

MODELAGEM NUMÉRICA DO FLUXO DE PEDESTRES SOB UMA VISÃO MACROSCÓPICA

Marina Vargas R. P. G. Ferreira^a, Liliana Madalena Gramani^b, Eloy Kaviski^c, Fábio André Negri Balbo^d e Rudinei Luiz Bogo^e

^aPPGMNE, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil, marina.v.ferreira@hotmail.com,
<http://www.ppgmne.ufpr.br/>

^bDepartamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil,
l.gramani@gmail.com, <http://www.mat.ufpr.br/>

^cDepartamento de Hidráulica e Saneamento, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil,
eloy.dhs@ufpr.br, <http://www.ppgerha.ufpr.br/>

^dPPGMNE, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil, fabiobalbo_5@hotmail.com,
<http://www.ppgmne.ufpr.br/>

^ePPGMNE, Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, Brasil, rudi_bgo7@hotmail.com,
<http://www.ppgmne.ufpr.br/>

Palavras Chave: Tráfego, Modelo Hidrodinâmico, Fluxo de Pedestres.

Resumo. Cada vez mais a necessidade de modelar o tráfego tem se tornado uma prioridade nas grandes cidades, nas rodovias e vias em geral. Contudo, ainda há poucas pesquisas na área de modelagem de pedestres e continuam ocorrendo grandes acidentes relacionados a multidões. Na tentativa de solucionar esses problemas e tornar possível a análise de estruturas para pedestres ainda não planejadas e construídas dentre outras coisas, surgem pesquisas no campo da matemática, física e engenharia, para que se possa modelar o fluxo de pedestres fazendo analogias com modelos existentes nessas três áreas. Neste trabalho desenvolve-se um modelo contínuo de primeira ordem para o fluxo de tráfego de pedestres tendo como ponto de partida a equação da continuidade que é acoplada a um modelo fenomenológico de Kladek, proposto por Weidmann e reformulada por Venuti e Bruno, obtendo assim um modelo hidrodinâmico de primeira ordem. Soluciona-se um modelo pelo método das diferenças finitas e seus resultados são comparados com dados experimentais bibliográficos e resultados de modelos acoplados a relações fenomenológicas diferentes.

1 INTRODUÇÃO

Lugares com grandes aglomerados de pessoas são cada vez mais presenciados no cotidiano das pessoas. Os projetos desses ambientes (*Shopping centers*, estações ferroviárias ou de metro, aeroportos, estádios, etc) podem ser otimizados simulando-se antecipadamente tais estruturas e testando diferentes soluções para problemas que possam ocorrer nas simulações. Para tanto é necessário que existam modelos adequados de comportamento de pedestres, que representem com precisão a dinâmica complexa das multidões mas que, ao mesmo tempo, sejam rápidos computacionalmente e fáceis de serem manuseados para lidar com aplicações do mundo real.

Desde os anos sessenta muitos estudos têm sido dedicados para a determinação de uma lei que vincule a velocidade das caminhadas com a densidade das multidões. Credita-se a Henderson, o primeiro modelo adequado para reproduzir os padrões espaço-temporal do movimento de pedestres. O modelo matemático para uma multidão dinâmica pode ser desenvolvido de acordo com três diferentes enquadramentos matemáticos, respectivamente, baseados em descrição microscópica, cinética e macroscópica. Vários modelos matemáticos têm sido propostos para descrever a dinâmica de grupo, tanto para uma escala microscópica com autores como Helbing (1992), Helbing e Mulnár (1995), dentre outros, como para uma escala macroscópica, desenvolvidos por Bellomo et al. (2002), Hughes (2002), etc.

A descrição macroscópica descarta a visão microscópica do tráfego em termos das velocidades individuais dos pedestres ou as componentes individuais do sistema (tais como as ligações ou os cruzamentos), adotando uma visão macroscópica do tráfego de pedestres em uma rede. Nesta descrição o estado do sistema é descrito por quantidades médias localmente calculadas, isto é, a densidade, a velocidade e o fluxo dos indivíduos, considerados como variáveis dependentes do tempo e do espaço. Os modelos matemáticos descrevem a evolução destas variáveis, por sistemas de equações diferenciais parciais.

