

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA NUMÉRICA EM LINGUAGEM DELPHI VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE PLACA SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS DINÂMICOS

Wagner Q. Silva ^a, Raimundo P. Vasconcelos ^b

^a *Doutorando na Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, Campus Universitário, São Carlos – SP, Brasil, wagner1@sc.usp.br*

^b *Professor da Universidade Federal do Amazonas, Av. Gen. Rodrigo Octávio Jordão Ramos, 3000, Campus Universitário, Manaus – AM, Brasil, vasconcelos@ufam.edu.br*

Palavras chave: Dinâmica das Estruturas, Placas, Método dos Elementos Finitos, Delphi.

Resumo: Os avanços da engenharia dos materiais e das técnicas construtivas têm tornado possível a construção de estruturas de piso mais leves, buscando assim o maior aproveitamento de espaço físico com menor consumo de material. No entanto, é importante observar que a redução das seções transversais aliada ao aumento dos vãos tende a elevar o nível de vibração de uma estrutura do tipo placa podendo comprometer sua estabilidade. Uma análise dinâmica é necessária principalmente se essa estrutura estará submetida às ações oscilatórias produzidas por ação de pessoas ou de máquinas. Neste trabalho foi desenvolvido um programa para análise elástica de placas submetidas à ação de forças estáticas e dinâmicas. Através do Método dos Elementos Finitos e adotando-se o processo de integração numérica de Newmark, foi desenvolvido um código computacional inteiramente escrito em linguagem Delphi 6. Além de oferecer um bom desempenho numérico, essa linguagem permite a implementação de uma interface amigável para plataforma Windows, tornando o programa uma ferramenta prática e de fácil manuseio. Consideram-se carregamentos uniformemente distribuídos, sendo as ações dinâmicas simuladas através da variação da intensidade máxima do carregamento. A variação é dada por uma força normalizada de variação senoidal característica das forças induzidas por máquinas e atividades humanas, cabendo ao usuário definir a frequência de excitação em função do tipo de ação que dá origem às oscilações. Assim, o programa permite a análise de outros tipos de excitações. Os resultados obtidos para exemplos práticos foram comparados às soluções analíticas e demonstram a eficiência e o adequado funcionamento da ferramenta. O programa permite tanto análise estática quanto dinâmica para o cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de piso retangular. Dessa forma, engenheiros e projetistas podem ter a disposição uma ferramenta prática para realizar verificações de segurança em projetos estruturais.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas a engenharia estrutural tem registrado diversos casos de problemas de vibrações em estruturas sob a ação de carregamentos dinâmicos. De fato, cada vez mais se observa que as estruturas estão menos robustas do que antigamente. Isto se deve principalmente aos grandes avanços alcançados com a ciência dos materiais e das novas tecnologias, que permitiram o surgimento de novos materiais mais resistentes, como concretos de alto desempenho, materiais fibrosos, entre outros, além das de novas e sofisticadas técnicas construtivas. Aliado a isso, temos também um notável aumento do emprego de modelos de análise de estruturas cada vez mais refinados e eficientes, através de programas computacionais mais precisos. Tudo isso têm proporcionado a execução de estruturas cada vez mais esbeltas, flexíveis e com menores seções transversais, portanto, mais suscetíveis as ações de natureza dinâmica. Dentre os diversos tipos de estruturas mais afetadas por problemas de vibrações, destacam-se os pisos de lajes de edificações sujeitas a algum tipo de atividade humana (Varela, 2004).

Embora sejam muitos os tipos de atividades humanas possíveis de ocorrerem em estruturas de piso, as que envolvem pulos e/ou dança num movimento sincronizado entre pessoas podem ser consideradas as mais importantes para a análise dinâmica. A ação provocada por esse tipo de carregamento, frente às características usuais das lajes em edifícios residenciais ou comerciais, pode produzir um efeito danoso ao comportamento da estrutura, principalmente com relação aos estados limites de serviço (Faísca, 2003).

No entanto, até hoje muitas estruturas tem sido projetadas e dimensionadas considerando-se apenas carregamentos estáticos majorados. Mesmo para estruturas que venham a sofrer as ações de cargas dinâmicas como, por exemplo, edifícios destinados à atividade de ginástica ou salões de dança, o cálculo estrutural é usualmente realizado com a equivalência de cargas estáticas. Muitas vezes esse tipo de simplificação é adotado em razão da falta de ferramentas adequadas para uma análise dinâmica. É importante que o profissional em projetos de engenharia estrutural disponha de tal ferramenta para que possa acompanhar os avanços tecnológicos e ampliar sua visão em análise de estruturas, principalmente referente à análise dinâmica.

Sendo assim, neste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta numérica que possibilita a análise desse tipo de classe de estrutura. Através do Método dos Elementos Finitos foi desenvolvido um código computacional, inteiramente escrito em linguagem Delphi (versão 6) para análise elástica linear de placas retangulares submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos.

O programa foi desenvolvido utilizando-se os recursos da programação orientada ao objeto, principalmente na montagem da interface, tornando-o assim uma ferramenta prática e de fácil manuseio. Utiliza-se o elemento finito de placa retangular de 4 nós e 12 graus de liberdade, com um pequeno gerador de malha interno do programa. Monta-se a matriz de rigidez da estrutura e a solução é obtida pelo Método de Gauss. No caso da análise dinâmica, utiliza-se o processo de integração numérica de Newmark, adotando para a variação do carregamento uma força normalizada de variação senoidal, característica das forças induzidas por máquinas e atividades humanas. Cabe ao usuário definir a frequência de excitação em função do tipo de ação que dá origem a estas oscilações.

Assim, a ferramenta permite a análise de estruturas convencionais de piso sob ação tanto de carregamento estático como dinâmico. Um exemplo prático será apresentado para demonstrar as aplicações e os resultados serão comparados às soluções analíticas para comprovar a eficiência do programa desenvolvido.

2. ANALISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS DE PISO

Em uma edificação convencional a estrutura principal pode ser formada, por exemplo, por pórticos com elementos de vigas e pilares. Além destes, farão também parte da estrutura principal as lajes. A função das lajes é a de criar um novo patamar na edificação constituindo assim a estrutura dos pisos elevados, além de poder conferir certa rigidez ao pórtico.

Uma estrutura de laje poderá estar submetida a diferentes tipos de carregamentos, dependendo da utilização do ambiente composto por ela. O peso próprio e peso de material de revestimento será sempre uma força estática a ser considerada. Podem atuar ainda cargas distribuídas linearmente, como no caso das paredes de alvenarias, parapeitos, corrimão, tubulações de incêndio, etc. Já para as cargas ditas acidentais é preciso avaliar o tipo de utilização daquela estrutura. A norma brasileira NBR 6120 estabelece os valores de carregamentos distribuídos por área para considerações das cargas acidentais em projetos.

Com relação às ações dinâmicas, as lajes podem estar sujeitas às vibrações de máquinas e equipamentos, ou de atividades humanas. Essas atividades podem ser as mais diversas entre dançar, caminhar, correr, saltar, etc. Observam-se estas situações principalmente em edifícios destinados a atividades de ginástica, esportes e salões de dança e eventos.

Para a análise estrutural dos elementos do tipo laje em concreto armado pode-se fazer uso dos princípios advindos da Teoria das Placas. De fato, em análise estrutural as estruturas do tipo laje são classificadas como elementos de superfície. Os elementos de superfície, por sua vez, são divididos em estruturas do tipo placa, chapas ou cascas. No caso das lajes, estas são analisadas como elementos do tipo placas delgadas pelas suas características usuais. Existem também as chamadas placas espessas. A diferença está na consideração dos efeitos ocasionados pelo esforço cortante, pois para o caso das placas delgadas a força cortante pode ser considerada desprezível frente à ação preponderante dos esforços de flexão. Neste trabalho, portanto, faz-se uso da teoria das placas delgadas.

