

INTEGRACIÓN DE LA TÉCNICA DE MALLA COMPUESTA CON EL MÉTODO MULTIGRILLA

Sofía S. Sarraf^a, Marta B. Bergallo^b and Victorio E. Sonzogni^c

^aDpto. Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires
1400, 8300 Neuquén, Argentina, sssarra@gmail.com.

^bDpto. Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, 3000 Santa Fe,
Argentina, mbbergallo@gmail.com.

^cCentro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC-CONICET,
Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, sonzogni@intec.unl.edu.ar,
<http://www.cimec.org.ar>

Keywords: Malla Compuesta, Elementos Finitos, Multigrilla.

Abstract. En el presente trabajo se presenta una integración de las técnicas de Malla Compuesta y Multigrilla aplicadas a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales elípticas. Una malla compuesta de elementos finitos es utilizada no solo para la estimación del error de discretización sino también para obtener soluciones mejoradas sin incrementar en forma apreciable el costo computacional.

Dadas dos mallas de elementos finitos con nodos en común, donde cada una posee diferente orden del error de aproximación, adjudicando a cada malla la mitad de las propiedades físicas o geométricas, se obtiene un resultado global intermedio entre los resultados que se obtendrían con cada malla individualmente. Una de las ventajas de la composición de mallas radica en que puede tenerse una solución aproximada mejorada con respecto a la solución obtenida a partir del comportamiento individual de cada componente. Por otro lado, dado que los métodos Multigrilla resuelven sistemas lineales provenientes de distintos niveles de discretización, esta característica motiva el estudio de la aplicación de la estrategia Multigrilla en conjunto con la técnica de Malla Compuesta. En particular, se trabaja con una versión geométrica de la técnica Multigrilla. La propuesta se basa en una modificación de los operadores de algunos de los niveles del algoritmo Multigrilla con el objetivo de alcanzar no solo las ventajas de Multigrilla sino también la mejora de soluciones que provee la estrategia de Malla Compuesta. Se presentan problemas con solución analítica, donde se analizan las tasas de convergencia y se cuantifica el decrecimiento de los errores de discretización.

1 INTRODUCTION

En este trabajo se presenta la integración de la técnica de Malla Compuesta (MC) con la estrategia Multigrilla Brandt (1977) (MG). Dado el sistema lineal que proviene de la discretización de una ecuación diferencial mediante el método de elementos finitos, la técnica de Malla Compuesta propone reemplazar dicho problema con un nuevo operador discreto proveniente de la "mezcla" de dos mallas. Cada componente del mismo está asociada a una malla con distinto error de aproximación por lo tanto, una combinación lineal apropiada entre los operadores discretos asociados a cada grilla dará una solución nodalmente mejorada en comparación con la obtenida con cada malla individualmente, sin incrementar en forma considerable el costo computacional (Bergallo et al., 2000). El sistema lineal resultante obtenido con la técnica MC puede resolverse mediante un método directo o bien aplicando un método iterativo. Estos últimos, además de ser fáciles de implementar, poseen la propiedad de suavizado, que permite eliminar las componentes de alta frecuencia del error en las primeras iteraciones dejando las menos oscilatorias prácticamente inalteradas. Una aproximación para inicializar el algoritmo de relajación podría obtenerse llevando a cabo algunas iteraciones sobre una malla más gruesa debido a que tal proceso tiene menos variables a ser actualizadas y, más aún, tendrá una tasa de convergencia marginalmente mejorada (Briggs et al., 2000).

Asumiendo que se aplica un esquema de relajación hasta que sólo quedan las componentes de baja frecuencia del error, se observa cómo lucen esas componentes en una malla aún más gruesa que la primera. Dado que estas componentes son menos suaves en una grilla más gruesa, será necesario llevar a cabo una nueva relajación con el objetivo de reducir las. Con el interrogante de cómo moverse de una malla a otra y relajar, surgió la técnica Multigrilla (Briggs et al., 2000; Kim et al., 2004; Press et al., 1988-1992; Wesseling, 1992; Xu, 1995). La misma presenta la ventaja de reducir simultáneamente todas las componentes del error en las sucesivas iteraciones.

La propuesta de este trabajo está basada en la modificación de los operadores discretos de algunos de los niveles dentro del algoritmo Multigrilla con el objetivo de obtener no sólo la reducción simultánea de todas las componentes del error sino también la mejora nodal de la solución por medio del método de Malla Compuesta. En una primera instancia, se presentará una breve descripción del método Multigrilla y luego, se exhibirán algunos ejemplos de problemas elípticos con solución conocida con el fin de analizar las tasas de convergencia y la disminución en los errores de discretización.

2 ESTRATEGIA MULTIGRILLA

A continuación se desarrolla el esquema de Multigrilla para elementos finitos (FEM) en forma abstracta. En Sarraf et al. (2006) puede encontrarse el desarrollo de la técnica para un contexto de diferencias finitas.

Sea Ω un dominio acotado adecuado en \mathbb{R}^d con frontera $\partial\Omega$ y $d = 1, 2, 3$ las dimensiones espaciales. Considérese la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde homogéneas

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

Supóngase que el operador L es autoadjunto, es decir, que $(Lu, v) = (u, Lv)$ para cualesquiera $u, v \in H^1 \subset L_2(\Omega)$ y que es positivo en el sentido $(Lu, u) > 0$ para todo $u \in H^1$, $u \neq 0$, donde el subespacio H^1 contiene funciones suaves que se anulan en la frontera de Ω . Con estas propiedades, resolver la ecuación diferencial (1) resulta formalmente equivalente a minimizar

el funcional cuadrático

$$F(u) \equiv \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u), \quad u \in H \quad (2)$$

El problema puede reescribirse en forma compacta como

$$u = \arg \min_{v \in H^1} F(v) \quad (3)$$

es decir, el objetivo es hallar el argumento que minimiza a F sobre todas las funciones de H^1 .

Dada una triangulación Ω^h de Ω con tamaño h , sea H^{1h} el subespacio de H^1 de dimensión finita que consiste en las funciones v^h que se anulan en la frontera del dominio, son continuas en Ω y polinomiales dentro de cada elemento. El problema discreto se escribe del siguiente modo

$$u^h = \arg \min_{v^h \in H^{1h}} F(v^h) \quad (4)$$

Dado que el operador L es autoadjunto y positivo, los problemas que consisten en determinar la función $u \in H^1$ de manera que satisfaga (3) y $(Lu, v) = (f, v)$ para todo $v \in H^1$ son equivalentes. Luego, resolver (4) es equivalente a encontrar $u^h \in H^{1h}$ de manera que

$$(Lu^h, v^h) = (f, v^h) \quad \text{para todo } v^h \in H^{1h} \quad (5)$$

Para resolver en forma débil (5) se consideran las funciones de base φ_i^h para el espacio H^{1h} , de manera que $\varphi_i^h(N_j) = \delta_{ij}$, donde N_j son los nodos de Ω^h . Estas funciones de base se eligen como las funciones de prueba v^h . Luego, después de ensamblar todas las filas de la matriz y sus lados derechos correspondientes, se obtiene el sistema $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$.