Esta é a escala adotada neste trabalho, pois sabe-se que a estrutura das multidões são altamente complexas. Quando opta-se trabalha-se com modelos hidrodinâmicos. Tais modelos são capazes de gerar resultados rápidos e precisos sobre a multidão na estrutura de caminhada. Além disso, a falta de dados experimentais sobre o comportamento das multidões torna difícil a utilização dos outros dois tipos de representação (microscópica e cinética).

O método numérico escolhido para resolver o modelo hidrodinâmico de primeira ordem deste trabalho é o método das diferenças finitas.

O Método das Diferenças Finitas consiste em substituir as derivadas na equação por aproximações numéricas de mesma ordem de aproximação, utilizando a série de Taylor. A Equação de diferenças finitas é escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema.

O objetivo deste trabalho é resolver um modelo contínuo de primeira ordem para o fluxo de tráfego de pedestres tendo como ponto de partida a equação da continuidade que é fechada com o modelo fenomenológico de Kladek, proposto por Weidmann (1993) e reformulada por Venuti e Bruno (2007), obtendo assim um modelo hidrodinâmico de primeira ordem, que é resolvido pelo método das diferenças finitas e seus resultados são comparados com dados experimentais bibliográficos e resultados de modelos acoplados a relações fenomenológicas diferentes.

2 EQUAÇÃO MACROSCÓPICA PARA O TRÁFEGO DE PEDESTRES UNIDIMENSIONAL

Os modelos hidrodinâmicos macroscópicos são descritos pelas equações de conservação que correspondem a massa, quantidade de momento e energia. Os modelos hidrodinâmicos de pri-

meira ordem utilizam a equação da conservação da massa, ou seja, a conservação do número de pedestres na estrutura. Esta equação diferencial, com duas variáveis, a densidade e a velocidade dos pedestres como função do tempo e do espaço, é fechada com uma relação matemática fenomenológica adicional. Das diferentes escolhas desta relação, obtêm-se diferentes modelos macroscópicos de primeira ordem. Um ponto chave destes modelos de primeira ordem é a grande vantagem de sua simplicidade, o que torna o modelo computacionalmente muito interessante.

Alguns termos que serão utilizados posteriormente neste trabalho são especificados a seguir:

- Massa específica ou *densidade relativa* é o número de pedestres por unidade de área. Sua notação é ρ .
- A *Velocidade*, no estudo de pedestres, é adotada como uma média das velocidades dos pedestres que passam em um determinado intervalo. Normalmente é expressa em m/s e representada por u .
- O *Fluxo* é o número de pedestres que passam por uma seção da estrutura/pista por unidade de tempo. A unidade de comprimento deve ser considerada como a largura do passeio ou porção da pista. Em geral, usa-se $ped/m/s$ e denota-se o fluxo por q .

A densidade, representada por $\rho(t, x)$, a velocidade, $u(t, x)$ e o fluxo, $q(t, x)$, são as variáveis fundamentais do fluxo de tráfego unidimensional de pedestres, dependentes da posição x e do tempo t e estão relacionadas através de:

$$q = \rho u, \quad (1)$$

onde $q = q(\rho)$, $u = u(\rho)$ e $\rho = \rho(t, x)$.

A Eq. (1) é denominada *equação fundamental do fluxo de pedestres*.

Quando analisa-se o tráfego de pedestres, é necessário utilizar o princípio da conservação da massa, pois precisa-se garantir que todos os pedestres que entrem na estrutura de caminhada, saiam desta estrutura. Como o fluxo de pedestres é analisado através de *volumes de controle*, tem-se que a conservação da massa fica definida através da *equação da continuidade*.

A equação da continuidade, é de fundamental importância para o estudo de todos os problemas relacionados ao movimento dos fluidos e a sua dedução pode ser feita por diferentes desenvolvimentos teóricos [Sissom e Pitts \(1988\)](#), e tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Contudo, neste artigo será analisada uma possível entrada de fluxo, ou seja, uma entrada de pedestres durante o processo de caminhada. Portanto a Eq. (2) transforma-se em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = g(t), \quad (3)$$

onde $g(t)$ é uma função que representa a entrada de pedestres no sistema considerado e que o fluxo q está relacionado com a velocidade u pela relação (1).