Por definição as placas são elementos bidimensionais com espessura h muito pequena, se comparada às demais dimensões largura e comprimento. O carregamento atua perpendicularmente ao plano da placa e o elemento trabalha basicamente à flexão.

Segundo a Lei de Hooke, para um material no regime elástico linear, haverá uma relação entre a tensão e a deformação que pode ser expressa (em termos unidimensionais) por $\sigma = \varepsilon \cdot E$. Nesta relação a tensão σ se relaciona com a deformação ε através do módulo de elasticidade E do material, e isso pode ser definido para cada direção de tensão. Sabe-se ainda que as tensões são proporcionais aos esforços internos ocasionados na estrutura, e as deformações podem, por sua vez, ser relacionadas com os deslocamentos por compatibilização geométrica. É possível então estabelecer uma relação entre os esforços atuantes e os deslocamentos ocorridos a partir do tratamento matemático das relações de equilíbrio, compatibilidade e da lei constitutiva do material. Com isso chega-se a equação diferencial das placas que relaciona os deslocamentos verticais w , em pontos x e y no plano da placa, com os carregamentos P atuantes na superfície da placa, na forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1)$$

onde D é uma constante que representa a rigidez da placa a flexão, dada por

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Neste caso, a constante D pode ser entendida como equivalente à rigidez das vigas dadas

pelo produto EI (módulo de elasticidade vezes momento de inércia da seção). A própria equação (1) pode ser vista como a “superfície elástica” da placa, em analogia a linha elástica da teoria de vigas. Mas no caso das placas, haverá influência mútua entre as diferentes direções de deformação, por meio do coeficiente de Poisson ν .

É importante ressaltar que esta equação representa apenas materiais isotrópicos, ou seja, aqueles para o qual as propriedades físicas do material são as mesmas em todas as direções. No caso das lajes de concreto armado podemos considerá-las como elementos de placa isotrópica. A dedução completa desta equação diferencial pode ser encontrada no trabalho de Martinelli (2003).

Conhecida a equação que relaciona o deslocamento vertical com os esforços atuantes na estrutura de placa, poder-se-á partir então em busca de uma solução para esta. No entanto, por se tratar de uma equação diferencial parcial de quarta ordem a sua solução exata será difícil e complexa. Por este motivo faz-se necessário a utilização de um método numérico aproximado.

O Método dos Elementos Finito é um método bastante adequado a este tipo de análise, permitindo a implementação de um programa de computador que possa calcular deslocamentos e esforços em uma estrutura de placa. Basta que a estrutura real seja discretizada em elementos finitos ligados através de nós. A escolha de um elemento finito conveniente depende do tipo de problema que se pretende analisar.

3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. O elemento finito retangular de placa

A teoria das placas explica como se comporta um elemento sólido plano com determinada espessura quando submetido a ações de carregamentos que provocam principalmente a flexão transversal. No entanto, como a equação advinda dessa teoria é de difícil solução, o Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado através da discretização da estrutura de placa em diversos elementos menores. A discretização pode ser realizada de várias maneiras diferentes sendo possível estudar formas geométricas variadas (Cook, 1989). No caso mais comum e, no âmbito desta pesquisa, estudam-se apenas os elementos discretos retangulares como mostrado na Figura 1 a seguir.

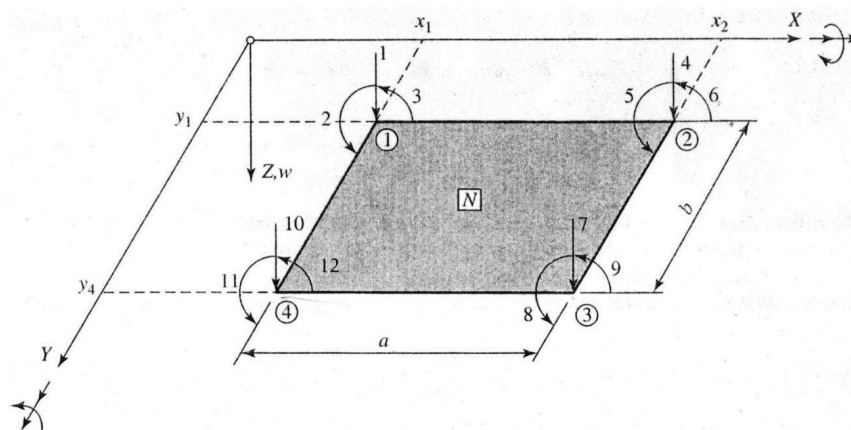


Figura 1 – Elemento de Placa Retangular N com 4 nós e 12 graus de Liberdade

FONTE: CLOUGH, 1993.

Este elemento finito retangular foi apresentado inicialmente por Adini e Clough em 1961 (Soriano, 2003). Pode ser aplicado a problemas em que uma discretização simplificada em malha retangular é adotada. O elemento possui quatro nós, onde atuam três deslocamentos possíveis em cada vértice, num total de doze graus de liberdade por elemento. Como visto na Figura 1, as três direções de deslocamentos correspondem à translação vertical w (eixo z), rotação em torno do eixo x e rotação em torno do eixo y . Respectivamente, os deslocamentos relacionam-se aos esforços cortantes, momentos fletores na direção x e momentos fletores na direção y . O elemento possui dimensões a , b e espessura h . É importante notar que, quanto maior for a discretização da estrutura e menor for o elemento discreto, maior precisão será obtida nos resultados, porém o custo computacional deverá aumentar.

Monta-se então uma malha de elementos ligados por seus nós, sendo que cada elemento possui uma matriz de rigidez dita elementar. Entende-se por rigidez a capacidade de resistir aos deslocamentos que lhe são impostos por uma força externa. A rigidez depende assim da geometria do elemento e das características do material que o compõe. No Método dos Elementos Finitos faz-se a montagem da matriz de rigidez global da estrutura a partir da matriz de rigidez elementar utilizando a regra de correspondência entre os índices dos nós e graus de liberdade interligados. Para o elemento discreto retangular a matriz de rigidez é dada como mostra a expressão (3) a seguir (Szilard, 2004).

$$\mathbf{K}_e^{(N)} = \frac{Eh}{180(1-\nu^2)} \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 F & G & -H & L & -M & -N & O & -P & -Q & I & J & -K \\
 & R & -Z & -M & T & \phi & P & U & \phi & -J & S & \phi \\
 & & V & N & \phi & X & Q & \phi & Y & -K & \phi & W \\
 & & & F & G & H & I & J & K & O & -P & Q \\
 & & & & R & Z & -J & S & \phi & P & U & \phi \\
 & & & & & & V & K & \phi & W & -Q & \phi & Y \\
 & & & & & & & F & -G & H & L & M & N \\
 & & & & & & & & R & -Z & M & T & \phi \\
 & & & & & & & & & V & -N & \phi & X \\
 & & & & & & & & & & F & -G & -H \\
 & & & & & & & & & & & R & Z \\
 & & & & & & & & & & & & V
 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde os termos da matriz são dados como segue:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{(42 - 12\nu + 60\rho^2 + 60\rho^{-2})h^2}{ab}, & Q &= \frac{[15\rho^{-1} - 3(1 - \nu)\rho]h^2}{a}, \\
 G &= \frac{(30\rho + 3\rho^{-1} + 12\nu\rho^{-1})h^2}{b}, & R &= [20\rho + 4(1 - \nu)\rho^{-1}]h^2, \\
 H &= \frac{(30\rho^{-1} + 3\rho + 12\nu\rho)h^2}{a}, & S &= [10\rho - (1 - \nu)\rho^{-1}]h^2, \\
 I &= \frac{(-42 + 12\nu - 60\rho^2 + 30\rho^{-2})h^2}{ab}, & T &= [10\rho - 4(1 - \nu)\rho^{-1}]h^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{[30\rho + 3(1-\nu)\rho^{-1}]h^2}{b}, & U &= [5\rho + (1-\nu)\rho^{-1}]h^2, \\
 K &= \frac{(15\rho^{-1} - 3\rho - 12\nu\rho)h^2}{a}, & V &= [20\rho^{-1} + 4(1-\nu)\rho]h^2, \\
 L &= \frac{(-42 + 12\nu - 60\rho^{-2} + 30\rho^2)h^2}{ab}, & W &= [10\rho^{-1} - 4(1-\nu)\rho]h^2, \\
 M &= \frac{(-15\rho + 3\rho^{-1} + 12\nu\rho^{-1})h^2}{b}, & X &= [10\rho^{-1} - (1-\nu)\rho]h^2, \\
 N &= \frac{[30\rho^{-1} + 3(1-\nu)\rho]h^2}{a}, & Y &= [5\rho^{-1} + (1-\nu)\rho]h^2, \\
 O &= \frac{(42 - 12\nu - 30\rho^2 - 30\rho^{-2})h^2}{ab}, & Z &= (15\nu h^2), \\
 P &= \frac{[-15\rho + 3(1-\nu)\rho^{-1}]h^2}{b}, & \phi &= 0, \\
 \rho &= \frac{a}{b} \quad \text{and} \quad \rho^{-1} = \frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