Dadas dos mallas, donde la primera es un refinamiento uniforme de la segunda, la iteración de dos grillas es la base para la construcción del método Multigrilla. Resumiendo, la iteración está compuesta por los siguientes pasos:

- **Paso de pre-suavizado:** Se llevan a cabo unas pocas iteraciones de algún método iterativo como Gauss-Seidel o Jacobi amortiguado de manera tal de suavizar el residuo $\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \bar{\mathbf{u}}_h$, donde $\bar{\mathbf{u}}_h$ es una aproximación a la solución del sistema lineal. Este paso reducirá las componentes de alta frecuencia del error pero no reducirá completamente las de baja frecuencia. La reducción de los errores oscilatorios pueden llevarse a cabo mediante cambios locales de la siguiente manera: para cada $i = 1, 2, \dots$ calcular $\bar{u}_h \leftarrow \bar{u}_h - s_i \varphi_i^h$, donde $s_i \in \mathbb{R}$ es un tamaño de paso adecuado. El término s_i se elige de manera tal de minimizar el funcional sobre todas las elecciones posibles, es decir

$$s_i = \arg \min_{t \in \mathbb{R}} F(\bar{u}_h - t \varphi_i^h) \quad (6)$$

- **Corrección de la malla gruesa:** El residuo se proyecta sobre la malla gruesa, donde se resuelve la ecuación del error que minimiza las componentes de baja frecuencia. La formulación abstracta para este proceso es la siguiente: Sea $H^{1H} \subset H^{1h}$ el espacio asociado a la malla gruesa, es decir, el conjunto de funciones polinómicas a trozos asociadas con la malla gruesa estandar Ω^H . El objetivo es corregir la aproximación \bar{u}_h con una función $e_H \in H^{1H}$ que aproximará al nuevo error suave. La corrección es $\bar{u}_h \leftarrow \bar{u}_h + e_H$. La elección de e_H se hace con el objetivo de obtener la mejor corrección sobre la malla gruesa en el sentido de minimización del funcional, es decir

$$e_H = \arg \min_{w^H \in H^{1H}} F(\bar{u}_h + w^H) \quad (7)$$

- **Paso de prolongación:** La solución sobre la malla gruesa se transfiere a la fina, sobre la que se utiliza para mejorar la aproximación del primer paso.
- **Paso de post-suavizado:** Finalmente, la aproximación calculada en el último paso se suaviza para eliminar cualquier componente de alta frecuencia del error que haya quedado.

En el proceso de agregar una función $\bar{v}_H \in H^{1H}$ a otra $\bar{v}_h \in H^{1h}$ se pueden encontrar coeficientes adecuados que permitan escribir a \bar{v}_H como una función de H^h , ya que en general $H^H \subset H^h$. Esto es, se define un operador de interpolación \mathbf{P}_h como $\mathbf{v}_h = \mathbf{P}_h \mathbf{v}_H$ (véase [McCormick et al. \(2000\)](#)), donde \mathbf{v}_h y \mathbf{v}_H son vectores con los valores nodales de v_h y v_H respectivamente.

Para determinar la versión en la malla gruesa del operador \mathbf{A}_h , denominado \mathbf{A}_H , es necesario trabajar con los vectores nodales y transferir el principio de minimización a términos matriciales. Para ello, sean N_i con $i = 1, \dots, M$ los nodos de la malla Ω^h . Luego, resolver el sistema $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$ es equivalente a encontrar la solución al problema de minimización

$$\mathbf{u}_h = \arg \min_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{R}^M} F^h(\mathbf{v}_h) \quad (8)$$

donde $F^h(\mathbf{v}_h) \equiv (\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)/2 - (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h)$, siendo (\cdot, \cdot) es el producto interno estándar. De igual manera, el problema de la corrección en la malla gruesa es equivalente al principio de minimización matricial

$$\bar{\mathbf{u}}_H = \arg \min_{\mathbf{w}_H \in \mathbb{R}^{\bar{M}}} F^h(\bar{\mathbf{u}}_h + \mathbf{P}_h \mathbf{w}_H) \quad (9)$$

donde \bar{M} es el número de nodos de la malla gruesa Ω^H . Resulta entonces que minimizar $F^h(\bar{\mathbf{u}}_h + \mathbf{P}_h \mathbf{w}_H)$ es equivalente a minimizar $F^H(\mathbf{w}_H)$ sobre los vectores $\mathbf{w}_H \in \mathbb{R}^{\bar{M}}$, dado que $F^h(\bar{\mathbf{u}}_h + \mathbf{P}_h \mathbf{w}_H) = F^h(\bar{\mathbf{u}}_h) + F^H(\mathbf{w}_H)$.

Luego, llevando a cabo los cálculos correspondientes, se obtiene la versión de \mathbf{A}_h en la malla gruesa: $\mathbf{A}_H = \mathbf{P}_h^T \mathbf{A}_h \mathbf{P}_h$. La matriz \mathbf{P}_h^T toma un vector de la grilla fina y lo transforma en un vector en la grilla gruesa, es decir, es un operador de restricción (\mathbf{R}_h). Luego, tiene sentido pensar en $\mathbf{R}_h = \mathbf{P}_h^T$. Finalmente, sea $\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - \mathbf{A}_h \bar{\mathbf{u}}_h$ y $\mathbf{f}_H = \mathbf{R}_h \mathbf{r}_h$.

El algoritmo MG se obtiene aplicando la iteración de dos grillas recursivamente. Específicamente, el problema en la malla gruesa se resuelve por medio de una iteración de dos grillas con una malla más gruesa. El procedimiento se aplica en cada nivel de malla hasta que se obtiene una lo suficientemente gruesa para que el sistema lineal pueda resolverse con un método directo. Una iteración de MG desde la grilla más fina a la más gruesa y retornando a la más fina se denomina *ciclo*. La estructura exacta de un ciclo depende del valor γ , que es el número de iteraciones de dos grillas en cada paso intermedio. El caso $\gamma = 1$ se denomina ciclo V , mientras que $\gamma = 2$ es un ciclo W .

3 INTEGRACIÓN CON LA TÉCNICA DE MALLA COMPUESTA

Se propone la utilización de la técnica MC ([Bergallo et al., 2000](#)) junto con una estrategia Multigrilla. Resolviendo con la técnica CM un problema sobre dos mallas de elementos finitos con nodos en común, donde cada una posee diferente orden del error de aproximación, adjudicando a cada malla la mitad de las propiedades físicas o geométricas, se obtiene un resultado global intermedio entre los resultados que se obtendrían con cada malla individualmente. Una

de las ventajas de la composición de mallas radica en que puede tenerse una solución aproximada mejorada con respecto a la solución obtenida a partir del comportamiento individual de cada componente. La idea de esta integración es encontrar, dentro del esquema Multigrilla, dónde convendría utilizar la estrategia MC de manera tal de obtener una técnica que tenga las ventajas de cada método, es decir, una nueva estrategia Multigrilla que obtenga soluciones mejoradas en un sentido nodal.

