco de las ocho ecuaciones necesarias, se definen tres ecuaciones adicionales “triviales” para las tres nuevas variables  $\partial u / \partial \eta, \partial w / \partial \eta$  y  $\partial t / \partial \eta$ .

El sistema de ecuaciones resultante se resuelve como un “problema de valor de frontera en dos puntos” por el método de Gear (Pozrikidis, 1998) acoplado a una técnica de shooting. Si

bien podrían haberse empleado otras técnicas en reemplazo de Gear (como por ejemplo, Runge-Kutta) y/o métodos de relajación en lugar de shooting, experiencias previas del grupo de trabajo han determinado que esta combinación ofrece muy buena estabilidad y convergencia para situaciones como la estudiada (Failla *et al.*, 1996). No obstante, tanto en el análisis del sistema isotérmico presentado previamente (Vignolo *et al.*, 2009) como en el no-isotérmico aquí desarrollado, el esfuerzo computacional requerido para encontrar la solución ha sido considerable.

Del estudio de los tiempos involucrados en cada etapa de la ejecución del algoritmo surge que el paso controlante del mismo está relacionado con el mecanismo de shooting. En la siguiente sección se desarrolla este método y las variantes estudiadas para agilizar su ejecución.

### 3.1 Método de Shooting

En el método de “shooting” se eligen valores para todas las variables dependientes en un borde. Esos valores deben ser consistentes con las condiciones de borde para esa frontera, pero por otro lado son dependientes de parámetros arbitrarios libres cuyos valores deben ser “aleatoriamente” estimados. Luego se integran las ODEs por métodos de valor inicial, arribando al otro borde (y/o cualquier punto interior con condiciones de borde especificadas). En general, se encuentran discrepancias respecto de las condiciones de bordes en esa frontera. En esa instancia, se tiene un problema multidimensional de búsqueda de raíces: encontrar el ajuste para los parámetros libres en el punto inicial de manera tal que se anulen las discrepancias en la otra frontera. Este método provee una aproximación metódica a un conjunto de “disparos” que permiten aproximarse al “blanco” sistemáticamente (Press *et al.*, 1992).

La etapa dentro del método que insume mayor cantidad de tiempo es la de la determinación de los valores iniciales luego de un paso de cálculo, para acercarse al blanco en el paso siguiente. Existen varias técnicas para la citada búsqueda multidimensional de raíces, de las cuales se describen a continuación aquellas que fueron consideradas las más convenientes. Estas técnicas fueron implementadas y comparadas en su desempeño. Asimismo, se presenta el tratamiento del problema como una optimización multidimensional, en la que se busca minimizar una función relacionada con las citadas discrepancias.

### 3.2 Búsqueda multidimensional de raíces

Un sistema de  $n$  ecuaciones no lineales con  $n$  incógnitas tiene la forma,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Este sistema puede representarse también mediante una función vectorial  $\vec{F}$  por medio de,

$$\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t.$$

Con esta notación, el sistema a resolver adopta la forma  $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ .

La principal herramienta para determinar raíces de  $\vec{F}$  es el Método de Newton para sistemas

no lineales, una técnica que por lo general converge en forma cuadrática, siempre y cuando se conozca un valor inicial suficientemente preciso y exista  $J(p)^{-1}$ , donde

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

es la matriz Jacobiana (Burden & Faires, 2002).

El procedimiento de iteración funcional pasa de seleccionar  $\bar{x}^{(0)}$  a generar, para  $k \geq 1$ ,

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{x}^{(k-1)} - J(\bar{x}^{(k-1)})^{-1} \vec{F}(\bar{x}^{(k-1)}) \quad (17)$$

Un punto débil importante del método de Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es el requisito de que, en cada iteración, es necesario calcular una matriz Jacobiana y resolver un sistema lineal de  $n \times n$  que la contiene. La matriz Jacobiana asociada a un sistema de  $n$  ecuaciones no lineales escritas en la forma  $\vec{F}(\bar{x}) = 0$  requiere determinar y evaluar  $n^2$  derivadas parciales de las  $n$  funciones componentes de  $\vec{F}$ . La determinación de la matriz Jacobiana puede ser analítica o numérica. En el primer caso, el usuario la introduce manualmente luego de calcular manualmente todas y cada una de las derivadas que la componen. En el segundo, se emplean diferencias para aproximar a las derivadas, y se calculan numéricamente. La magnitud del problema y la necesidad de que el método de resolución sea independiente del sistema de ecuaciones empleado, restringe en este trabajo el uso de derivadas analíticas, calculándose las mismas de forma numérica a expensas del esfuerzo computacional que ello implica. Así, el tiempo de cálculo requerido para determinar la matriz Jacobiana es el paso controlante del algoritmo. Por ello se han analizado variantes que permitan resolver el problema, en lo posible, sin la necesidad de cálculo de la matriz Jacobiana, o bien con un número menor de matrices Jacobianas calculadas antes de lograr convergencia.