Monta-se também o vetor de forças nodais \vec{F} , onde para cada direção de deslocamento há um valor correspondente de força. Neste trabalho, somente consideram-se as forças externas verticais, sendo que os carregamentos distribuídos por área são transformados em cargas nodais equivalentes e estes valores lançados no vetor pela regra de correspondência.

As condições de contorno são aplicadas ao sistema montado através da chamada técnica dos zeros e um, atribuindo o índice 1 ou 0 para restringir ou não um determinado grau de liberdade, a depender do tipo de apoio nos bordos. Neste trabalho foram implementadas somente duas situações, por serem as mais comuns em lajes convencionais: placas com todos os bordos com apoio simples ou com todos os bordos engastados.

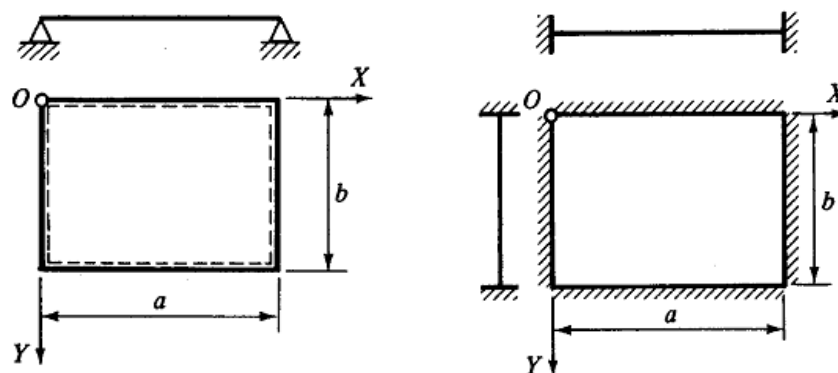


Figura 2 – Tipos de condições de contorno: (a) apoio simples e (b) bordos engastados

Para a análise estática do problema monta-se, portanto a matriz de rigidez global \mathbf{K} , o vetor de forças nodais \vec{F} e resolve-se o sistema algébrico, escrito na forma

$$\mathbf{K} \cdot \vec{x} = \vec{F} \quad (4)$$

onde \vec{x} é o vetor dos deslocamentos nodais a ser calculado.

4. ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS

A análise dinâmica de placas engloba novas variáveis que fazem parte do fenômeno do movimento oscilatório. Sabe-se que um corpo em movimento pode ser estudado através da relação entre a sua massa e a força atuante neste, de acordo com as leis de Newton. Essa relação é dada como sendo a aceleração do movimento deste corpo. Sabe-se que o deslocamento é função da força na proporção inversa da rigidez, e que os corpos ao vibrarem possuem certo amortecimento, que pode ser definido em função da própria massa e da rigidez do sistema, sendo relacionado à velocidade deste corpo.

Dessa forma, em análise dinâmica de estruturas pode-se escrever estas relações de forma a encontrar a equação conhecida como equação geral do movimento, na forma

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{x}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{x}} + \mathbf{K} \cdot \vec{x} = \vec{F}(t) \quad (5)$$

Verifica-se que para o caso particular de uma aceleração e velocidades nulas, e com uma força que não varia com o tempo, a expressão (5) é reduzida à expressão (4) apresentada anteriormente, que nada mais é do que a expressão da elasticidade dos materiais, onde o deslocamento é diretamente proporcional a força aplicada e inversamente proporcional à rigidez do elemento. Em outro caso particular, onde a força $\vec{F}(t)$ é nula, diz-se que o movimento é de vibração livre.

Assim, para a análise dinâmica é necessário resolver a equação do movimento, calculando deslocamentos, velocidades e acelerações no sistema mecânico ocasionados pela variação da força no tempo. Serão apresentados a seguir os conceitos de frequência natural, matriz de massa e amortecimento, necessários para a implementação computacional da rotina de análise dinâmica.

4.1. Frequência de vibração da estrutura

A análise dinâmica pode ser caracterizada através de três propriedades fundamentais: os modos naturais de vibração, os fatores de amortecimento, e as frequências naturais da estrutura.

As frequências naturais dependem tanto das características geométricas da estrutura quando físicas do material que a compõe. Estes valores podem ser obtidos de forma aproximada utilizando também o Método dos Elementos Finitos, porém, por questões práticas, para este trabalho optou-se por utilizar a frequência analítica, calculada diretamente a partir dos dados iniciais de entrada. Com isso, reduz-se o custo computacional, visto que para o tipo de análise desejada somente interessa o valor da primeira frequência natural, e os valores calculados analiticamente apresentam boa precisão. É importante ressaltar que, em estruturas convencionais, a primeira frequência é sempre a mais preponderante ao movimento oscilatório, sendo os demais modos de vibração insignificantes frente a este.

Dessa forma, o programa desenvolvido calcula os valores da frequência fundamental do primeiro modo da estrutura de acordo com o tipo de vinculação dos bordos da placa. Para placas com bordos simplesmente apoiados a primeira frequência é dada na seguinte forma (Szilard, 2004)

$$\omega_{11} = \pi^2 \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \quad (6)$$

Na (6), o termo \bar{m} é a massa específica por unidade de área da laje.

Para placas com todos os bordos engastados a frequência do primeiro modo é dada aproximadamente por

$$\omega_{11} \approx 12 \sqrt{\frac{7}{8} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{4}{7} \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right)} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \quad (7)$$

4.2. A matriz de massa

Todo elemento estrutural possui massa, e assim, quando aplicada uma força sobre o elemento, este deverá apresentar uma aceleração na direção da força aplicada, conforme as leis da física. O conceito de massa está relacionado com o movimento assim como a rigidez está relacionada ao deslocamento.

A massa implica não só em um peso atuando sobre a estrutura, mas também é uma característica intrínseca do elemento estrutural que influenciará diretamente no movimento oscilatório deste corpo. Isso fica claro já no cálculo da frequência natural, que depende da massa específica conforme visto no item anterior.

A análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos permite a montagem de uma matriz de massa da estrutura \mathbf{M} de forma semelhante à matriz de rigidez. Os termos que constituem a matriz de massa elementar dizem respeito às características de inércia ao movimento dos corpos, relacionadas às direções de deslocamentos.