3.1 Técnica de Malla Compuesta

La estrategia de Malla Compuesta de elementos finitos aplicada a problemas elípticos puede utilizarse para mejorar la solución numérica sin incrementar el costo computacional y también estimar el error de discretización (Bergallo et al., 2000; Sarraf et al., 2007; Sonzogni et al., 1996). En la versión h , el método consiste en reemplazar el operador discreto para una malla dada (malla fina), mediante una combinación lineal de los operadores calculados utilizando dicha malla y una más gruesa que tenga nodos en común con la primera. En esta versión, los polinomios de interpolación mantienen el mismo grado en ambas mallas. Luego, asumiendo que la malla fina se obtiene mediante un refinamiento isotrópico de una malla dada, la conexión entre los nodos se fuerza en los compartidos. El factor de participación de cada malla en el modelo de mezcla (coeficiente en la combinación lineal entre los operadores asociados a cada malla), se determina con el objetivo de minimizar el error de discretización.

Sea Ω^H una discretización del dominio Ω y sea Ω^h la malla obtenida mediante un refinamiento isotrópico de Ω^H . Las mallas Ω^h y Ω^H tienen tamaños de discretización h y H respectivamente. Aplicando FEM para discretizar el problema (1) se obtienen de las grillas Ω^h y Ω^H los sistemas $\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$ y $\mathbf{A}_H \mathbf{u}_H = \mathbf{f}_H$ respectivamente. Luego, se define el operador discreto \mathbf{A}_{Hh} como la matriz $\mathbf{A}_{Hh} = \mathbf{P}_h \mathbf{A}_H$, donde \mathbf{P}_h es un operador de prolongación adecuado. Se utiliza en este trabajo el operador de inyección (Briggs et al., 2000) para calcular \mathbf{A}_{Hh} . En forma análoga, se define el vector \mathbf{f}_{Hh} . La solución aproximada \mathbf{u}_{MC} mediante el método MC se obtiene del siguiente sistema (Sonzogni et al., 1996)

$$[\alpha \mathbf{A}_h + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{Hh}] \mathbf{u}_{MC} = \alpha \mathbf{f}_h + (1 - \alpha) \mathbf{f}_{Hh} \quad (10)$$

donde el coeficiente α depende de la regularidad de la solución del problema (Bergallo et al., 2000).

El error asintótico de la aproximación por FEM tiene la forma (Sonzogni et al., 1996)

$$\|u - u_h\| = Ch^p + \mathcal{O}(h^q) \quad (11)$$

donde C es una constante que no depende de h pero sí de u y su regularidad y también $q > p$. Luego, un análisis de extrapolación del error permite obtener la siguiente estimación (Bergallo et al., 2000; Sonzogni et al., 1996; Toro et al., 2005).

$$\alpha = \frac{(H/h)^p}{(H/h)^p - 1} \quad (12)$$

La mejora obtenida por el método MC con respecto a la solución mediante FEM sobre Ω^h se presenta en los valores nodales de la solución como veremos en los ejemplos que se presentan a continuación. Por lo tanto debe ser evaluada mediante una norma discreta del error. El interpolante $\pi_h u$ de u en el espacio H^{1h} se define como

$$\pi_h u(N_i) = u(N_i), \quad i = 1, \dots, M \quad (13)$$

Luego, la solución del sistema (10) es una mejor aproximación a $\pi_h u$ en H^{1h} que la solución u_h obtenida por FEM. Este hecho se verificará en los problemas resueltos. En los ejemplos, se lleva a cabo el análisis en las normas l^∞ ($\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_i |a_i|$) y euclídea ($\|\mathbf{a}\|_2 = (\sum_i a_i^2)^{1/2}$) para vectores. El vector error nodal \mathbf{e} se calcula como la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$ es el vector de valores nodales de la solución exacta y \mathbf{u}_h son los valores correspondientes a alguna aproximación a u en el espacio H^h .

3.2 Esquema de Multigrilla con Malla Compuesta

Como se comentó anteriormente, el principal objetivo es la integración de ambas estrategias para resolver problemas elípticos. Se supone que hay n niveles en cada iteración MG y que la malla correspondiente al nivel j -ésimo se obtiene del $(j - 1)$ -ésimo refinamiento uniforme de una malla inicial dada (correspondiente al nivel 1). Luego, se introducen m niveles de mezcla, $1 \leq m < n$, en los cuales los operadores lineales estándares del método MG se reemplazan por la combinación lineal propuesta en la estrategia MC. En el k -ésimo nivel de mezcla, $1 \leq k \leq m$, las mallas de los niveles $n - k + 1$ y $n - k$ toman parte de la composición. En otras palabras, para el nivel k , $\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_{n-k+1}$, donde \mathbf{A}_{n-k+1} es la matriz correspondiente al nivel $n - k + 1$, y \mathbf{A}_{Hh} se obtiene completando con ceros la matriz \mathbf{A}_{n-k} apropiadamente para alcanzar la dimensión de \mathbf{A}_{n-k+1} (ver ecuación (10)). En la figura 1 se presenta un esquema de la estrategia, en donde cada punto representa que se reemplazó la matriz correspondiente al nivel por la matriz que surge del método de malla compuesta, calculada entre el operador de dicho nivel y del nivel anterior.

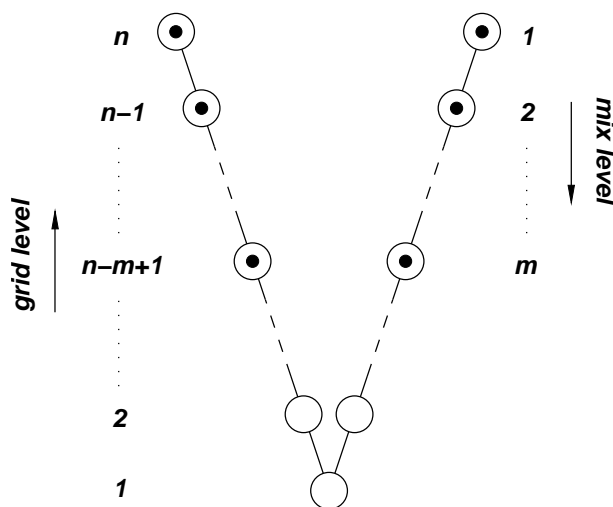


Figure 1: Multigrilla para malla compuesta (ciclo V).

Con el mismo conjunto de parámetros (método de relajación, número de pasos de pre y post suavizado, etc.) se incrementa el costo computacional si se introduce la mezcla de mallas en la resolución de todos los niveles. Esto se debe a que la mezcla hace crecer el ancho de banda de la matriz del nivel dado. Por lo tanto, el número de niveles de mezcla m debe mantenerse al mínimo posible mientras se obtenga la tasa de decrecimiento del error de la técnica de MC comparada con la resolución de MC mediante un método directo. Como se observará en los ejemplos numéricos, cuanto menor sea el tamaño de la malla más fina de todas, mayor será el decrecimiento en el error nodal producido por la estrategia de MC con respecto a FEM. Si los niveles de grillas se incrementan, es esperable que los niveles de mezcla necesarios se

incrementen debido a que las soluciones nodales de MC y FEM se separan cuando el tamaño de discretización decrece. Se denomina la estrategia presentada como MGCM, por Multigrilla con Malla Compuesta.