Una alternativa para disminuir los cálculos es el empleo del Método de la Secante generalizado a los sistemas no lineales, conocido como Método de Broyden. Este método requiere sólo  $n$  evaluaciones de funciones escalares por iteración y reemplaza la matriz Jacobiana,  $J$ , del método de Newton con una matriz de aproximación,  $A$ , que se actualiza en cada iteración. Así, el procedimiento de iteración se convierte en,

$$\bar{x}_{(i)} = \bar{x}_{(i-1)} - A_i^{-1} \vec{F}(\bar{x}_{(i-1)}), \quad (18)$$

donde



$$\begin{aligned}
 A_i &= A_{i-1} + \frac{(\bar{y}_i - A_{i-1}\bar{s}_i)\bar{s}_i^t}{\bar{s}_i \cdot \bar{s}_i^t}, \\
 \bar{y}_i &= \vec{F}(\bar{x}_i) - \vec{F}(\bar{x}_{i-1}), \quad y \\
 \bar{s}_i &= \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}
 \end{aligned} \tag{19}$$

La principal desventaja del Método de Broyden radica en que se pierde la convergencia cuadrática de Newton.

Para inicializar el método, se requiere el empleo de una matriz inicial  $A_0$ . En general, se emplea  $A_0=J_0$ , lo que implica el cálculo de la matriz Jacobiana en el paso inicial. Una alternativa válida es el empleo de  $A_0=I$ , pero el método pierde convergencia (Biegler, 2000). Ambas variantes ( $A_0=J_0$  y  $A_0=I$ ) fueron implementadas, lográndose convergencia con los valores iniciales probados, sólo con el primero de ellos. El tiempo requerido de cálculo, a pesar de necesitar mayor cantidad de iteraciones que el método de Newton original, fue sensiblemente menor.

En particular, en el algoritmo de Broyden implementado se hizo uso de un método sencillo de control en la actualización de  $A$ , propuesto por Broyden (Dahlquist *et al.*, 1974). Éste consiste en agregar un escalar,  $s_k$ , en la Ec. (19), de modo que:

$$\bar{x}_{(i)} = \bar{x}_{(i-1)} - s_k A_i^{-1} \vec{F}(\bar{x}_{(i-1)}) \tag{20}$$

donde el valor que adopta  $s_k$  es igual a la unidad si la norma euclídea de  $\vec{F}(\bar{x}_{(i)})$  es menor a la de  $\vec{F}(\bar{x}_{(i-1)})$ . De lo contrario,

$$s_k = \frac{(1+6\alpha)^{1/2} - 1}{3\alpha}, \text{ donde } \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{F}(\bar{x}_{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^n (\vec{F}(\bar{x}_{(i-1)}))^2}. \tag{21}$$

### 3.3 Optimización Multidimensional

La aplicación de los métodos de optimización multidimensional se limita a la búsqueda del óptimo de una función multivariable, la que puede ser generada a través de los “residuos” de un sistema de ecuaciones multivariable. Así, en la búsqueda de la solución del sistema  $\vec{F}(\bar{x})=0$ , se pasará por  $j$  iteraciones sucesivas en las que  $\vec{F}(\bar{x})=\vec{R}^j$ , donde  $\vec{R}^j$  es el “residuo” resultante de la iteración  $j$ . Si el algoritmo converge,  $\vec{R}^j \rightarrow 0$  a medida que  $j \rightarrow \infty$ . Si en cada iteración, se definiese una función  $g^j(\bar{x})$  relacionada con  $\vec{R}^j$ , podría lograrse que  $\vec{R}^j \rightarrow 0$  a medida que  $g^j(\bar{x}) \rightarrow \text{óptimo}$ . Por ejemplo, si se define

$$g^j = \sum_{i=1}^n (R_i^j)^2 \tag{22}$$

claramente se cumple la citada relación, y pueden emplearse estos métodos de optimización a  $g^j(\bar{x})$ .