A matriz de massa elementar para o caso de placa pode ser dada pela expressão (8) a seguir (Szilard, 2004).

$$\mathbf{M} = \frac{\mu ab}{25,200} \times \begin{bmatrix} 3454 & & & & & & & & & & & & & \\ 461 & 80 & & & & & & & & & & & & \\ -461 & -63 & 80 & & & & & & & & & & & \\ 1226 & 199 & -274 & 3454 & & & & & & & & & & \\ 199 & 40 & -42 & 461 & 80 & & & & & & & & & \\ 274 & 42 & -60 & 461 & 63 & 80 & & & & & & & & \\ 394 & 116 & -116 & 1226 & 274 & 199 & 3454 & & & & & & & \\ -116 & -30 & 28 & -274 & -60 & -42 & -461 & 80 & & & & & & \\ 116 & 28 & -30 & 199 & 42 & 40 & 461 & -63 & 80 & & & & & \\ 1226 & 274 & -199 & 394 & 116 & 116 & 1226 & -199 & 274 & 3454 & & & & \\ -274 & -60 & 42 & -116 & -30 & -28 & -199 & 40 & -42 & -461 & 80 & & & \\ -199 & -42 & 40 & -116 & -28 & -30 & -274 & 42 & -60 & -461 & 63 & 80 & & \end{bmatrix} \quad (8)$$

Symmetric

4.3. O Amortecimento

O movimento, conforme mostra a equação (5), é caracterizado pela variação da energia potencial e cinética. O amortecimento pode ser definido como a perda de energia do sistema mecânico e diversos fatores contribuem para que ocorra essa perda de energia. Dentre estes, podemos citar o atrito do corpo com o meio fluido (no caso o ar) e a deformação do próprio corpo que gera um atrito interno entre as partículas.

O amortecimento da estrutura é fortemente influenciado pela geometria da mesma. Segundo Rayleigh, um sistema pode ser representado pela matriz de amortecimento \mathbf{C} , que por sua vez é proporcional às matrizes de massa \mathbf{M} e rigidez \mathbf{K} (Clough, 1993). Dessa maneira, as relações entre estas matrizes são estabelecidas por coeficientes numéricos a_0 e a_1 , de tal forma que

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (9)$$

onde

$$a_0 = 2\omega_n \cdot \xi_n \quad (10)$$

$$a_1 = \frac{2\xi_n}{\omega_n} \quad (11)$$

sendo ω_n a frequência natural da estrutura em Hz do n -ésimo modo de vibração, e ξ_n a taxa percentual de amortecimento do material do n -ésimo modo.

Observa-se que, para valores de frequências baixos a relação da expressão (9) é muito mais influenciada pela matriz de massa através do termo a_0 calculado pela equação (10). Somente para o caso de altas frequências a matriz de rigidez terá influência significativa no amortecimento. Sabe-se que, para o primeiro modo de vibração, as estruturas convencionais de piso apresentam frequências naturais de valores bastante reduzidos.

Conclui-se, portanto que, neste caso, basta calcular o valor de a_0 e a matriz de amortecimento será dada por

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} \quad (12)$$

Assim, o programa calcula a matriz de amortecimento a partir da matriz de massa, definida conforme o item 4.2.

4.4. Análise de vibração

Diversos são os métodos para que possa ser avaliada a vibração de uma estrutura em valores numéricos. Uma forma prática e bastante conveniente para análise dos estados de serviço é a análise de vibração através do cálculo da variação dos deslocamentos de cada nó da estrutura discretizada em função do tempo (Hartog, 1985).

A equação do movimento é, no entanto, uma equação diferencial que não possui solução fechada. Por isso, a solução por métodos numéricos aproximados auxilia na análise de vibração para o cálculo dos deslocamentos e também das velocidades e acelerações.

Assim, o Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado, sendo agora necessária a implementação de uma técnica de integração numérica para resolver a equação do movimento e obter os valores de deslocamentos, velocidades e acelerações nodais.

Dentre os métodos de integração mais conhecidos está o Método de Newmark. Este método possibilita uma aproximação bastante conveniente para a variação da aceleração em cada intervalo de tempo.

O processo consiste basicamente em supor que a variação da aceleração do sistema ocorre de forma linear através de coeficientes numéricos pré-estabelecidos, para cada intervalo de tempo Δt . Assim, conhecendo-se a aceleração \ddot{x}_i que corresponde ao tempo t_i , pode-se calcular a aceleração \ddot{x}_{i+1} para o tempo t_{i+1} . Considera-se para tanto que a variação da mesma é linear entre estes dois pontos no tempo.

Essa variação é representada pelos termos numéricos α e β que são parâmetros que induzem a variação linear em cada intervalo, de maneira que a integração desses intervalos correspondem à variação real de forma aproximada.

A expressão de Newmark para o cálculo dos deslocamentos permite, portanto calcular o deslocamento de um ponto em um tempo t_{i+1} a partir do tempo t_i de acordo com a equação (13) a seguir (Rao, 1996).

$$\bar{x}_{i+1} = \left[\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right]^{-1} \times \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{i+1} + \mathbf{M} \left(\frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \bar{x}_i + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\bar{x}}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\bar{x}}_i \right) + \\ + \mathbf{C} \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \bar{x}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\bar{x}}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \ddot{\bar{x}}_i \right) \end{array} \right\} \quad (13)$$

É necessário, porém conhecer de antemão a velocidade e o deslocamento inicial para então calcular a aceleração inicial do sistema. Em seguida, são atribuídos valores adequados para os parâmetros α e β . É dado então início ao processo numérico, calculando o deslocamento para t_{i+1} a partir do tempo t_i , iniciando por $i = 0$.

Pode-se considerar, para análise de lajes convencionais, que a estrutura parte do repouso. Sendo assim a velocidade e o deslocamento iniciais são nulos. Os valores de α e β são tomados como sendo $\alpha = 0,25$ e $\beta = 0,5$. Isso se deve pelo fato de ter sido comprovado experimentalmente que para valores de β iguais ou inferiores a 0 resultam em um comportamento que corresponde a uma vibração auto-excitada (Rao, 1996). Dessa forma, é como se houvesse uma auto-vibração da estrutura, e os deslocamentos crescem exageradamente. Constatou-se também que para valores de β maiores do que 0,5 um amortecimento positivo é introduzido ao sistema e isso acaba por reduzir a precisão do mesmo, pois o amortecimento considerado será maior do que o real. Portanto, neste trabalho adotaram-se os valores recomendados por Rao e Clough.

O processo, por se tratar de uma integração numérica, só terá funcionalidade para análises em intervalos de tempos de integração pequenos. De acordo com vários estudos de vibração, pôde-se verificar que os métodos numéricos devem utilizar passos de tempo inferiores a T/π , onde T é o período, ou seja, o inverso da frequência. A esse intervalo "limite" dá-se o nome de $\Delta t_{crít.}$.

Para a análise de vibração da estrutura também é necessário conhecer a função matemática que representa a variação da força aplicada sobre a estrutura, bem como o intervalo de tempo total que se pretende analisar. Essa força pode ter diversas formas de variação (senoidal, séries de cossenos, exponencial, entre outras) em função do tipo de ação mecânica que a provoca. Neste trabalho optou-se por desenvolver uma sub-rotina onde o programa pode ler um arquivo texto que contenha o nível de variação para cada intervalo de tempo, sendo o intervalo total igual ao número de linhas deste arquivo. Assim, a ferramenta desenvolvida possibilitará a análise de qualquer tipo de variação de força, desde que o usuário monte corretamente o arquivo texto a ser lido.