4 EJEMPLOS

Con el objetivo de mostrar la efectividad de la estrategia MGCM propuesta, se considerarán tres casos 2D con solución conocida. En las gráficas correspondientes a cada caso, se denotará con FEM, a la estrategia MG sin MC.

4.1 Problema de Poisson con coeficientes constantes

Se considera el siguiente problema de Poisson en un dominio cuadrangular

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), \quad \text{en } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

El término fuente es tal que la solución está dada por

$$u(x, y) = 31250x(x-1)\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{9}{10}\right)y(y-1)\left(y - \frac{4}{5}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{1}{10}\right)$$

En este caso, el dominio se discretizó mediante una grilla no estructurada con 82 elementos triangulares y 52 nodos. La grilla es la malla gruesa del problema y la secuencia de mallas se obtiene mediante un refinamiento isotrópico homogéneo de la misma. Los parámetros seleccionados para este problema consisten en tres pasos de pre y post suavizado de Jacobi amortiguado con parámetro de relajación 0.7. El factor de participación para la composición de mallas se obtiene teniendo en cuenta la regularidad de la solución exacta, $\alpha = 4/3$ (Bergallo et al., 2000). La tolerancia aplicada para la convergencia del residuo del sistema lineal es 1×10^{-6} .

MG					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	7	3.3960×10^{-3}	5.1424×10^{-2}	1.42×10^{-1}	-
4	7	9.5195×10^{-4}	2.5609×10^{-2}	3.42×10^{-1}	-
5	7	2.8171×10^{-4}	1.2796×10^{-2}	1.38	-
6	7	8.1310×10^{-5}	6.4094×10^{-3}	5.13	-
MGCM					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	7	1.1824×10^{-3}	4.9490×10^{-3}	9.26×10^{-2}	1
4	7	1.6160×10^{-4}	8.7621×10^{-4}	2.88×10^{-1}	1
5	7	2.1730×10^{-5}	1.5758×10^{-4}	1.83	1
6	7	2.7157×10^{-6}	5.1402×10^{-5}	5.09	1
6	8	2.8270×10^{-6}	2.8249×10^{-5}	5.73	2

Table 1: Resultados para el ciclo V para el problema de Poisson.

Los resultados del error en normas l^∞ y euclídea se presentan en la tabla 1 para el ciclo V y en la tabla 2 para el ciclo W . El número de iteraciones para alcanzar la convergencia, el

número de niveles de las grillas y una medida del tiempo de cálculo se muestran en cada tabla. En el caso del método MGCM también se presenta el número de niveles de mezcla. Las tablas muestran cómo el error decrece con la composición en ambas normas. El incremento del tiempo computacional de la estrategia MGCM se debe al hecho de que la matriz es menos rala que en el estándar MG.

MG					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	6	3.3959×10^{-3}	5.1423×10^{-2}	1.26×10^{-1}	-
4	5	9.5185×10^{-4}	2.5605×10^{-2}	3.06×10^{-1}	-
5	5	2.8159×10^{-4}	1.2787×10^{-2}	1.29	-
6	5	8.1190×10^{-5}	6.3915×10^{-3}	6.08	-
MGCM					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	6	1.1824×10^{-3}	4.9485×10^{-3}	1.26×10^{-1}	1
4	6	1.6181×10^{-4}	8.7539×10^{-4}	3.47×10^{-1}	1
5	5	2.1912×10^{-5}	1.5506×10^{-4}	1.52	1
6	5	2.8553×10^{-6}	2.7476×10^{-5}	5.23	1

Table 2: Resultados para el ciclo W para el problema de Poisson.

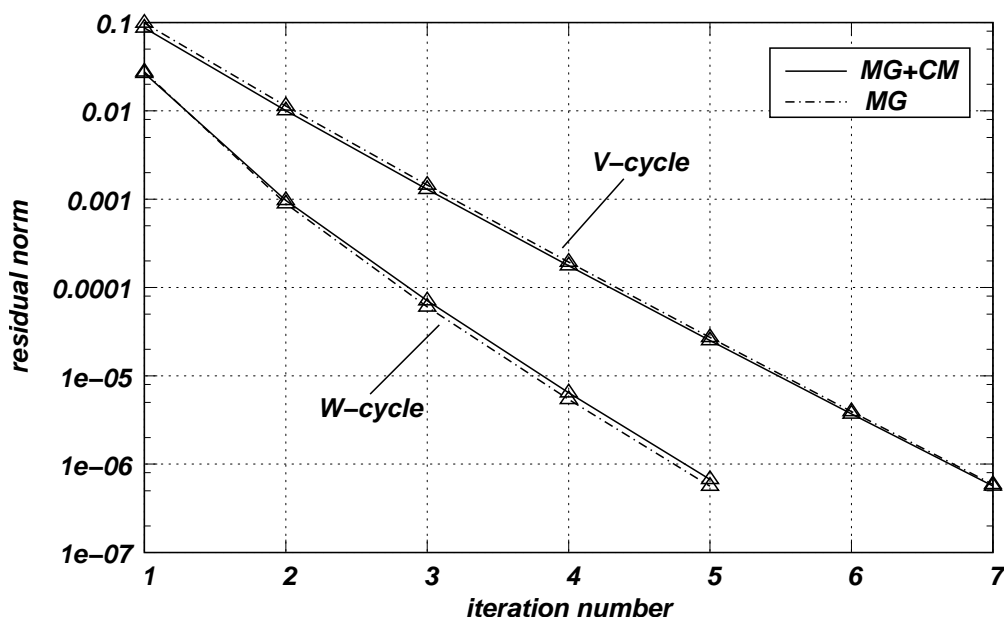


Figure 2: Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema de Poisson con cinco niveles de malla.

Se concluye entonces que la técnica MGCM preserva las características del método Multi-grilla original. Esta afirmación se basa en el hecho de que el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia en ambos casos, con y sin mezcla, permanecen constantes. En la figura 2 se presenta la norma del residuo en función del número de iteraciones en el caso de 5