Essa equação expressa o seguinte princípio físico: para uma quantidade de pedestres em uma via, num determinado período de tempo, a equação da continuidade diz que o número de pedestres que entra no ambiente de caminhada tem que ser igual ao número de pedestres que sai deste ambiente.

3 ANÁLISE FENOMENOLÓGICA

Para se obter uma estrutura fenomenológica para os pedestres, muitas características podem ser analisadas. Inicialmente necessita-se saber se há uma situação de pânico ou não. A partir deste ponto as características dos pedestres são definidas através de estudos comportamentais para ambos os casos.

Analisa-se neste trabalho situações de caminhada normal (sem pânico), assim assumi-se:

- os pedestres são **agentes ativos**, ou seja, em condições normais, sem início de pânico, partilham o mesmo objetivo de andar com a velocidade máxima até atingirem os seus objetivos (por exemplo, portas de saída), evitando possíveis obstáculos e evitando as zonas mais concorridas.
- os pedestres são **agentes inteligentes**, isto é, sua mente avalia, seleciona e/ou faz a síntese do que ele percebe de acordo com vários critérios psicológicos (por exemplo, o nível de ansiedade ou a capacidade de realizar avaliações do grupo).
- os pedestres não são igualmente afetados por estímulos vindos de todas as direções no espaço. Especificamente, eles distinguem entre frente e trás, em situações normais, sendo essencialmente sensíveis ao que acontece em um campo visual simétrico focada em sua direção de movimento;
- em condições normais externas e subjetivas, os pedestres não percebem a estrutura total de caminhada. São afetados apenas por regiões ao seu redor, dentro de seu campo de visão.
- os pedestres demoram um determinado tempo para reagir a partir do momento que enxergam uma situação nova. Assim, se a sua frente está congestionado, esse pedestre demorará um certo tempo para diminuir a velocidade.
- os pedestres que estão em uma determinada posição em um determinado momento reagem às condições percebidas na frente com um *delay*, ou seja, com um certo atraso em relação ao que está ocorrendo.

Considerando-se essas questões é possível construir equações que representam fenomenologicamente o tráfego de pedestres.

Existem diversos modelos fenomenológicos conhecidos na literatura que fornecem, por exemplo, a relação entre a velocidade e a densidade, como: o modelo linear de [Greenshield \(1935\)](#), o modelo logaritmo de [Greenberg \(1959\)](#), o modelo exponencial de [Underwood \(1961\)](#), dentre outros.

Assim, conhecendo a velocidade como uma função da densidade, é possível fazer-se o fechamento da equação da continuidade, obtendo com isso um modelo hidrodinâmico macroscópico para o tráfego de pedestres unidimensional.

3.1 Modelo Fenomenológico de Kladek

O modelo fenomenológico de Kladek é uma equação não linear que foi proposta por Weidmann ([Weidmann, 1993](#)) e posteriormente revista e reescrita de forma geral por Venuti e Bruno ([Venuti e Bruno, 2007](#)), sendo apresentada da seguinte forma:

$$u = u_0 \left[1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_j} \right)} \right] \quad (4)$$

onde u_0 é a velocidade média de caminhada dos pedestres na estrutura, ρ_j é a densidade máxima admitida por metro quadrado, ou seja, a quantidade de pedestres que lotam (enchem) $1m^2$ e γ é um parâmetro livre determinado recorrendo a dados experimentais de acordo com o propósito de viagem.

Quando faz-se a análise fenomenológica e considera-se os pedestres como agentes ativos, inteligente e afetados por estímulos de todos os lados, o “peso” dessa análise pode ser demonstrado através do parâmetro γ . Desta forma, γ com valores altos representam situações de “hora do rush” e “correria”. De forma oposta, γ com valores pequenos demonstram situações de “passeio” e “caminhadas com baixas velocidades”. Além disso, através da análise fenomenológica é possível identificar uma relação¹, inversamente proporcional entre velocidade e densidade. Desta forma, só é possível escrever uma equação do tipo (4) quando se possui o conhecimento antecipado dessas características fenomenológicas do fluxo de pedestres.