Assim sendo, para atender aos objetivos deste trabalho, será fornecido junto com o programa um arquivo padrão com variação senoidal, característica das forças induzidas por atividades humanas, na forma

$$p = p_0 \cdot \text{sen}(\omega \Delta t) \quad (14)$$

onde p_0 é o valor da amplitude máxima a ser fornecido pelo usuário, ω é a frequência da força e Δt o intervalo de tempo. Este arquivo servirá de base para as análises dinâmica de

estruturas de piso convencionais. Caso seja necessária a avaliação de estruturas de placa submetidas a outros tipos de oscilações, o usuário pode confeccionar um novo arquivo texto com os dados de variação da força dinâmica e frequência de excitação adotados.

5. APRESENTAÇÃO DA FERRAMENTA SIAN LAJES

O algoritmo empregado na ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho é baseado nas matrizes e equações apresentadas nos itens anteriores.

É importante garantir a eficiência numérica do programa para evitar que erros numéricos interfiram nos resultados finais. A linguagem Delphi é uma linguagem dita de alto nível e que permite uma ótima e adequada eficiência numérica para este tipo de problema. Além disso, o Método dos Elementos Finitos e a técnica de integração de Newmark têm oferecido ótimos resultados em diversos trabalhos de análise dinâmica encontrados na literatura técnica.

Porém, outro ponto chave para a funcionalidade de um programa de computador é a sua interface gráfica onde o usuário pode trabalhar inserindo dados de entrada e obtendo os resultados do programa para análise. É importante que a interface seja de fácil manuseio, evitando assim erros e auxiliando o processo de análise estrutural.

Além do mais, deve-se desenvolver um programa que possa ser disponibilizado aos profissionais de engenharia de estruturas, auxiliando-os na análise dinâmica de lajes, e para isso é importante que a interface do programa seja a mais amigável o possível.

Dessa forma, a ferramenta computacional aqui, desenvolvida em linguagem Delphi, nomeada como SIAN Lajes – Sistema de Análise para estruturas de Lajes – permite ao usuário o cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de lajes retangulares sujeitas a carregamentos de natureza estática e dinâmica.

A seqüência de inserção de dados é feita de maneira que se introduza uma variável à medida que seja necessária para o cálculo de determinada etapa, conforme o fluxo interno do código. A janela de inicialização (Figura 3) permite a identificação de novo um projeto a ser analisado através de nomeação e numeração.

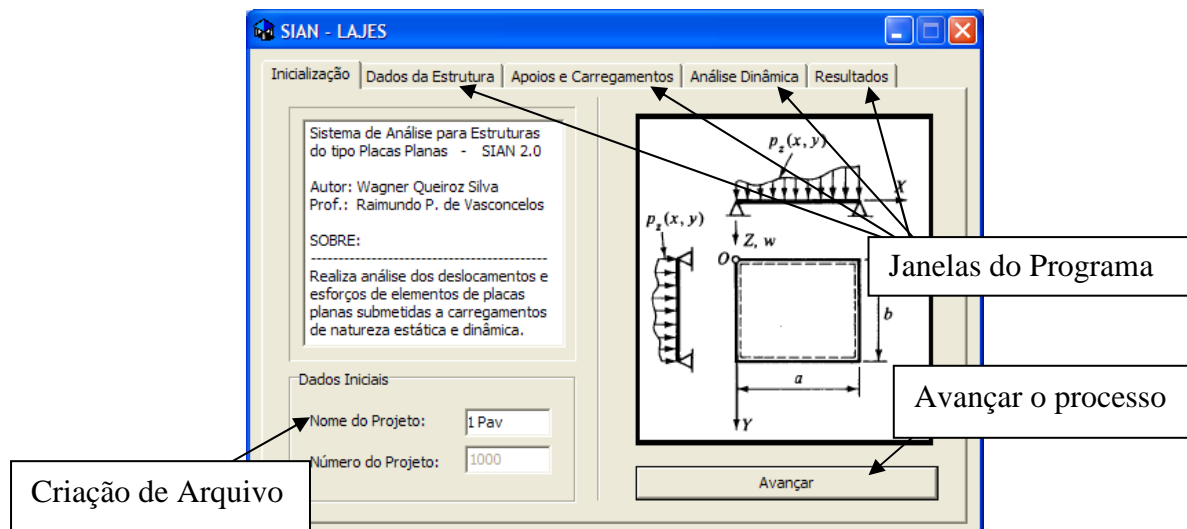


Figura 3 – Janela de inicialização

A janela seguinte (Figura 4 a seguir) permite a criação da estrutura de placa a ser analisada. São inseridos os dados referentes ao tamanho da discretização nas duas direções do plano da placa (x e y), sendo assim definido o tamanho dos elementos finitos. Define-se também o

número de elementos em cada direção (o que por sua vez define as dimensões de largura e comprimento da placa) além do valor da espessura. Definem-se ainda os dados físicos do material Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson. O programa oferece ao usuário os dados padronizados por norma brasileira para placas em concreto armado e em aço, caso seja necessárias. Ao clicar no botão “Avançar” o programa troca de janela e libera os campos a serem preenchidos.

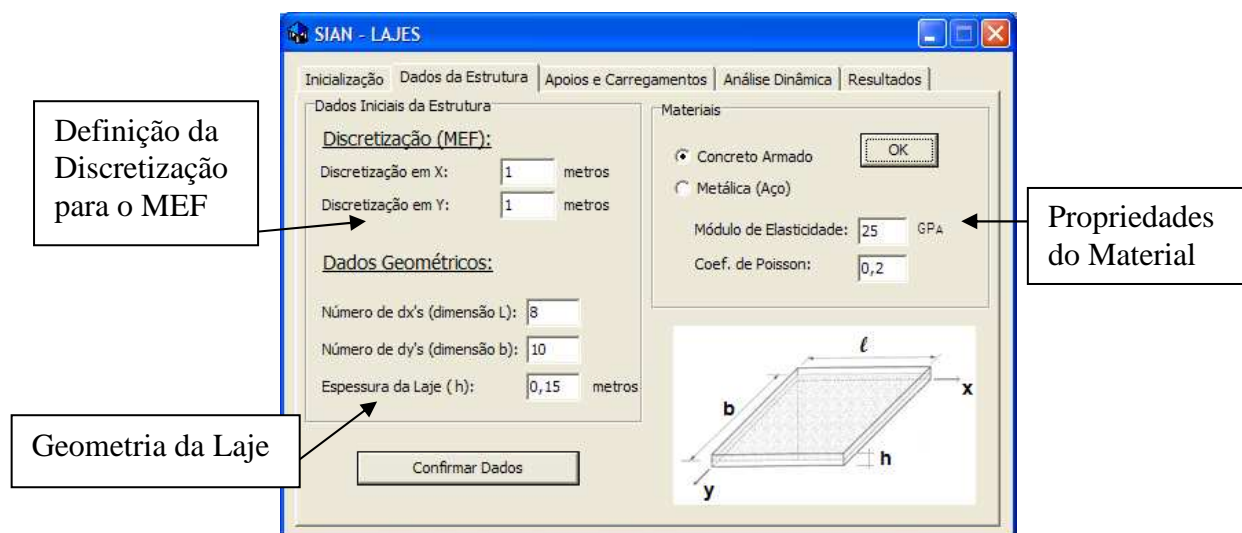


Figura 4 – Criação do elemento de laje

Em seguida, são inseridos os dados das condições externas da estrutura (Figura 5). São aqui definidas as condições de vínculo dos bordos e o carregamento permanente distribuído para análise estática. O valor do carregamento inserido deve ser calculado previamente pelo usuário, considerando o peso próprio, revestimento e sobrecargas. As condições de bordo podem ser duas: bordos simplesmente apoiados ou bordos engastados.



Figura 5 – Dados referentes ao carregamento estático e condições de bordo

Neste ponto, o código já realiza a análise estática do problema, considerando somente o carregamento permanente. Os valores de deslocamentos e esforços devido a esta carga serão armazenados para em seguida serem somados aos resultados da análise dinâmica. Considera-

se que a carga dinâmica ocorre somente após a estrutura se deformar pelo carregamento estático.