Al igual que lo descrito para búsqueda de raíces, las técnicas para la optimización multidimensional sin restricciones se pueden clasificar según requieran (métodos gradiente) o

no (métodos directos) la evaluación de la derivada (Chapra & Canale, 2006). Entre los primeros, puede citarse al método de Newton y sus variantes, que se basan en aplicar el método de Newton previamente mostrado a un sistema  $\vec{G}(\vec{x})=0$ , tal que  $\vec{G}=\vec{\nabla}g$ . Así, al buscar los ceros de las derivadas de la función, se obtiene un óptimo. El procedimiento de iteración se convierte en,

$$\vec{x}^{(i)} = \vec{x}^{(i-1)} - H_i^{-1} \vec{\nabla}g(\vec{x}^{(i)}), \quad (23)$$

donde  $H$  es la matriz Hessiana, definida como

$$H(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Este método converge en forma cuadrática cerca del óptimo, pero requiere tanto el cálculo de las segundas derivadas como la inversión de  $H$  en cada iteración.

Los métodos directos varían desde procedimientos de fuerza bruta simple, a técnicas más elegantes que intentan explotar la naturaleza de la función. En esta instancia se considera provechosa la evaluación de ambos extremos. Entre los procesos de fuerza bruta, resulta de interés el método implementado en la rutina DUMPOL de la librería IMSL, mientras que entre los más elaborados resultan de interés el método de Powell (Chapra & Canale, 2006).

La rutina DUMPOL emplea el algoritmo politopo para encontrar el punto mínimo de una función  $g(x)$  de  $N$  variables. El método del politopo se basa en la comparación de funciones sin asumir suavidad. Comienza con  $N+1$  puntos,  $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ . En cada iteración, un nuevo punto es generado para reemplazar el peor punto  $x_j$ , el cual tiene el mayor valor de la función entre esos  $N+1$  puntos. El procedimiento avanza garantizando que cada  $x_j$  es reemplazado por un  $x_k$  tal que  $g(x_k) < g(x_j)$  hasta que se alcanza el criterio de convergencia. Dado que esta rutina usa sólo información de evaluación de la función en cada paso para determinar una nueva aproximación al mínimo, puede ser muy ineficiente comparado con otros métodos que hacen uso de información de la forma de la función (Visual Numerics, 1997). De hecho, el tiempo de cálculo empleado por esta rutina fue de varios órdenes de magnitud mayor comparada con, por ejemplo, el método de Newton.

El método de Powell capitaliza el concepto de búsqueda mediante direcciones conjugadas. En efecto, puede demostrarse que si la función es cuadrática, las búsquedas secuenciales a lo largo de las direcciones conjugadas convergerán exactamente (y de forma cuadrática) en un número finito de pasos, independientemente del punto de partida. Este método (o sus variantes) es recomendado cuando el cálculo de las derivadas es tedioso ya que no son necesarias para su ejecución (Press et. al., 1992; Chapra & Canale, 2006).

Las pruebas realizadas fueron ejecutadas empleando el paquete NEWUOA (NEW Unconstrained Optimization Algorithm) (Powell, 2007). El propósito de NEWUOA es minimizar una función multivariable mediante un método de región de confianza que forma modelos cuadráticos por interpolación.

NEWUOA es un desarrollo del paquete UOBYQA (Powell, 2002), el cual no es propicio para problemas de gran número de variables,  $N$ , dado que los modelos cuadráticos de UOBYQA se construyen por interpolación de  $(N+1)(N+2)/2$  valores de la función objetivo. El número de condiciones de interpolación en NEWUOA es un parámetro (cuyo valor recomendado es  $2N+1$ ), que reduce la magnitud de trabajo de la rutina de  $N^4$  a un valor entre  $N^2$  y  $N^3$ . De esta manera, NEWUOA ha sido probado exitosamente en la bibliografía para resolver problemas de hasta 200 variables. En las pruebas realizadas para el sistema presentado en este trabajo, el método funcionó correctamente con 270 variables, aunque el tiempo de cálculo fue sensiblemente mayor al empleado por los métodos indirectos mencionados. No obstante, esta herramienta presenta muy buen potencial para problemas de menor envergadura.