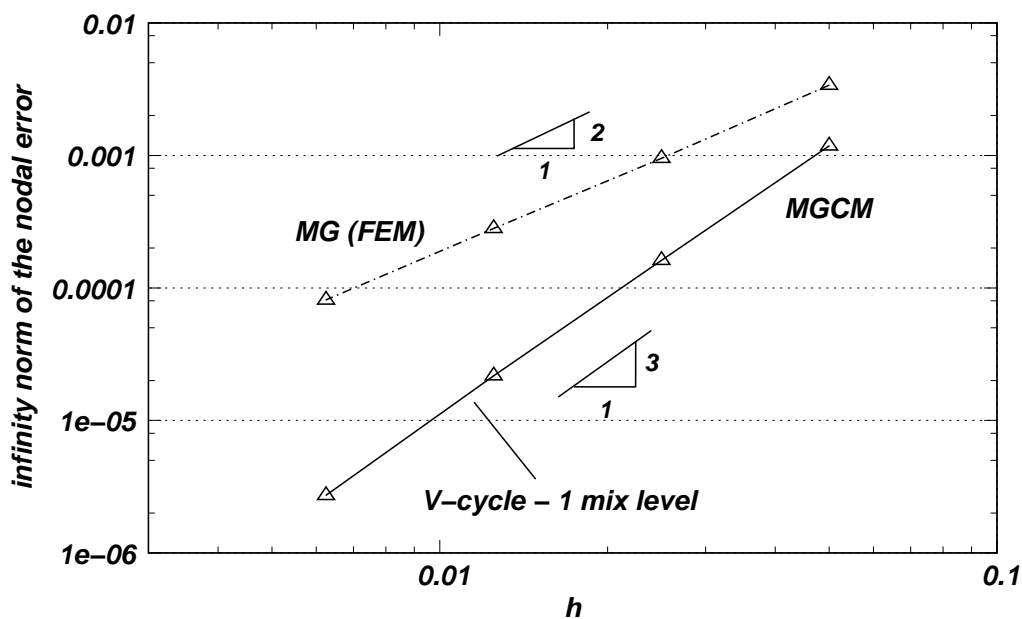


Figure 3: Norma infinito del error nodal como función de h para el problema de Poisson.

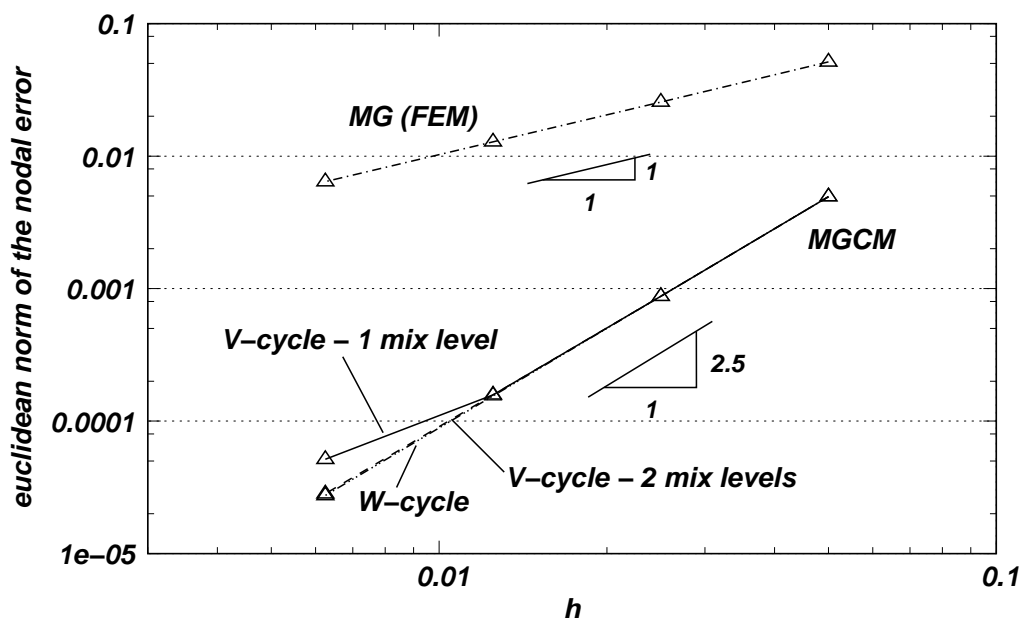


Figure 4: Norma euclídea del error nodal como función de h para el problema de Poisson.

niveles de grilla para los ciclos V y W . Como puede observarse, las curvas para MG y MGCM parecen superpuestas, con una pequeña diferencia en el ciclo W .

Para el caso del ciclo V con seis niveles de grilla, se utilizan dos niveles de mezcla con el objetivo de alcanzar la reducción total del error que se obtiene con la técnica MC. Sin embargo, para el ciclo W fue suficiente sólo un nivel de mezcla en todos los casos resueltos. En las figuras 4 y 3 se presenta el error nodal como función del tamaño de discretización (h) para ambas normas. En dichas figuras, la notación se refiere con FEM y MC a las soluciones por

MG y MGCM respectivamente. Notar la significativa reducción de la tasa del error con esta última estrategia.

4.1.1 Observación:

Supongamos que se quiere calcular una solución mediante MG con un error nodal tal que su norma euclídea sea 2.827×10^{-6} . Extrapolando los datos de la figura 4 se concluye que $h \approx 2.17 \times 10^{-4}$. Asumiendo que el tiempo de cálculo t_C del método MG es $\mathcal{O}(h^{-2})$, el cual puede obtenerse de las tablas 1 or 2, se tiene $t_C \approx 4.26 \times 10^3$ s. para $h \approx 2.17 \times 10^{-4}$ en el caso del ciclo V . El mismo nivel de errores alcanzado con la estrategia MGCM en 5.73 sec (742 veces más rápido).

4.2 Problema de Poisson con coeficientes variables

En el segundo caso, se considera un problema elíptico con coeficientes variables en el cuadrado unitario

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\mu(x, y) \nabla u) &= f(x, y), \quad \text{en } (0,1) \times (0,1) \\
 u(0, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \\
 u(x, 0) &= \sin(5\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\
 u(x, 1) &= -\sin(5\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\
 u(1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1
 \end{aligned} \tag{15}$$

donde $\mu(x, y) = 1 + xy^2$ y $u(x, y) = \sin(5\pi x) \cos(3\pi y)$. La malla y el conjunto de parámetros son los mismos que en el ejemplo previo.

MG					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	7	9.5902×10^{-3}	1.3441×10^{-1}	7.52×10^{-2}	-
4	6	2.4065×10^{-3}	6.6750×10^{-2}	2.03×10^{-1}	-
5	6	6.0359×10^{-4}	3.3383×10^{-2}	9.09×10^{-1}	-
6	6	1.5232×10^{-4}	1.6833×10^{-2}	3.93	-
MGCM					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	7	1.6852×10^{-3}	1.1015×10^{-2}	7.66×10^{-2}	1
4	6	1.9785×10^{-4}	1.7776×10^{-3}	2.09×10^{-1}	1
5	6	2.4413×10^{-5}	3.3890×10^{-4}	9.66×10^{-1}	1
6	6	4.9948×10^{-6}	3.5801×10^{-4}	4.06	1
6	8	3.0296×10^{-6}	5.2584×10^{-5}	5.96	2

Table 3: Resultados para el ciclo V en el problema de Poisson con coeficientes variables.

En las tablas 3 y 4 se presentan los resultados obtenidos para ambos ciclos V y W , respectivamente. En las mismas puede observarse cómo el error nodal decrece con la mezcla en las normas euclídea e infinito.