Por último são inseridos os dados para a análise dinâmica, como mostra a Figura 6. É definida a taxa de amortecimento conforme o material. Também é definida a função de variação da força aplicada, indicando o caminho para a leitura do arquivo texto que contenha a variação em função do tempo. Defini-se ainda a amplitude máxima do carregamento, que pode ser, por exemplo, o peso de uma ou mais pessoas atuando em uma área.

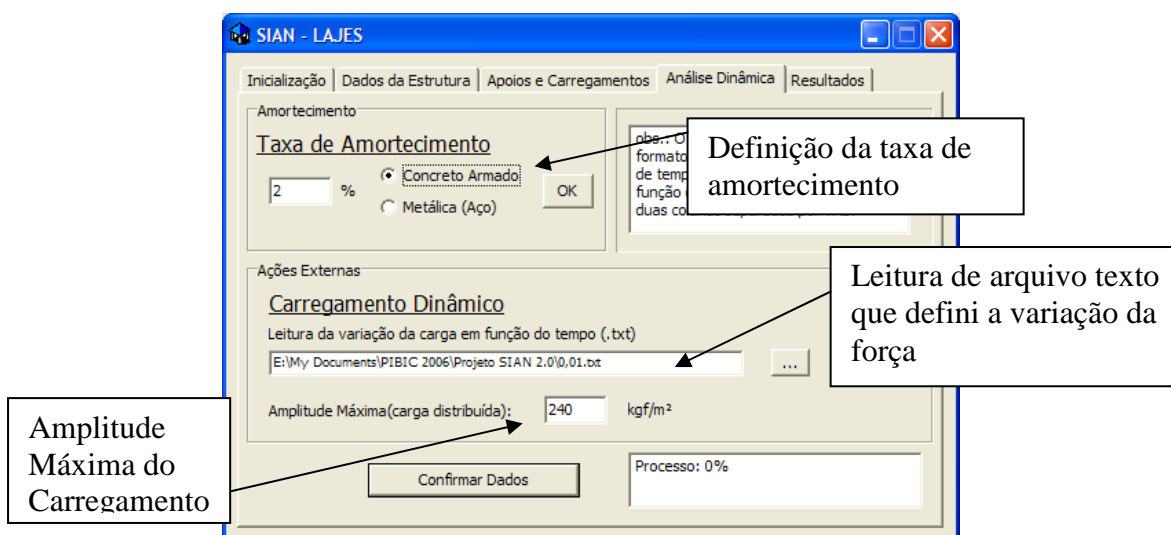


Figura 6 – Dados para análise dinâmica

Com todos os dados inseridos, a ferramenta processa os cálculos, exibindo o caminhamento do processo em termos percentuais. Para o caso de erros ou dados inconsistentes, o mesmo informa ao usuário para rever as janelas anteriores e verificar os dados inseridos. O processo, por consistir na solução de grandes sistemas matriciais pode levar alguns segundos para completar a análise, a depender da discretização adotada. Os resultados obtidos são então impressos em uma janela final em forma de relatório como texto, de acordo com o que mostra a Figura 7.

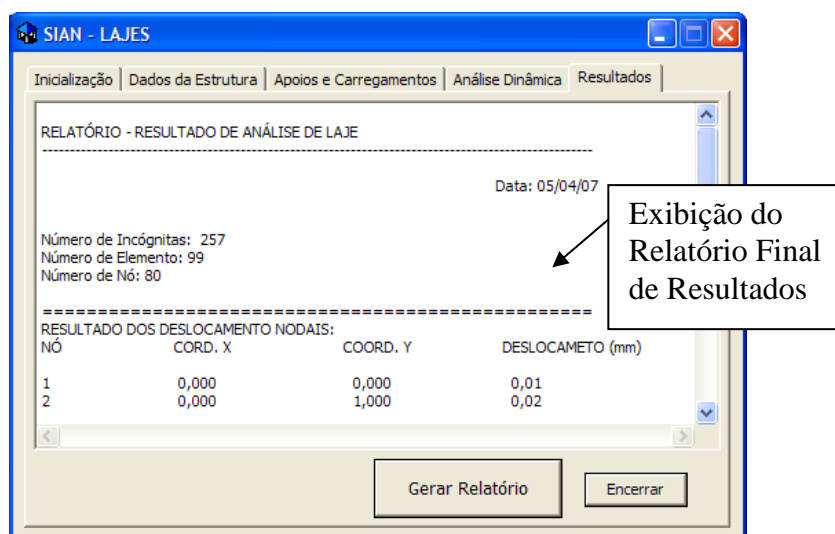


Figura 7 – Relatório final da análise

6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para demonstrar a aplicação e a fim de avaliar o desempenho numérico do programa desenvolvido, será realizada uma verificação dos deslocamentos verticais em uma estrutura de laje de concreto armado quando submetida a cargas estáticas e dinâmicas. Os resultados serão avaliados segundo a norma brasileira NBR 6118. A partir dos resultados obtidos será realizada ainda uma análise comparativa entre os processos de análise estática e dinâmica. Essa comparação servirá para verificação das diferenças entre o estudo de uma mesma estrutura considerando a influência do carregamento estático (estabelecido por norma técnica) e considerando a ação dinâmica de atividades humanas.

Seja então uma laje hipotética em concreto armado, destinada a uma sala para atividades de ginástica. Considera-se que todos os seus bordos estejam simplesmente apoiados em vigas. São definidas as dimensões hipotéticas da estrutura sendo 15 centímetros para a espessura, 10 metros de comprimento por 8 metros de largura (sala ampla devido ao tipo de atividade).

O módulo de elasticidade será calculado segundo a norma NBR 6118, admitindo que o concreto utilizado seja um concreto convencional do tipo C25; teremos então

$$E_{ci} = 5.600 \cdot \sqrt{25} = 2.800 \therefore E_{cs} = 0,85 \times 2.800 = 23.800 \text{ MPa} \quad (15)$$

Sendo o coeficiente de Poisson do concreto igual a 0,2, pode-se então calcular a rigidez a flexão da placa pela equação (2):

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{23.800.000 \times 0,15^3}{12(1-0,2^2)} = 6.973 \text{ kN.m} \quad (16)$$

Para o valor do carregamento permanente será considerado um revestimento de argamassa de cimento com dois centímetros de espessura somada ao peso próprio da estrutura.

$$p = 0,02 \times 21 + 0,15 \times 25 = 4,17 \text{ kN/m}^2 \quad (17)$$

Para o valor de carga acidental a ser utilizado na análise estática, será considerada a atividade de ginásio de esportes. Segunda a NBR 6120, tem-se para o carregamento acidental o valor de 5 kN/m².

No caso da análise dinâmica será tomado um valor de carregamento uniformemente distribuído com intensidade variável, sendo que a amplitude máxima do carregamento corresponde ao peso de três pessoas de 80 kg distribuídos por um metro quadrado de área, ou seja, será considerado que em um metro quadrado, é possível que atuem três pessoas em conjunto num movimento sincronizado. O valor da intensidade máxima do carregamento será então de 2,4 kN/m². É importante observar que será considerada uma carga dinâmica de valor inferior a metade do valor considerado para a análise estática.

Através da expressão (14) o arquivo texto padrão fornece ao programa a variação de força no tempo, sendo que a frequência para atividades de dança é de 3,0 Hz (Bachmann, 1995).

Após a inserção destes dados na ferramenta SIAN, foi realizada então a análise desta estrutura de laje sendo avaliado o valor do deslocamento vertical (flecha), ocorrido no ponto mais central da laje, pois se sabe que é neste ponto que o deslocamento máximo irá ocorrer.