De acordo com Venuti e Bruno, a fórmula revista de Kladek mostra uma excelente concordância com os modelos reais físicos, devido à sua forma direta, compacta e por trazer ótimas respostas quando utilizada dentro de um modelo de interação estrutura-multidão, como por exemplo em uma ponte para pedestres.

3.2 Modelo Hidrodinâmico de Primeira Ordem

Tem-se o seguinte modelo hidrodinâmico fechado com a equação fenomenológica de Kladek:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} & = g_1(t), \\ u & = u_0 \left[1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_j} \right)} \right], \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_j \\ \rho(0, t) = \rho(x, 0) & = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Assim, o fluxo de pedestres é representado pela Eq. (6).

$$q = \rho \left\{ u_0 \left[1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_j} \right)} \right] \right\}. \quad (6)$$

Por conseguinte, tem-se uma equação diferencial parcial hiperbólica quando trabalha-se com uma velocidade de Kladek

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u_0 \left(1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_j} \right)} \right) \right)}{\partial x} = g_1(t), \quad (7)$$

sendo $g_1(t)$ uma constante conhecida, determinada dependendo da situação que se deseja calcular.

4 MÉTODO NÚMÉRICO

O método de solução usado para resolver o modelo hidrodinâmico deste trabalho, é o método conhecido como método das diferenças finitas (MDF).

Para que seja possível tratar numericamente as Equações Diferenciais Parciais (EDP), elas devem ser expressas na forma de operações aritméticas que o computador possa executar. Essencialmente, deve-se representar as diferenciais da EDP por expressões algébricas, ou seja, discretizar a EDP.

¹Relação não linear assumida neste trabalho.

As aproximações de diferenças finitas podem ser obtidas de várias formas. Uma das mais comuns é a expansão por série de Taylor.

A expansão da série de Taylor permite estimar o valor da função f em $f_1 \equiv f(x + \Delta x, t)$, conhecendo o valor de f em $f_0 \equiv f(x, t)$.

Deseja-se determinar a primeira derivada de uma função f no ponto $x_i = i\Delta x$, a qual será denotada por $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i$ obtendo assim

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^k = \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} + O\left(\Delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right). \quad (8)$$

onde $f_i^k \equiv f(i\Delta x, k\Delta t)$ e $f_{i+1}^k \equiv f(x + i\Delta x, k\Delta t)$

A expressão (8) é uma equação de diferenças finitas que representa uma *aproximação de primeira ordem* para a primeira derivada de f , utilizando *diferenças progressivas ou adiantadas*.

Uma segunda aproximação de diferenças finitas pode ser obtida a partir da expansão de $f(x - \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i obtendo:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{\Delta x} + O\left(\Delta x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad (9)$$

que é outra aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de f . Diferentemente da expressão (8), na qual utiliza-se um ponto adiante de x_i , a expressão (9) utiliza o ponto x_{i-1} , ponto que fica *atrás* de x_i . Por essa razão, a expressão (9) é considerada uma aproximação por *diferenças regressivas ou atrasadas*.

O mesmo procedimento é válido para derivadas temporais, ou seja:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^k = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} + O\left(\Delta t, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right), \quad (10)$$

em que os índices k e $k + 1$ designam dois níveis temporais, o nível k representa o presente e o nível $(k + 1)$ representa o futuro, sendo f_i^k conhecida.

Além disso é necessário admitir a utilização da condição de Courant. Os problemas que envolvem diferenças finitas explícito necessitam que seja determinada uma ligação entre o intervalo de discretização no espaço Δx e o intervalo de discretização no tempo Δt , como consequência da condição de estabilidade do esquema. Esta ligação (normalmente é chamada de condição de Courant-Friedrichs-Lewy - CFL Fortuna (2000)) pode ser formulada da seguinte forma

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda \leq 1,$$

onde λ é o número de Courant.

Dependendo do tipo de diferença finita a ser usado na solução de determinado problema, dois diferentes esquemas podem ser elaborados Castanharo (2003). Se a aproximação por diferença finita da derivada espacial for expressa em termos de valores das variáveis no nível de tempo conhecido, as equações resultantes podem ser resolvidas diretamente, para cada nó computacional em cada tempo. Este tipo de esquema é chamado de *esquema explícito*. Se, por outro lado, a aproximação por diferença finita da derivada espacial for expressa em termos de valores das variáveis na linha de tempo desconhecida, as equações algébricas do sistema inteiro são resolvidas simultaneamente, e o esquema é dito *esquema implícito*.