En lo referente al estudio de tiempos de cómputo de los métodos numéricos presentados (Newton, Broyden, Powell y fuerza bruta) para determinar el “disparo” en cada paso hasta cumplir las condiciones de borde en ambas paredes, un esquema tipo Broyden resultó ser el menos demandante computacionalmente. No obstante, resulta difícil cuantificar la “eficiencia” de cada uno de ellos ya que las pruebas se hicieron sobre el mismo CPU, pero no siempre se mantuvo la carga del mismo constante debido al uso de otras aplicaciones en simultáneo. Por ello es que se ha comentado el desempeño de cada uno de manera cualitativa y comparando los órdenes de magnitud de los tiempos de cálculo.

#### 4 RESULTADOS

A continuación se presentan perfiles de temperatura y presión adimensionales correspondientes a un cojinete con las características que se detallan en la Tabla 1 (Mitsui, 1987). Mitsui efectuó mediciones experimentales de presión y temperatura en un banco de ensayos de cojinetes hidrodinámicos, empleando tres tipos de aceites minerales diferentes como fluido lubricante. Asimismo, desarrolló un algoritmo de diferencias finitas para modelar el desempeño termo-hidrodinámico de los cojinetes ensayados, acoplado a la ecuación de Reynolds Generalizada con el balance de energía. De las diversas configuraciones de flujo presentadas, la Tabla 1 muestra la seleccionada para la comparación.

|               |                       |
|---------------|-----------------------|
| L/D           | 0,7                   |
| R/C           | 637                   |
| L             | 0,7m                  |
| $\beta_0$     | 0,029/K               |
| N             | 2250 RPM              |
| $T_0$         | 44 °C                 |
| $\varepsilon$ | 0,44                  |
| $\mu_0$       | 0,0192 Pa.s           |
| $\rho$        | 859 Kg/m <sup>3</sup> |
| $C_v$         | 1970 J/Kg K           |

Tabla 1: Características del cojinete estudiado

En la Figura 2 se presenta la evolución de la temperatura adimensional sobre la superficie del cojinete,  $t_c$ , (en la mitad de su longitud) obtenida mediante el algoritmo presentado, referenciada como THD. A modo de comparación, se muestran resultados experimentales (Mitsui, 1987) y predicciones de la temperatura adimensional media y sobre la superficie del cojinete, en función de la coordenada tangencial (Mitsui, 1987; Vignolo *et al.*, 2008), referenciados de modo que se cumpla que para  $\Theta = 0$ ,  $t = 0$ . En concordancia con las

hipótesis empleadas en esta etapa, puede verse que los valores obtenidos mediante el algoritmo presentado son mayores a los reportados por Mitsui, lo cual es consistente con el hecho que no se ha considerado transferencia de calor entre el fluido y el cojinete. Asimismo, se observa que las predicciones de temperatura obtenidas con modelos simplificados, basados en el uso de una temperatura media en el espesor,  $t_b$ , (Vignolo *et al.*, 2008) se muestran más cercanas a los resultados actuales dado que en éstos se han considerado las mismas condiciones de borde térmicas. Asimismo, puede concluirse que con estos modelos sumamente sencillos y de muy baja carga computacional, se logra captar razonablemente el comportamiento termo-hidrodinámico del cojinete estudiado.

Otro efecto relacionado con la transferencia de calor considerada entre el lubricante y el cojinete es el valor de temperatura alcanzada sobre el rotor. Mitsui propone una temperatura constante sobre el mismo calculada en función de la cantidad de calor que es capaz de evacuar el eje por sus extremos. En el algoritmo presentado, así como en los modelos simplificados citados (Vignolo *et al.*, 2008), se asume que la temperatura del rotor es igual a la temperatura media del fluido, en todo el dominio (Ionescu, 2005).