Os resultados obtidos são comparados com a solução analítica de placas retangulares proposta por Navier e também com o uso do programa comercial SAP 2000. Na solução de Navier são utilizadas séries duplas de Fourier através de coeficientes numéricos que permitem escrever uma expressão analítica aproximada para placas retangulares sujeitas a carregamentos distribuídos. Já o software SAP 2000 também utiliza o Método dos Elementos Finitos permitindo análise dinâmica com elemento finito retangular.

Os resultados considerando somente os carregamentos estáticos são apresentados na Tabela 1 a seguir. Observou-se que as diferenças percentuais são baixas, com valores baixos, não superiores a 1,1%.

Tabela 1 – Comparação entre resultados para análise estática

Deslocamento devido a carregamentos estáticos (cm)	Métodos de Análise			Diferença Percentual	
	NAVIER	SAP	SIAN	Navier x SIAN	SAP x SIAN
Permanente	1,48	1,47	1,47	0,4%	0,3%
Sobrecarga	1,77	1,77	1,75	1,1%	1,0%
Combinação	3,25	3,24	3,22	0,8%	0,6%

Para a análise dinâmica, também foi avaliado o valor do deslocamento no centro da laje, neste caso analisando a variação deste em função do tempo. Novamente os resultados são comparados à solução analítica de Navier e ao programa SAP 2000. Estes resultados são apresentados no Gráfico 1 a seguir.

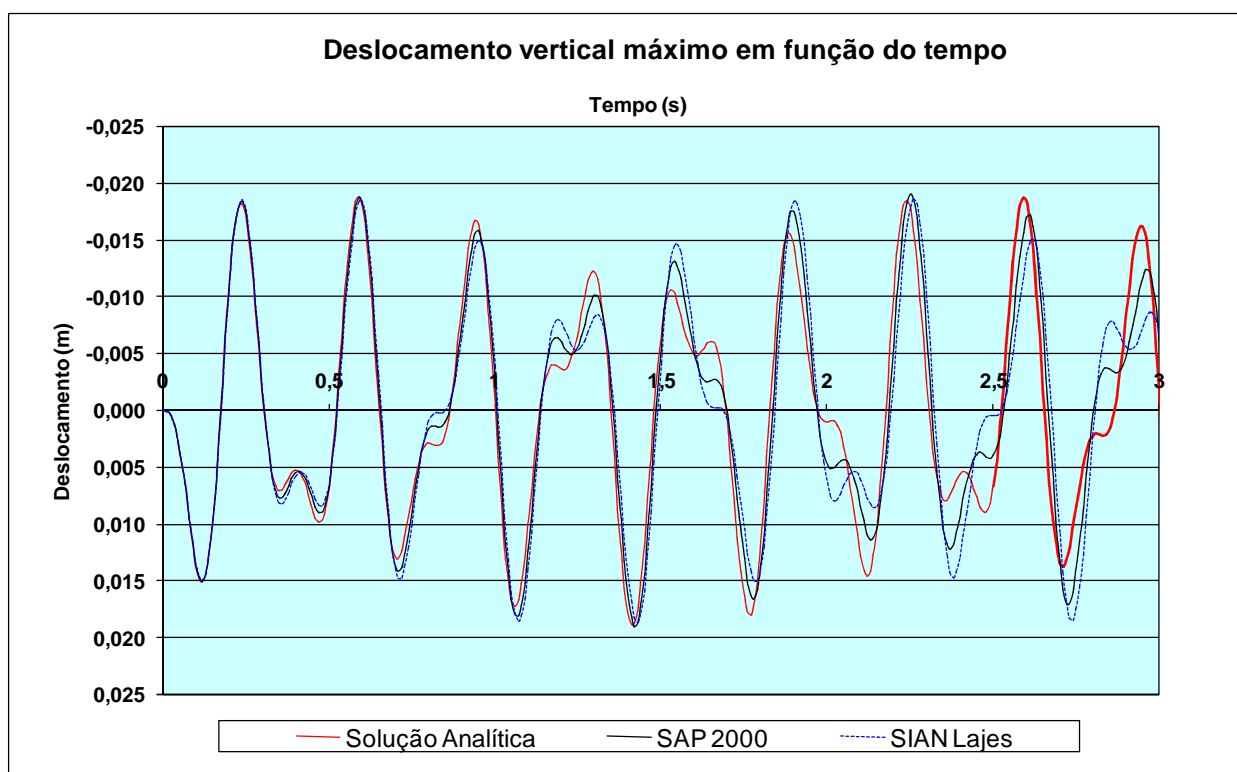


Gráfico 1 – Resultados de deslocamentos obtidos na análise dinâmica

Observa-se que as curvas de deslocamento em função do tempo apresentam o mesmo comportamento e a mesma ordem de grandeza para valores máximos e mínimos. Verificaram-se entre os resultados valores muito próximos, com diferenças percentuais mínimas, de valores da ordem de 2% de diferença (Tabela 2).

Tabela 2 – Comparação entre os resultados para análise dinâmica

Deslocamento devido à carga dinâmica (m)	1	2	3	Diferença %	
	Navier	SAP	SIAN	Navier x SIAN	SAP x SIAN
Máx.	1,89	1,91	1,87	0,7%	1,9%
Mín.	-1,88	-1,91	-1,87	0,9%	2,2%

Observa-se ainda através do Gráfico 1 que, com o passar do tempo, as diferenças entre os valores obtidos através dos métodos distintos de análise aumentam em razão da propagação de erros numéricos inerentes aos diferentes processos matemáticos.

Com a ferramenta SIAN é possível ainda que seja introduzido na análise a taxa de amortecimento da estrutura em função do material desta (no caso, concreto armado). Assim, o amortecimento natural pode ser adicionado, tornando a análise mais real, visto que a rigidez do elemento associada a sua massa gera este amortecimento, conforme o item 4.3. Os deslocamentos obtidos considerando-se o amortecimento são apresentados no Gráfico 2.

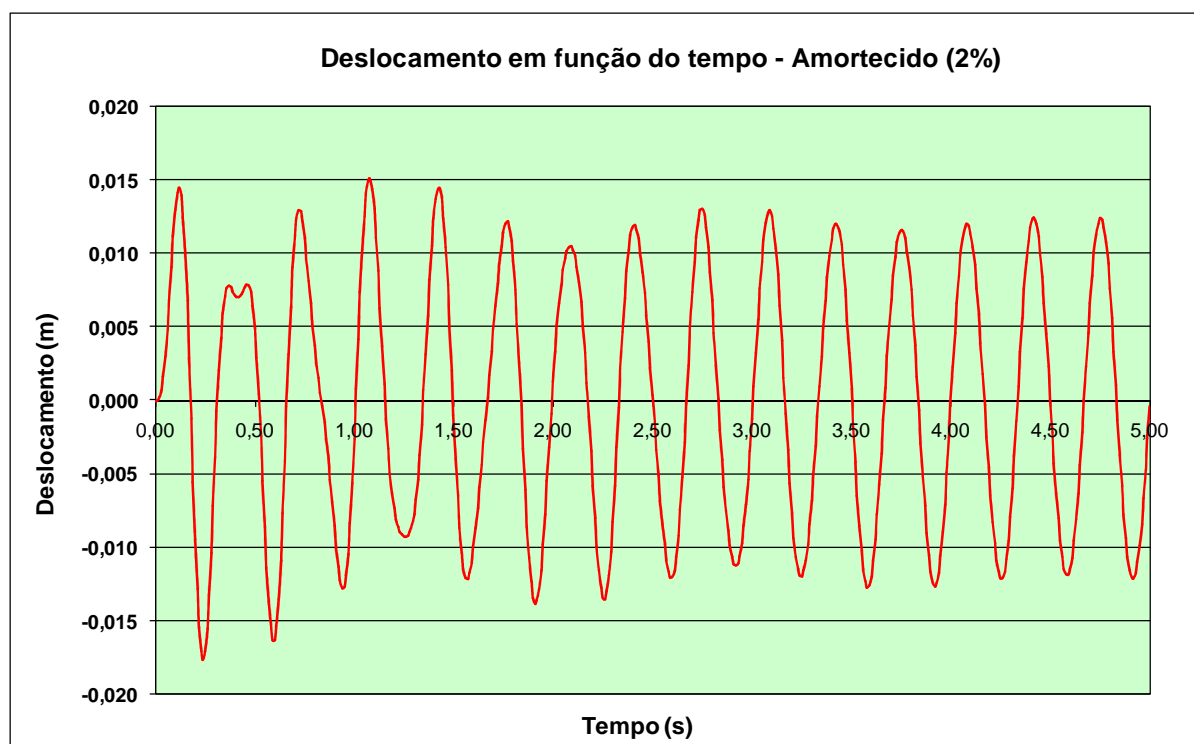


Gráfico 2 – Deslocamentos verticais máximos da estrutura considerando o amortecimento