4.1 Esquemas Implícitos

A grande diferença entre os esquemas explícitos e implícitos é que os esquemas implícitos são computacionalmente estáveis para qualquer Δt utilizado, por este motivo pode-se dizer que este tipo de esquema é incondicionalmente estável (Castanharo, 2003). Os esquemas implícitos, se concebidos com base em diferenças finitas progressivas ou regressivas, originam um esquema implícito de quatro pontos (Fig. (1)).

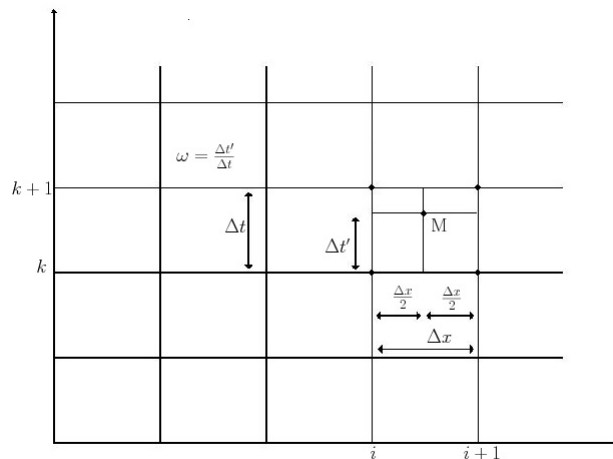


Figura 1: Esquema Implícito de quatro pontos

Na figura apresenta-se uma malha $x - t$ na qual está formulado um esquema implícito de quatro pontos. O valor da derivada espacial e dos termos não derivados são proporcionais entre linhas adjacentes, sobre o ponto M , pela ponderação do valor da função dos quatro pontos através do uso do fator ponderador ω , que matematicamente é a razão entre $\Delta t'$ e Δt . Sendo σ uma variável dependente, a derivada espacial, temporal e o valor da função na malha $x - t$ podem ser representados respectivamente pelas equações (11), (12), (13).

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\omega (\sigma_{i+1}^{k+1} - \sigma_i^{k+1})}{\Delta x} + \frac{(1 - \omega) (\sigma_{i+1}^k - \sigma_i^k)}{\Delta x}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sigma_{i+1}^{k+1} - \sigma_{i+1}^k)}{\Delta t} + \frac{(\sigma_i^{k+1} - \sigma_i^k)}{\Delta t} \right], \quad (12)$$

$$\sigma = \frac{\omega (\sigma_i^{k+1} + \sigma_{i+1}^{k+1})}{2} + \frac{(1 - \omega) (\sigma_i^k + \sigma_{i+1}^k)}{2}. \quad (13)$$

O esquema de quatro pontos é explícito para valores de ω igual a 0 e implícito para valores de ω maiores que 0. Quando o valor desta variável é igual ao valor da unidade, o esquema é dito *totalmente implícito*.

No modelo deste trabalho, apesar ter sido utilizado $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda = 0, 1$, este valor não é visto como condição de estabilidade, pois utiliza-se o MDF implícito como método de solução. Li (1974) demonstrou que este é um método convergente, consistente e incondicionalmente estável.

Assumindo-se:

- $\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{i+1}^k = \frac{\rho_{i+1}^{k+1} - \rho_{i+1}^k}{\Delta t} + O(\Delta t),$
- $\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_i^{k+1} = \frac{q_{i+1}^{k+1} - q_i^{k+1}}{\Delta x} + O(\Delta x),$
- $g_1(t) = \frac{g_{i+1}^{k+1} + g_i^{k+1}}{2},$

o modelo hidrodinâmico de Eq. (7) pode ser reescrito por MDF implícito de forma generalizada como a seguir,

$$\frac{\rho_{i+1}^{k+1} - \rho_{i+1}^k}{\Delta t} + \frac{q_{i+1}^{k+1} - q_i^{k+1}}{\Delta x} = \frac{g_{i+1}^{k+1} + g_i^{k+1}}{2}. \quad (14)$$