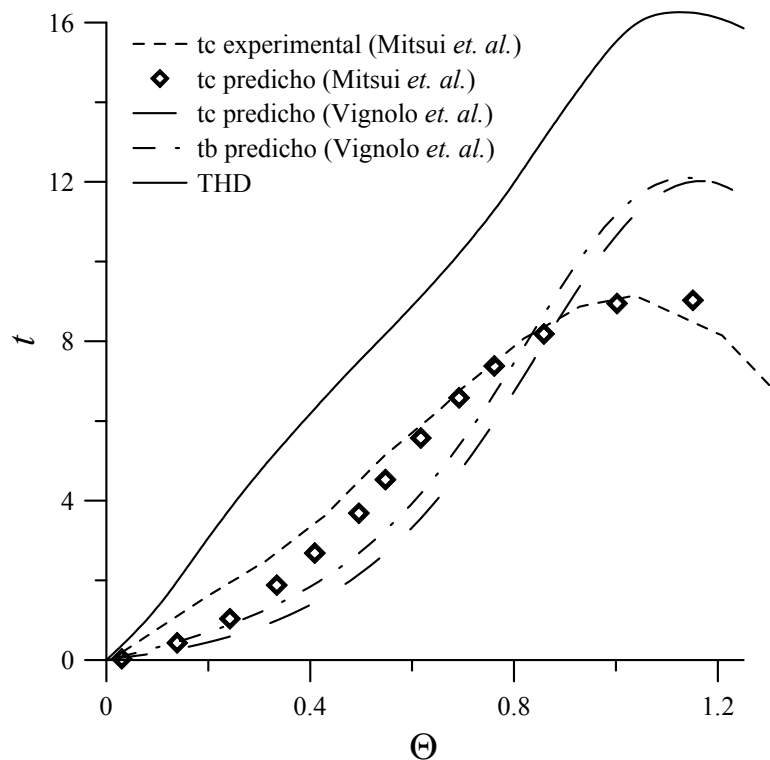


Figura 2: Evolución de la temperatura adimensional en función de la coordenada tangencial adimensional.

En la Figura 3 se analiza los perfiles radiales de temperatura y presión para distintas posiciones  $\Theta$  (en la mitad de la longitud del cojinete). Puede apreciarse que se cumple la imposición de derivada nula de la temperatura en la pared del cojinete. No obstante, a pesar de lo expresado en la Ec. (9), y de los valores significativos alcanzados por la derivada de la temperatura que pueden verse, la presión se mantiene prácticamente constante en el espesor, ya que  $\kappa_1$  toma un valor muy pequeño, de  $7,8 \times 10^{-3}$  en este caso en particular. Esto implica que, para esta geometría y propiedades de lubricante, el empleo de la Ecuación de Reynolds no-isotérmica es perfectamente adecuado.

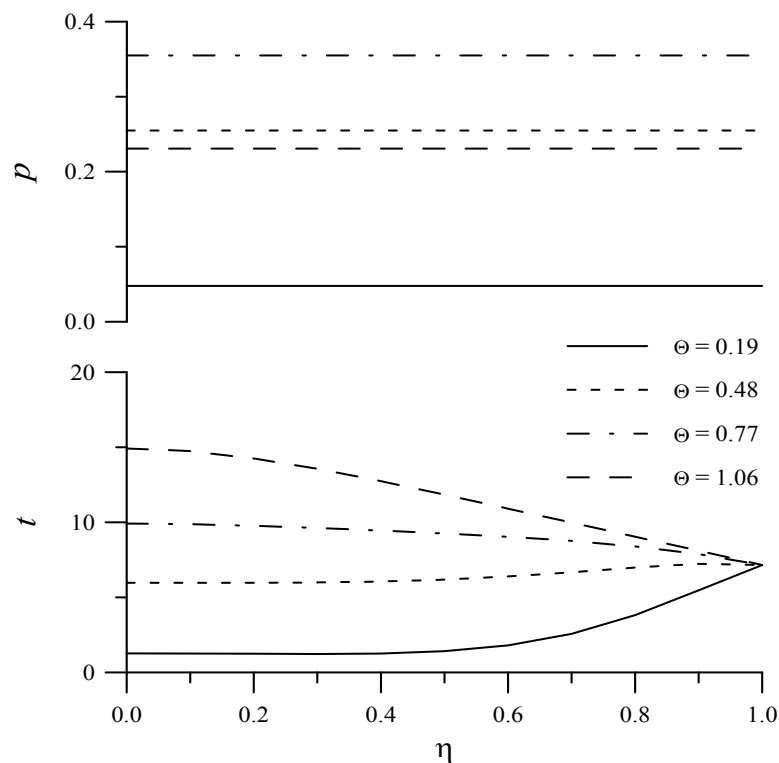


Figura 3: Perfiles de presión y temperatura adimensionales en el espesor, para distintas coordenadas tangenciales

## 5 CONCLUSIONES

En esta etapa del trabajo sistemático que se viene llevando a cabo (Vignolo *et al.*, 2007, 2008, 2009) para contar con herramientas analíticas y numéricas para el análisis de cojinetes en condiciones reales de uso, se ha extendido un desarrollo previo en Visual Fortran para resolver las ecuaciones de conservación en la película fluida de cojinetes hidrodinámicos no-isotérmicos. Asimismo, se han analizado variantes en los métodos de resolución para acotar los tiempos de cálculo. Un esquema tipo Broyden para el cálculo de los valores iniciales en cada “disparo” resultó ser el menos demandante computacionalmente.