Observa-se que os valores máximos e mínimos são muito próximos daqueles obtidos na análise sem a consideração do amortecimento. A diferença é que, com o passar do tempo, o amortecimento ameniza a vibração da estrutura. Portanto, os deslocamentos são maiores apenas no início do movimento, no entanto, os efeitos dinâmicos continuam a atuar sobre a estrutura de maneira cíclica, desde que seja mantida também a carga dinâmica.

Outros exemplos processados foram comparados aos valores de referência, sempre apresentando diferenças insignificantes. Com isso, constata-se que a ferramenta está adequada para a análise de lajes, seja em análise estática, seja em análise dinâmica, oferecendo resultados confiáveis e seguros.

O valor da frequência para o primeiro modo da estrutura analisada é de $5,44 \text{ Hz}$. A norma NBR 6118 determina que a frequência crítica para estruturas destinadas a salas de dança ou concerto sem cadeiras fixas é de $7,0 \text{ Hz}$. Portanto, segundo a norma brasileira, para que não houvesse a necessidade de se realizar uma análise dinâmica, a frequência da estrutura deveria ser superior à $1,20 \times f_{crit.}$, ou seja, $8,4 \text{ Hz}$.

Portanto, verifica-se que neste caso a prescrição da norma brasileira é adequada, havendo realmente a necessidade de ser fazer uso dos conceitos da análise dinâmica de estruturas para evitar o comprometimento da estabilidade da laje em questão.

7. CONCLUSÕES

Os resultados para o exemplo aqui apresentado e para outros vários exemplos processados apresentaram valores bastante próximos à solução analítica e ao já consagrado programa comercial SAP 2000. Verificam-se diferenças percentuais muito pequenas entre os resultados, o que nos permite concluir que o programa desenvolvido pode ser utilizado com segurança, sendo útil ao engenheiro calculista para análise estática e dinâmica de estruturas de placa. Os resultados obtidos poderão servir como base para o dimensionamento das peças estruturais.

A partir dos resultados obtidos, pode-se ainda fazer uma comparação entre os deslocamentos ocasionados pela carga estática e pela carga dinâmica. Verificou-se que na análise estática, o deslocamento vertical calculado com a carga acidental da norma foi inferior ao deslocamento máximo obtido na análise dinâmica. Além disso, devido ao modo de vibração da estrutura, esta apresenta, além do deslocamento central positivo (de cima para baixo), a ocorrência de um deslocamento vertical negativo (de baixo para cima), ou seja, o ponto central da estrutura se desloca para baixo e para cima.

Com isso, pode-se concluir que surgirão esforços internos diferentes daqueles calculados pela análise estática, pois com maiores deslocamentos haverá maiores tensões de tração na armadura e compressão no concreto e, no entanto, esta armadura terá sido dimensionada para esforços inferiores aos que poderão solicitá-las, quando da atuação destas cargas dinâmicas.

É importante observar que, o carregamento estático considerado é definido pela norma brasileira NBR 6120 e equivale ao peso de seis pessoas atuando por metro quadrado, enquanto que o valor do carregamento dinâmico foi atribuído de acordo com a bibliografia pesquisada e equivale a um peso de três pessoas por metro quadrado. Ainda assim, os valores de deslocamento foram superiores na consideração da ação dinâmica. Isso se deve na verdade a frequência de excitação produzida pelo tipo de ação considerada. Por estar próxima da frequência natural da estrutura, a frequência de excitação eleva o nível de vibração da mesma podendo alcançar valores que amplificam os deslocamentos, comprometendo assim a sua estabilidade.

A consideração da taxa de amortecimento da estrutura no processo de análise dinâmica torna a análise mais real. Porém observa-se que o amortecimento atua somente após certo intervalo de tempo, atenuando as deformações. Os valores maiores são alcançados ainda no início do movimento oscilatório.

Em suma, a grande diferença entre a análise dinâmica e estática pode ser atribuída às forças oriundas das velocidades (forças de amortecimento viscoso) e das acelerações (forças de inércia) provocadas na estrutura.

A norma brasileira de concreto prevê que não há necessidade de se realizar uma análise dinâmica para estruturas que apresentem uma frequência de excitação 20% maior do que a frequência crítica, estabelecida por esta norma. Constatou-se que as estruturas analisadas apresentaram frequências menores do que recomenda a norma e observa-se que realmente apresentaram problemas de vibração. Neste caso, é interessante que seja realizada também uma avaliação quanto ao conforto humano às vibrações.

Pode-se pensar em soluções simples para resolver este problema, como o enrijecimento da laje através de vigas intermediárias, porém muitas vezes essa solução esbarra no projeto arquitetônico e dependendo do caso pode não ser a mais adequada.

O maior problema talvez seja o fato de que, em estruturas usuais esse tipo de análise não é realizado na fase de projeto. As ações dinâmicas sincronizadas ocasionadas por atividades como dança de grupos de pessoas somente ocorrerá na estrutura pronta e já em serviço. Assim, os problemas de vibração somente serão percebidos após a fase construtiva, quando a

estrutura estará entregue e em utilização. Logo, havendo esse tipo de problema, surgirá a necessidade de intervenções na estrutura, o que se torna um grande prejuízo. A avaliação da vibração ainda em fase de projeto é, portanto, essencial para o sucesso da estrutura e para evitar que este tipo de problema ocorra.

A avaliação com relação à análise dinâmica deve ser realizada, portanto, em função do tipo de utilização da estrutura, cabendo ao projetista determinar se esse tipo de análise é ou não importante para o dimensionamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Associação Brasileira De Normas Técnicas (ABNT). Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimentos. – NBR 6118/2003.
- Associação Brasileira De Normas Técnicas (ABNT). Cargas para o cálculo de estruturas de edificações - Procedimentos. – NBR 6120/1980.
- Bachmann, H. et. al. *Vibration Problems in Structures: Pratical Guidelines*. Birkhäuser Boston, 1995.
- Clough, R. W. et. Al. *Dynamics of Structures*. New York: McGRAW-HILL, 1993.
- Cook, R.D. *Concepts an Application of Finite Elements Analysis*. John Wiley & Sons, 1989.
- Faísca, R. G. *Caracterização de cargas dinâmicas geradas por atividades humanas*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- Hartog, J.P.D. *Mechanical Vibrations*. Dover Publications, 1985.
- Martinelli, D. A., Montanari, L., Savassi, W. *Placas Elásticas*. Universidade de São Paulo, 2003.
- Rao, S. R. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- Soriano, Humberto Lima. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- Szilard, R. *Theories and applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*. John Wiley and Sons, New York, 2004.
- Varela, W.D. *Modelo teórico-experimental para análise de vibrações induzidas por pessoas caminhando sobre lajes de edifícios*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.