MG					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	6	9.5901×10^{-3}	1.3441×10^{-1}	9.47×10^{-2}	-
4	5	2.4048×10^{-3}	6.6705×10^{-2}	2.68×10^{-1}	-
5	5	6.0180×10^{-4}	3.3285×10^{-2}	1.13	-
6	5	1.5048×10^{-4}	1.6634×10^{-2}	4.67	-
MGCM					
niveles de mezcla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	6	1.6852×10^{-3}	1.1015×10^{-2}	9.54×10^{-2}	1
4	6	1.9806×10^{-4}	1.7835×10^{-3}	3.23×10^{-1}	1
5	5	2.4445×10^{-5}	3.0136×10^{-4}	1.14	1
6	5	3.0380×10^{-6}	5.4106×10^{-5}	4.28	1

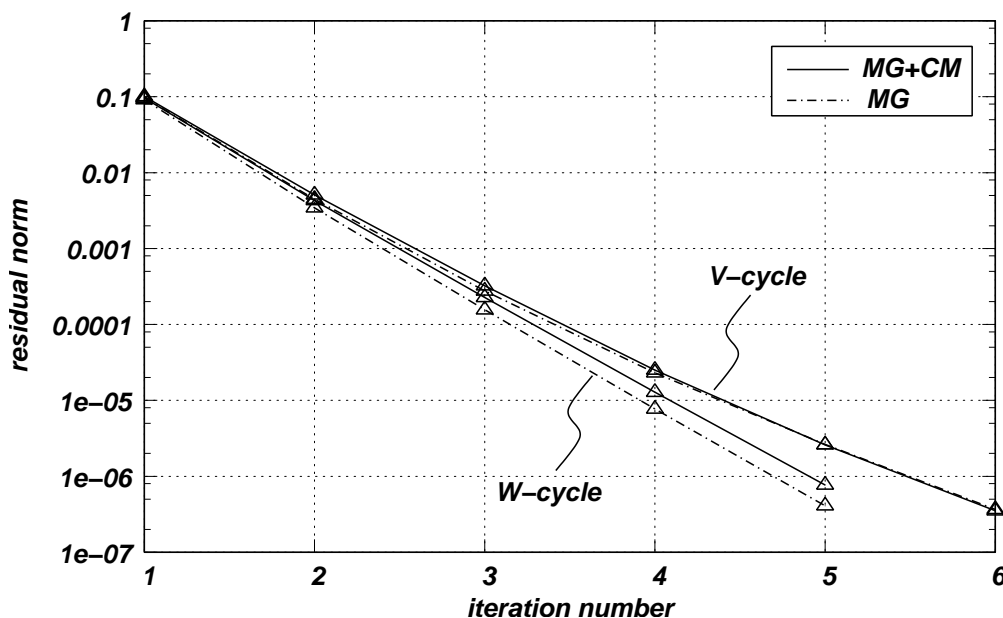
Table 4: Resultados para el ciclo W en el problema de Poisson con coeficientes variables.

Figure 5: Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema de Poisson con coeficientes variables con cinco niveles de grilla.

En este caso las tasas de convergencia propuestas en la estrategia MGCM y en la MG estándar son similares, en particular cuando se aplica sólo un nivel de mezcla (ver también la figura 5).

Las figuras 6 and 7 muestran las normas euclídea e infinito del error nodal en función del tamaño de discretización. En este caso, es necesario el uso de dos niveles de mezcla para el ciclo V con seis niveles de malla para poder alcanzar la tasa de reducción del error de la técnica MC.

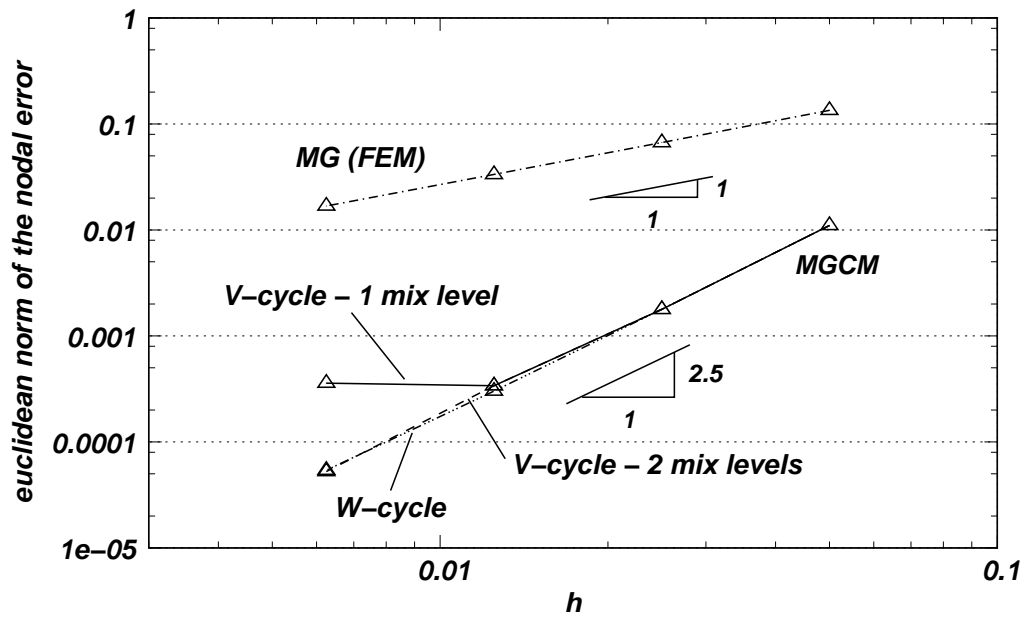


Figure 6: Norma euclídea para el error nodal como función de h para el problema de Poisson con coeficientes variables.

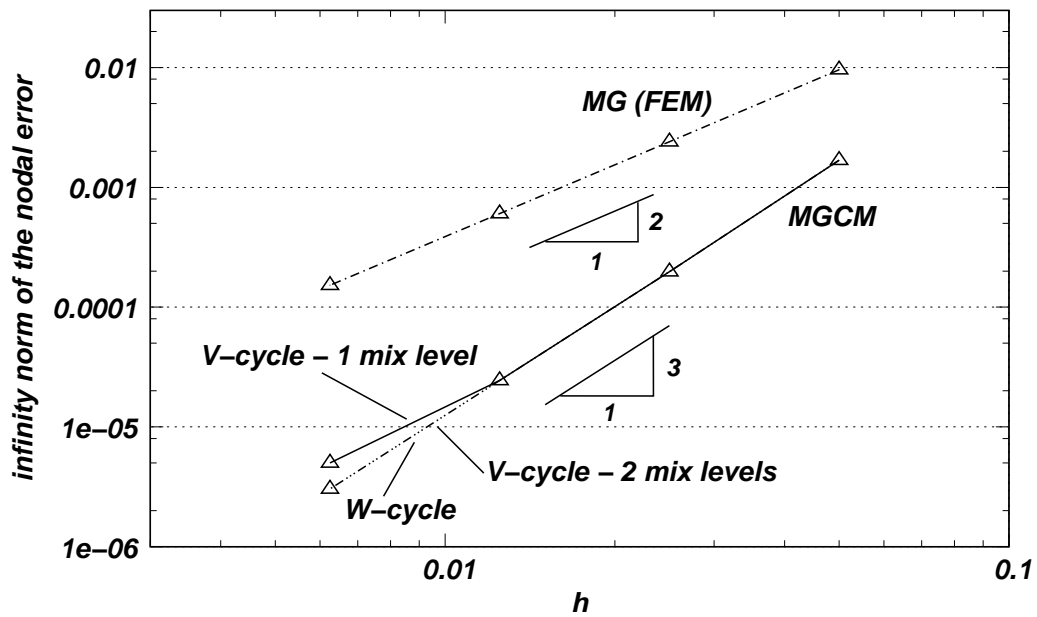


Figure 7: Norma infinito para el error nodal como función de h para el problema de Poisson con coeficientes variables.