Para simplificar a notação e tornar o modelo mais fácil de ser representado computacionalmente, tem-se que:

- $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$
- $\frac{\Delta t}{2} (g_{i+1}^{k+1} + g_i^{k+1}) + \rho_{i+1}^k + \lambda q_i^{k+1} = \Omega$

Com isso podemos escrever a Eq. (14) da forma

$$\rho_{i+1}^{k+1} + \lambda q_{i+1}^{k+1} = \Omega \quad (15)$$

Considerando a equação de Kladek para a velocidade, tendo o fluxo expresso pela Eq. (6), e chamando $\rho_{i+1}^{k+1} = r$, $e^{\frac{\gamma}{r}} = b$ e $\lambda u_0 = a$, encontra-se

$$r \left(1 + a \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{r} b} \right) \right) - \Omega = 0 \quad (16)$$

Com a Eq. (16) pode-se obter resultados computacionais para o fluxo de tráfego de pedestres.

5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A solução do modelo matemático é obtida por meio de simulação computacional realizada no espaço e no tempo de domínio. Levando-se em conta as considerações já feitas, resolve-se o seguinte exemplo:

Considera-se uma pista de comprimento L metros, por D metro de largura, como mostrado na Fig. 2.



Figura 2: Ambiente da caminhada dos pedestres

O modelo computacional é gerado para um tempo total de t_t minutos. Para $t = 0$ e $x = 0$ não há pedestres no sistema, ou seja, a condição inicial é $\rho(0, t) = 0$ e $\rho(x, 0) = 0$.

A partir do instante inicial, os pedestres começam a entrar pelas laterais desta pista em todos os pontos (para todo x até $x = L$), durante um período de t_κ minutos, com uma média de 1 pedestre a cada t_φ minutos, com $t_\varphi < t_\kappa < t_t$, ou seja, $g(t) = n$ (especificado no modelo como $g_1(t)$), onde n é uma constante e $n = \frac{1}{t_\varphi 60}$ (ped/s). No tempo restante não entra ninguém, apenas analisa-se o comportamento do fluxo já existente que segue até todos os pedestres chegarem a posição final.

6 RESULTADOS

A pista analisada computacionalmente tem 600 metros de comprimento por 1 metro de largura.

O modelo é gerado para um tempo total de $t_t = 2000$ segundos. Para $t = 0$ e $x = 0$ não há pedestres no sistema, ou seja $\rho(0, t) = 0$ e $\rho(x, 0) = 0$. Tem-se, a partir do instante inicial, que os pedestres começam a entrar pelas laterais desta pista em todos os pontos (para todo x até $x = 600$), durante um período de 30 minutos, com uma média de 1 pedestre a cada 5 minutos. Após este teste, o mesmo foi feito para uma entrada média de 1 pedestre a cada 6 minutos e em seguida, 1 pedestre a cada 10 minutos.

Nos três casos, após os 30 primeiros minutos, não há mais entrada de pedestres, apenas analisa-se o comportamento do fluxo já existente até que todos os pedestres cheguem a posição final.

Os dados utilizados para gerar as curvas do gráfico são apresentados na tabela a seguir

		u_0	ρ_j	γ
Weidmann	W2	1,34	5,4	1,913
Ásia	A2	1,48	7,7	2,1021
Europa	E2	1,69	6	1,638

Tabela 1: Valores experimentais para os parâmetros especificados.

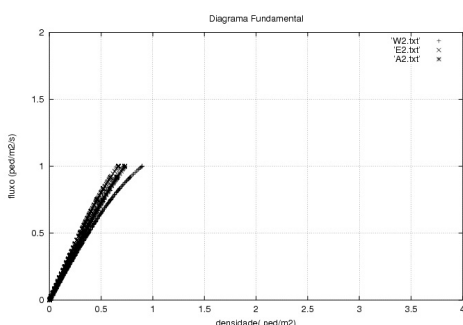


Figura 3: Fluxo de 1 pedestre a cada 5 minutos.