Las predicciones de este código concuerdan con las hipótesis empleadas al compararlas con soluciones y datos experimentales previos. La estructura del programa admite modificaciones para seguir incorporando variantes que acerquen más las simulaciones a situaciones reales.

## REFERENCIAS

- Ausas, R., Jai, M. and Buscaglia, G., A Mass-Conserving Algorithm for Dynamical Lubrication Problems with Cavitation, *Journal of Tribology*, 131: 031702 (7 pgs.), 2009.
- Ausas, R., Ragot, P., Bayada, G., Buscaglia, G., Ciuperca, I. and Jai, M., Avances en la Simulación Numérica de Lubricación Hidrodinámica y el Diseño de Superficies Óptimas, *Mecánica Computacional*, XXVI:1921-1942, 2007.
- Biegler, L.T., *Class Notes: Systems of Nonlinear Equations, Part II*, Chemical Engineering Department, Carnegie Mellon University, <http://dynopt.cheme.cmu.edu>, 2000.
- Burden, R.L., and Faires, J.D., *Análisis Numérico*, Thomson Learning, 2002.
- Chapra, S.C., and Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*. McGraw Hill, 2006.
- Childs, D., *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis*, Wiley-

- Interscience, 1993.
- Dahlquist, G., and Björck, A., *Numerical Methods*, Prentice-Hall, 1974
- Elrod, H.G. and Brewe, D.E., Thermohydrodynamic Analysis for Laminar Lubricating Films, *Tribology Series*, 11:443-450, 1987.
- Failla, M., Sarmoria, C., Villar, M., Brandolin, A., and Quinzani, L., Extrusion of Polymeric Films from a Planar Die., *Actas del 5° Simposio Latinoamericano de Polímeros (SLAP'96) y 3° Simp. Iberoamericano de Polímeros (SIAP)*, 381-382, 1996.
- Girón, P. and Cortínez, V., Una Generalización de la Ecuación de Reynolds Para el Análisis de Problemas de Lubricación en Cojinetes, *Mecánica Computacional*, XXII:1399-1410, 2003.
- Ionescu, M. G. & Ionescu, V-C. M., An Approximate Analytical Model of Thermohydrodynamic Estimation of Finite Length Journal Bearings, *Proceedings of WTC2005*, 2005.
- Mitsui, J., A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribology International*, 20:331-341, 1987.
- Mori, H., Yabe, H. and Fujita, Y., On the Separation Boundary Condition for Fluid Lubrication Theories of Journal Bearings. *ASLE Transactions*, 11:196-203, 1968.
- Pinkus, O., Anisothermal Fluid Film in Tribology, *Israel Journal of Technology*, 22: 120-141, 1984
- Pinkus, O., Theory of Hydrodynamic Lubrication, McGraw Hill, 1961.
- Powell, M., *Developments of NEWUOA for unconstrained minimization without derivatives*, Cambridge University, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Numerical Analysis Group, Report NA2007/05, 2007.
- Powell, M., UOBYQA: unconstrained optimization by quadratic approximation", *Math. Programming*, 92: 555-582, 2002.
- Pozrikidis, C., *Numerical Computation in Science and Engineering*, Oxford University Press, 1998.
- Press, W., Flannery, B., Teukolsky, W. and Vetterling, W., *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O. and Quinzani, L.M., Análisis Termohidrodinámico de Cojinetes Cortos, *Mecánica Computacional*, XXVII, 1755-1765, 2008.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O. and Quinzani, L.M., Determinación Numérica de Parámetros Físicos en la Película Fluida de Cojinetes Hidrodinámicos, *Mecánica Computacional*, XXVIII: 1689-1702, 2009.
- Visual Numerics, *IMSL® Fortran Numerical Math Library*, 1997.