4.3 Problema de Poisson en dominio seccionado

El siguiente ejemplo corresponde a un problema de Poisson escalar sobre el dominio Ω que se muestra en la figura 8, donde Γ es la frontera interior de forma elíptica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 10, \quad \text{en } \Omega \\ u(x, y) = 4, \quad \text{sobre } \Gamma \\ u(x, -2) = 16 + x^2, \quad \text{sobre } -3 \leq x \leq 3 \\ u(x, 2) = 16 + x^2, \quad \text{sobre } -3 \leq x \leq 3 \\ u(-3, y) = 9 + 4y^2, \quad \text{sobre } -2 \leq y \leq 2 \\ u(3, y) = 9 + 4y^2, \quad \text{sobre } -2 \leq y \leq 2 \end{array} \right. \quad (16)$$

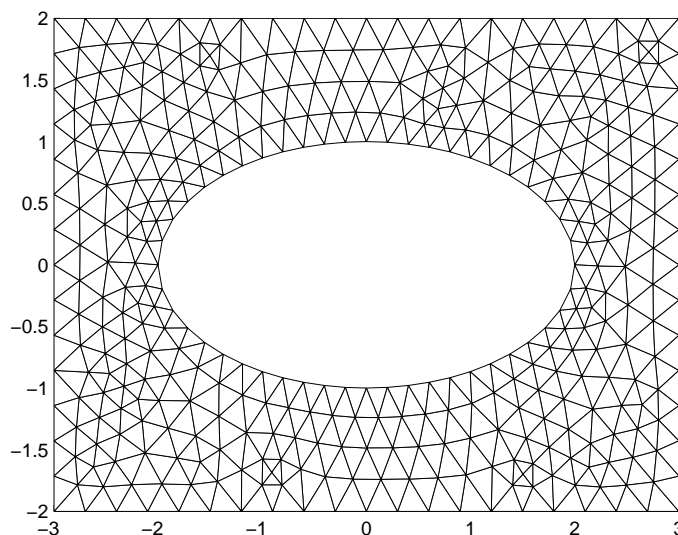


Figure 8: Malla más gruesa para el problema de Poisson con dominio seccionado.

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad (17)$$

En las tablas 5 y 6 se presentan los resultados obtenidos para ambos ciclos respectivamente. En las mismas puede observarse cómo el error nodal decrece con la mezcla en las normas euclídea e infinito.

En este caso las tasas de convergencia propuestas en la estrategia MGCM y en la MG estándar son similares, en particular cuando se aplica sólo un nivel de mezcla (ver también la figura 9).

Las figuras 10 and 11 muestran las normas euclídea e infinito del error nodal en función del tamaño de discretización. En este caso, es necesario el uso de dos niveles de mezcla para el ciclo V con seis niveles de malla para poder alcanzar la tasa de reducción del error de la técnica MC.

MG					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	11	6.6746×10^{-3}	4.2314×10^{-2}	3.32×10^{-1}	-
4	12	1.9914×10^{-3}	2.0854×10^{-2}	1.34	-
5	11	5.7851×10^{-4}	1.0379×10^{-2}	5.09	-
6	12	1.6479×10^{-4}	5.1826×10^{-3}	2.35×10^1	-
MGCM					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	12	2.0134×10^{-4}	6.5459×10^{-4}	3.75×10^{-1}	1
4	12	2.5032×10^{-5}	1.1156×10^{-4}	1.41	1
5	12	3.0586×10^{-6}	1.9121×10^{-5}	5.56	1
6	12	3.7443×10^{-7}	3.4291×10^{-6}	2.45×10^1	1

Table 5: Resultados para el ciclo V en el problema de Poisson con dominio seccionado.

MG					
niveles de grilla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	11	6.6746×10^{-3}	4.2314×10^{-2}	4.96×10^{-1}	-
4	11	1.9914×10^{-3}	2.0854×10^{-2}	1.87	-
5	10	5.7851×10^{-4}	1.0379×10^{-2}	6.65	-
6	11	1.6479×10^{-4}	5.1826×10^{-3}	3.12×10^1	-
MGCM					
niveles de mezcla	iteraciones	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _2$	tiempo [s]	niveles de mezcla
3	11	2.0134×10^{-4}	6.5459×10^{-4}	5.08×10^{-1}	1
4	11	2.5032×10^{-5}	1.1156×10^{-4}	1.92	1
5	11	3.0591×10^{-6}	1.9114×10^{-5}	7.50	1
6	12	3.7425×10^{-7}	3.4126×10^{-6}	3.37×10^1	1

Table 6: Resultados para el ciclo W en el problema de Poisson con dominio seccionado.

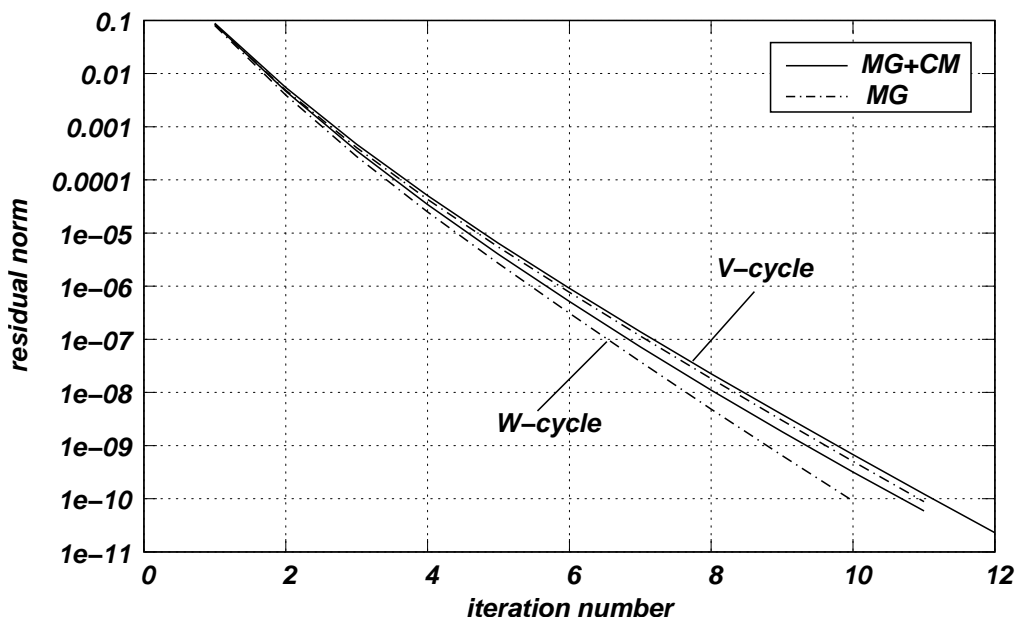


Figure 9: Norma del residuo como función del número de iteraciones para el problema de Poisson con dominio seccionado con cinco niveles de grilla.