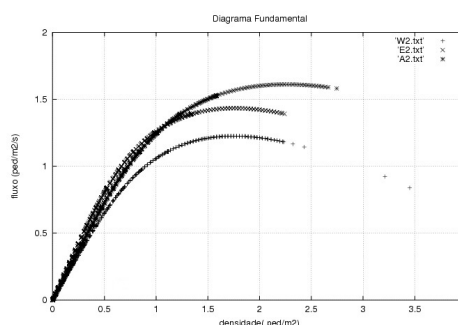


Figura 4: Fluxo de 1 pedestre a cada 6 minutos.

Quando a densidade atinge o seu valor máximo ρ_j o fluxo zera, ou seja, os pedestres param de caminhar. Quando isso ocorre muito rapidamente, como na Fig. (3), os pedestres não conseguem chegar até o final da caminhada. Esse efeito se dá devido a densidades muito altas, que caracterizam o fluxo de pedestres em fase de fluxo turbulento.

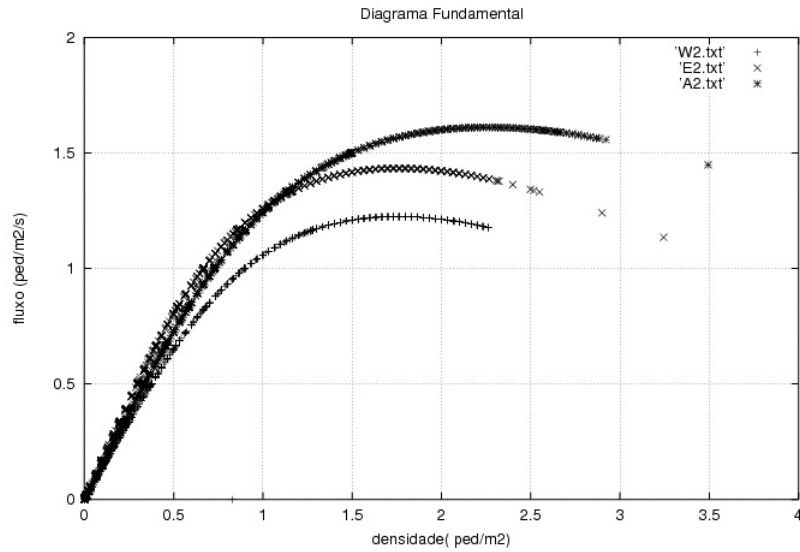


Figura 5: Fluxo de 1 pedestre a cada 10 minutos.

Na Fig. (4), pode-se observar que a pista demorou um pouco mais para encher, assim os pedestres percorrem a estrutura de caminhada de forma mais adequada. Essa fase, onde se possui uma densidade intermediária, é conhecida como *stop-and-go waves* (Klingsch et al., 2010).

As três curvas obtidas na Fig. (5) podem ser comparadas as curvas retiradas do artigo de Bruno et al. (2011)², em um artigo anterior dos mesmos autores (Venuti e Bruno, 2007) e no artigo de Daamen (2004), onde pode-se verificar que o método numérico corresponde adequadamente ao que se esperava e os gráficos são muito semelhantes. Também é observado nesta figura, que conforme a uma diminuição da densidade de pedestres, o fluxo sofre alterações de fase. Da fase *stop-and-go wave* o fluxo transforma-se em fluxo laminar. Isso também poderia ser observado no caso de se manter o valor para a densidade dos pedestres e aumentar o tempo de análise, como pode ser visto em (Johansson e Helbing, 2010) através da Fig. (6).

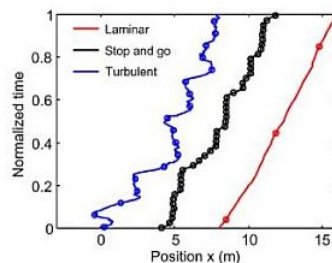


Figura 6: Representa a trajetória dos pedestres em cada uma das três fases: fluxo laminar, *stop-and-go waves* e fluxo turbulento. Há um marcador de tempo a cada 5 segundos, e o tempo foi normalizado para permitir a comparação intuitiva das trajetórias nas diferentes fases.

A curva W2 que representa os dados de Weidmann podem ser comparadas a curva de Venuti

²Venuti, F. and Bruno, L. Non-local first-order modelling of crowd dynamics : a multidimensional framework with applications. **Applied Mathematical Modelling**. Aceito para publicação

e Bruno em situações de lazer. Já a curva feita com dados Europeus onde, tanto a velocidade, como a densidade são maiores que as de Weidmann, podem ser comparadas a curva em viagens e eventos. Por último tem-se a curva baseada em dados da Ásia, onde a densidade por metro quadrado é muito maior do que em outros lugares, devido ao tamanho dos pedestres. A velocidade desses pedestres também é maior nesse continente, sendo que essa curva pode ser comparada com a curva da Fig. (7) quando refere-se a situações de hora do rush e negócios.

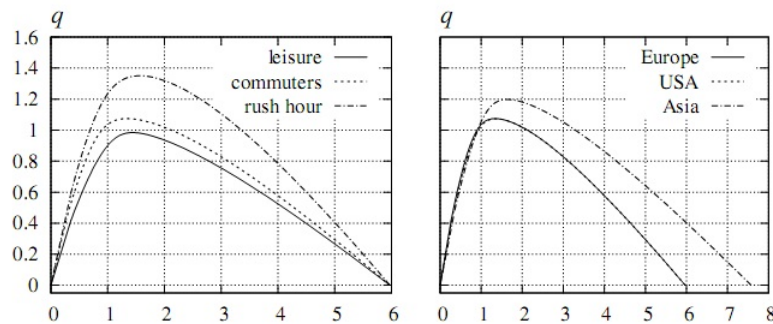


Figura 7: Figura retirada de Venuti e Bruno (2007) e de Bruno et al. (2011), onde cada curva varia de acordo com o valor de γ .

7 CONCLUSÕES

Pode-se concluir que fazendo-se uma escolha adequada da pista e das entradas de pedestres, um modelo hidrodinâmico macroscópico fechado com a equação fenomenológica de Kladek reformulada por Venuti e Bruno, é eficiente e traz respostas rápidas quando resolvido pelo método das diferenças finitas implícito.

REFERÊNCIAS

- Bellomo N., Delitala M., e Coscia V. On the mathematical theory of vehicular traffic flow i. fluid dynamic and kinetic modelling. *Mathematical Models E Methods in Applied Sciences*, 12(12):1801–1843, 2002.
- Bruno L., Venuti F., Tosin A., e Tricerri P. Non-local first-order modelling of crowd dynamics : a multidimensional framework with applications. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1):426–445, 2011.
- Castanharo G. *Aplicação de Modelos Hidrodinâmicos no Contexto de Previsão de Afluências a Reservatórios*. Dissertação de mestrado, UFPR - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2003.
- Daamen W. *Modelling passenger flows in public transport facilities*. Tese de doutorado, TU Delft, Delft University of Technology, 2004.
- Fortuna A.O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2000.
- Greenberg H. An analysis of traffic flow. *Operationa Research*, 7(1):79–85, 1959.
- Greenshield B.D. A study of traffic capacity. *Highway Research Board Proceedings*, 14:448–477, 1935.
- Helbing D. A fluid dynamic model for the movement of pedestrians. *Complex Systems*, 6:391–415, 1992.

- Helbing D. e Mulnár P. Social force model for pedestrian dynamics. *Phys. Rev. E*, 51(5):4282–4286, 1995.
- Hughes R. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B*, 36:507–535, 2002.
- Johansson A. e Helbing D. *Analysis of empirical trajectory data of pedestrians*, capítulo Part 1, páginas 202–214. Springer, New York, 2010.
- Klingsch W., Rogsch C., Schadschneider A., e Schreckenberg M. *Pedestrian and Evacuation Dynamics 2008*. Springer, Hardcover, 2010.
- Li R.M. *Mathematical Modelling of Response from Small Watershed*. Tese de doutorado, Colorado State University, Colorado, USA, 1974.
- Sissom L. e Pitts D.R. *Fenômenos de Transporte*. Editora Guanabara, 1988.
- Underwood R.T. Speed, volume, and density relationships. quality and theory of traffic flow. *Yale Bureau of Highway Traffic*, páginas 141–181, 1961.
- Venuti F. e Bruno L. An interpretative model of the pedestrian fundamental relation. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(4):194–200, 2007.
- Weidmann U. *Transporttechnik der Fußgänger*. Institut Für Verkehrsplanung, ETH Zürich, 1993.