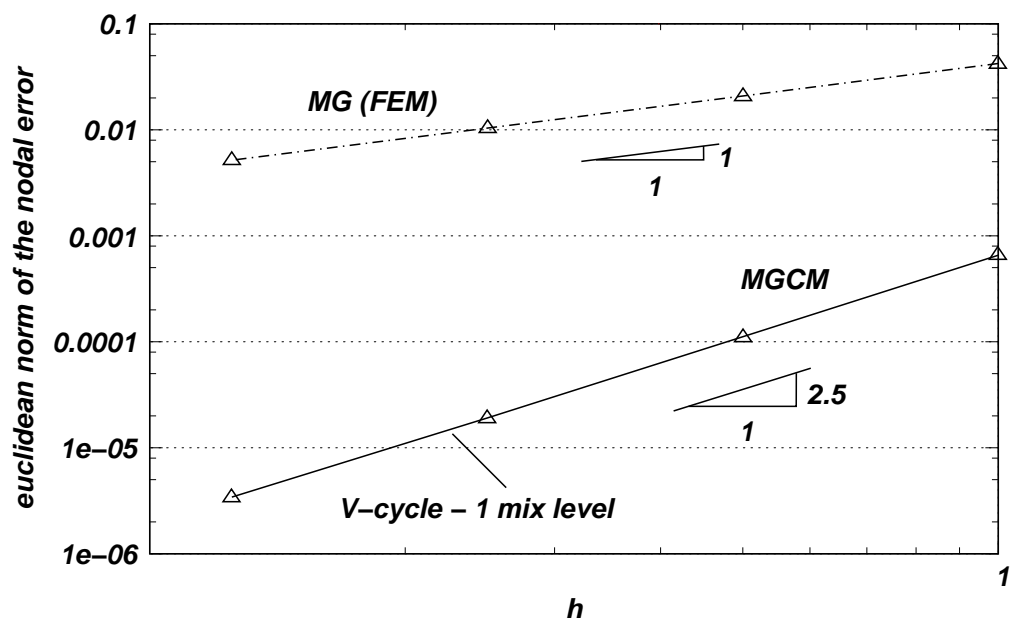


Figure 10: Norma euclídea para el error nodal como función de h para el problema de Poisson con dominio seccionado.

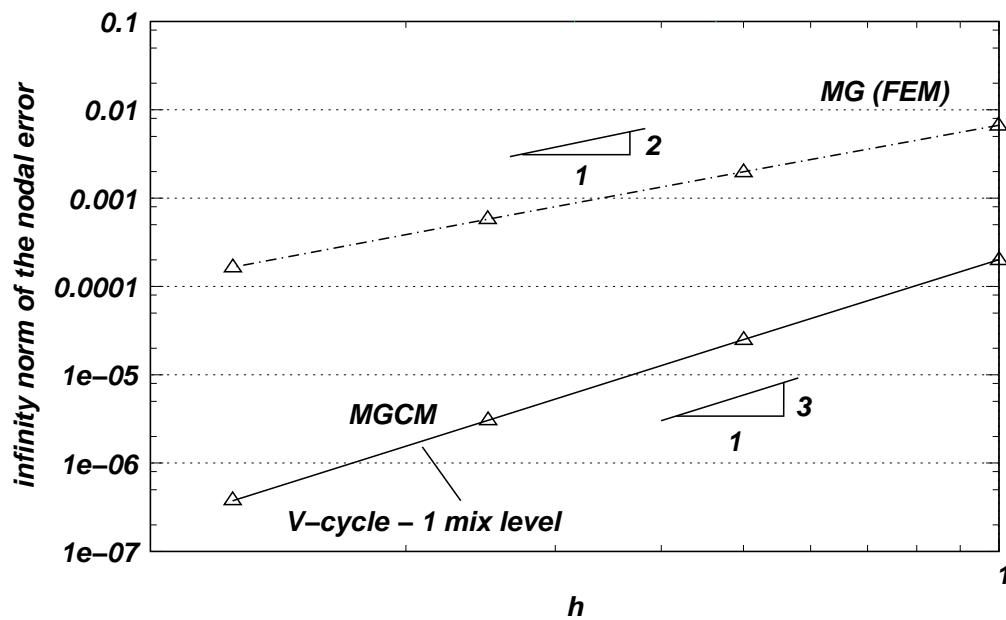


Figure 11: Norma infinito para el error nodal como función de h para el problema de Poisson con dominio seccionado.

5 CONCLUSIONES

Se presentó la integración de las técnicas de malla compuesta y Multigrilla, dando lugar a una nueva versión de esta última en la cuál pueden obtenerse soluciones mejoradas sin elevar apreciablemente el costo computacional. En los casos presentados se trabajó con mallas relacionadas mediante refinamientos homogéneos. Se muestran los resultados para tres problemas con solución exacta donde puede observarse la potencialidad de la estrategia. Puede concluirse entonces que la nueva versión que integra ambas técnicas satisface los resultados esperados de cada una de ellas individualmente. Utilizando el factor de participación óptimo para la mezcla de las mallas, se obtienen aproximaciones numéricas con error nodal menor que aquellos obtenidos con el método Multigrilla para el mismo nivel de discretización.

REFERENCES

- Bergallo M., Neuman C., and Sonzogni V. Composite mesh concept based fem error estimation and solution improvement. 188:755–774, 2000.
- Brandt A. Multi level adaptive solutions to boundary value problems. 31:333–390, 1977.
- Briggs W., Hemson V., and McCormick S. *A Multigrid Tutorial*. 2000.
- Kim J., Kang K., and Lowengrud J. Conservative multigrid methods for ternary cahn-hilliard systems. 2:53–77, 2004.
- McCormick S., Briggs W., and Hemson V. *A Multigrid Tutorial*. 2000.
- Press W., Flannery B., Teukolsky S., and Vetterling W. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988-1992.
- Sarraf S., Bergallo M., and Sonzogni V. Uso de métodos multigrilla para resolución numérica de problemas de valores de contorno. In *Mecánica Computacional Vol XXV, AMCA*. Santa Fe, Argentina, 2006. Pp 933-946.
- Sarraf S., Bergallo M., and Sonzogni V. Problemas elípticos resueltos mediante mallas compuestas aplicando métodos multigrilla. In *Mecánica Computacional Vol XXVI, AMCA*. Córdoba, Argentina, 2007. Pp 696-710.
- Sonzogni V., Bergallo M., and Neuman C. Uso de una malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos. In *Mecánica Computacional Vol XVI, AMCA*. Argentina, 1996. Pp 123-132.
- Toro S., Sonzogni V., and Neuman C. Elementos finitos de diferentes órdenes para problemas de elasticidad plana y mezcla de sus mallas. In *Mecánica Computacional Vol XXIV, AMCA*. Argentina, 2005. Pp 3171-3185.
- Wesseling P. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley & Sons, 1992.
- Xu J. *An introduction to multigrid convergence theory*. 1995.